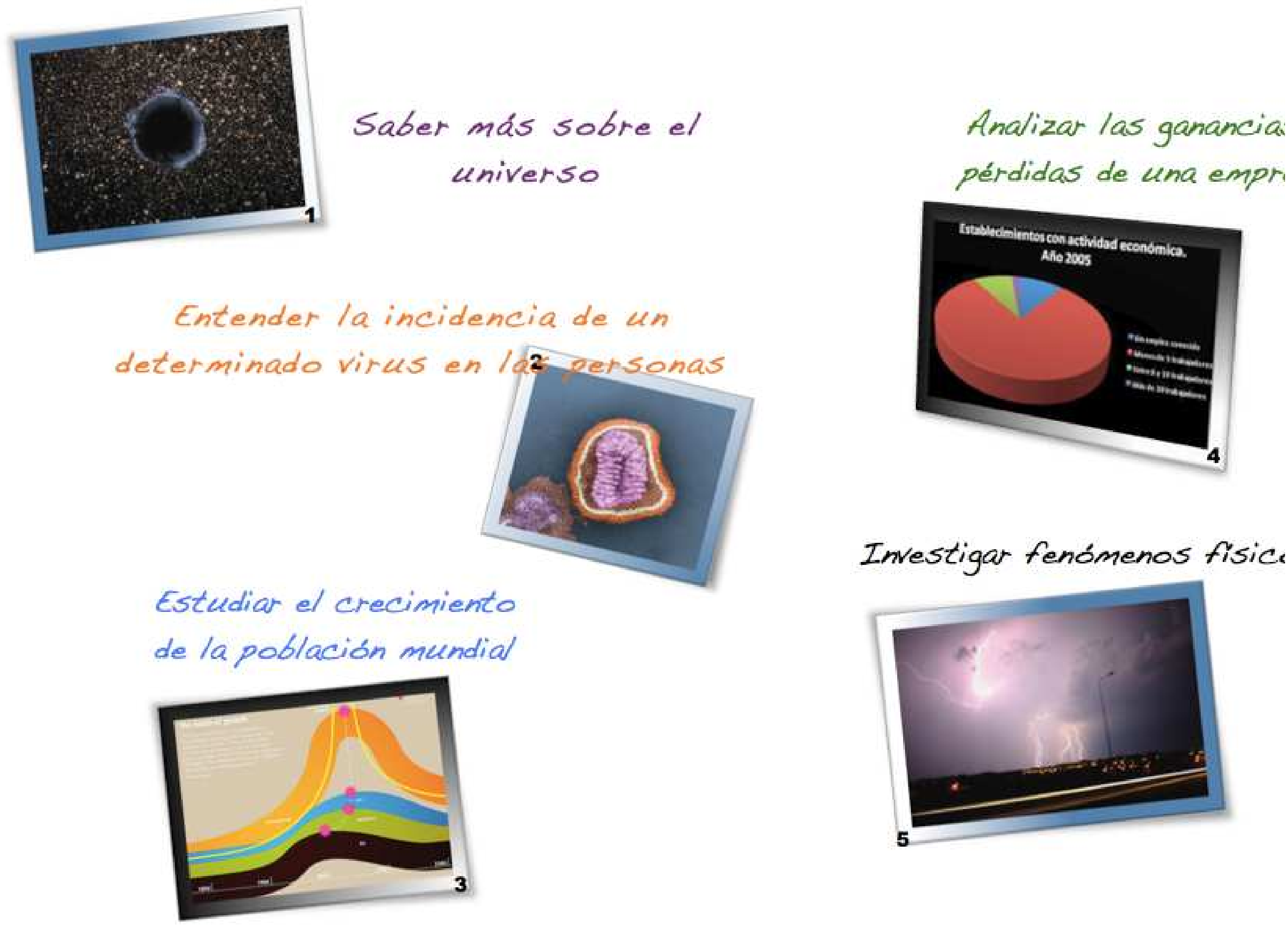
Conocer y saber entender las funciones sirve en muchísimos ámbitos de la vida. Con ellas, por ejemplo, podemos:



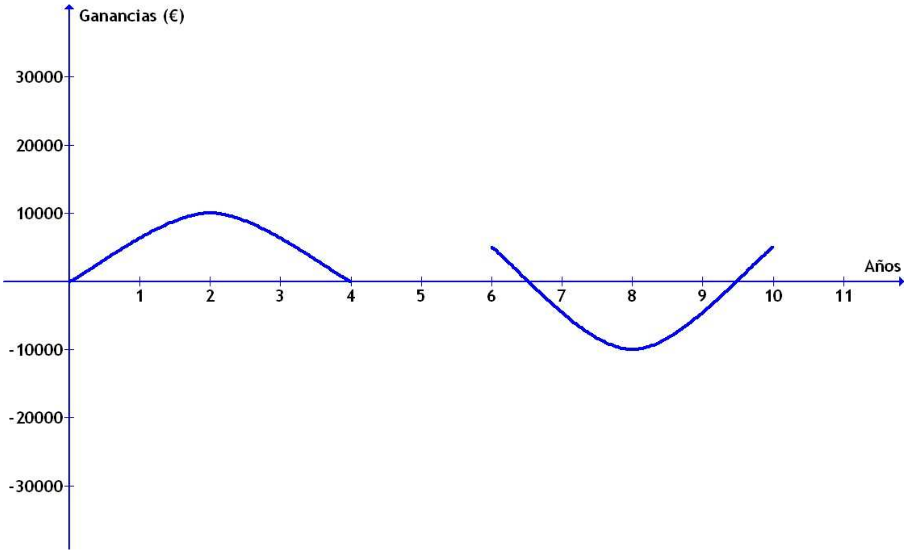
1. Imagen de dominio público de la NASA en wikimediacommons
2. Imagen de Kat m reserach en flickr, licencia CC
3. Imagen de netefekt en flickr, licencia CC
4. Imagen de Shumi4ever en wikimediacommons, licencia CC
5. Imagen de powazny en flickr, licencia CC

Por eso vamos a aprender a descifrar todo lo que nos pueden decir las funciones. En este tema vamos a explicarte, una por una, **las cosas que debes conocer de las funciones a partir de su gráfica**. Verás como no te resulta difícil y al final del tema eres capaz de "interpretar" cualquier función.

Cada apartado del tema está dedicado a cada una de las cosas que tienes que saber acerca de las funciones, menos el último, en el que vamos a practicar con todo junto.

¡Vamos a ello!

En la siguiente gráfica puedes ver la función que representa **las ganancias y las pérdidas d empresa** de chimeneas ecológicas "Calor sano y barato", desde que se creó hasta la actualidad.



Pulsa sobre la imagen para verla a mayor tamaño

En el **eje de abscisas** (el horizontal, el de la x) tenemos representados los años. El año cero correspondería al año en que se fundó esta empresa. Y en el **eje de ordenadas** (el vertical, el de la y) está representado el dinero que la empresa gana (o pierde, claro)

Antes de continuar responde las siguientes preguntas sobre la gráfica para ir calentando motores:

Comprueba lo aprendido

¡Ten cuidado: escribe los números con un punto para indicar los miles!

1. En el segundo año las ganancias de la empresa fueron de ______ euros.
2. En el año 4 la empresa tuvo ___ ganancias.
3. En el año 8 la empresa tuvo unas pérdidas de ______ euros.
4. La empresa no tuvo actividad desde el año ___ hasta el año ___ .

Enviar

Vamos a reflexionar un momento sobre esta cuestión: **¿de qué años tenemos datos sobre empresa?** para responder sólo tienes que fijarte en la gráfica e ir viéndolo:

- Desde que empieza a funcionar en el año 0 tenemos actividad hasta el año 4.
- Desde el año 4 hasta el año 6 hay un parón en que no hay datos (esto quiere decir que empresa no tuvo actividad).
- A partir del año 6 volvemos a tener datos hasta el año 10, es decir que la empresa estu activa.

Si recuerdas los intervalos que estudiamos en la primera unidad, podríamos decir que la empre tuvo actividad en los intervalos:

[0, 4] y [6, 10]

Es decir: los números desde 0 a 4 y desde 6 hasta 10, incluídos los años 0, 4, 6 y 10. Si no recuerdas los intervalos puedes repasarlo en la unidad 1, tema 1, apartado 2.

Pues estos números es lo que llamamos **DOMINIO** de la función y lo escribimos así:

Dom f(x) = [0,4] y [6, 10]

Importante

El DOMINIO de una función es el conjunto de números que tienen imagen, es decir el conjunto de números de los que tenemos datos.

Ejercicio resuelto

¿Cuál sería el **dominio** de la función que conlleva el siguiente caso?

El instituto del hijo de Fran está organizando el viaje de fin de estudios. La agencia de viajes les ha elaborado un presupuesto en función del número de asistentes, pero siempre que sean **un mínimo de 12 y un máximo de 60**. El presupuesto se lo ha dado a través de la función que tienes a continuación en la que:

- x es el número de personas que van al viaje
- y es el precio por persona

$$y = \frac{800}{x} + 100$$

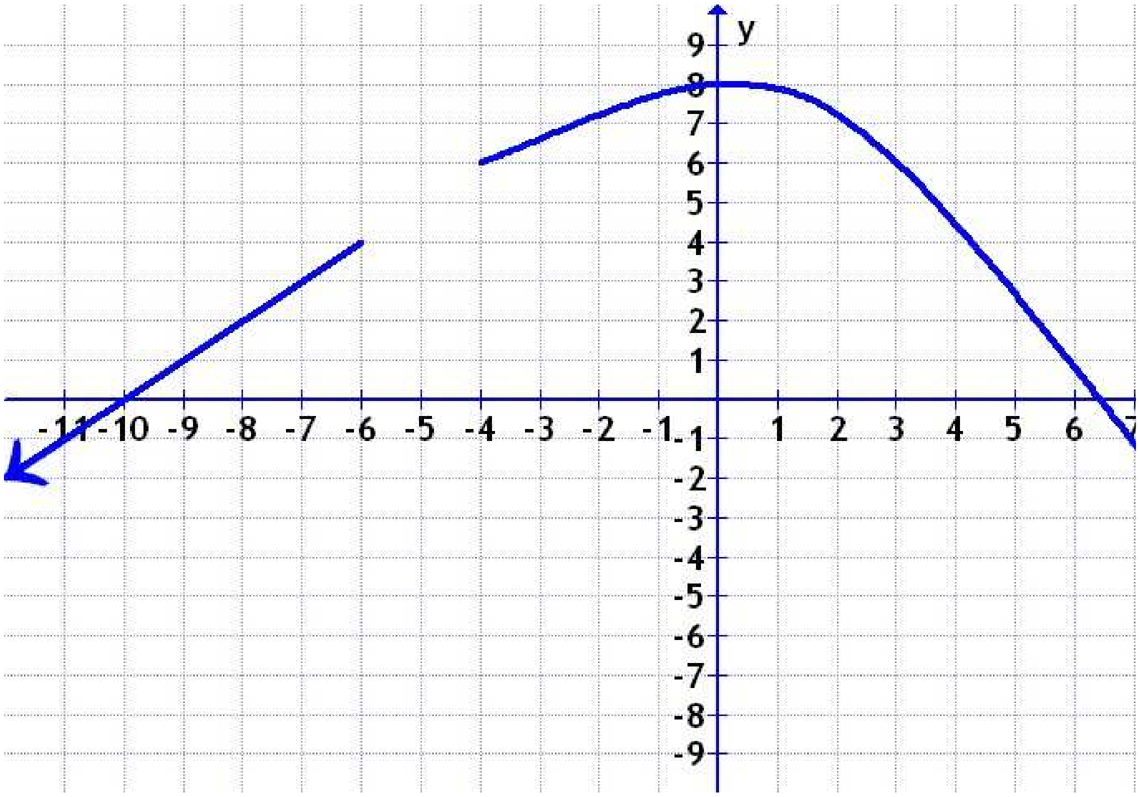
Imagen de J.M. Moreno en flickr, licencia CC

Es muy importante que aprendas a ver el dominio de una función cuando te dan su gráfica. Para esto tienes que ver en la gráfica **para qué valores de "x" existe función** o si te parece más fácil **a qué "x" les corresponde una "y".**

Vamos a ver un ejemplo antes de lanzarte tú.

Ejercicio resuelto

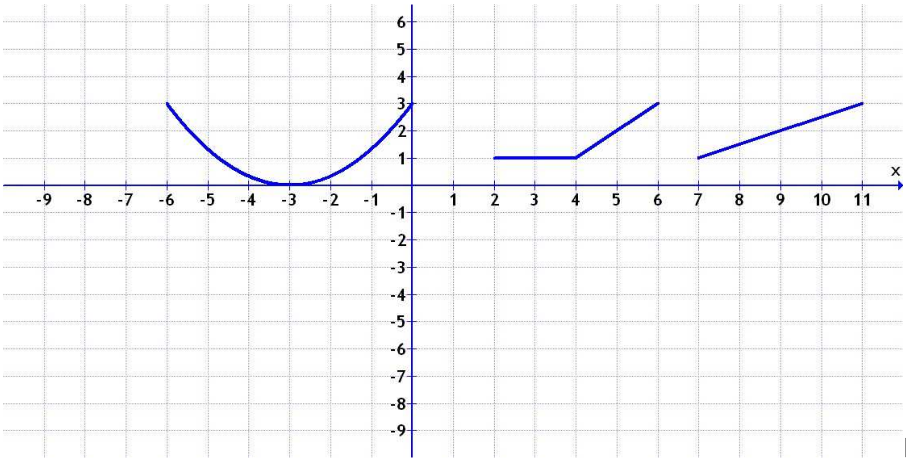
Mira la siguiente gráfica. ¿Para qué valores de x" tenemos un valor de "y"? Esto es lo mismo que plantearse ¿para qué "x" hay función?



Y ahora, veamos si lo entiendes. Si no es así, no te preocupes, en las retroalimentaciones tienes la explicación.

Comprueba lo aprendido

Completa los huecos para escribir el dominio de esta listita de funciones:



1. Pulsa sobre la imagen para verla más grande.

Dominio = [☐ , ☐] y [☐ , ☐] y [☐ , ☐]

2. Función que asigna a cada número el área del cuadrado que podríamos formar con lado ese mismo número.

Dominio = Todos los números reales ☐

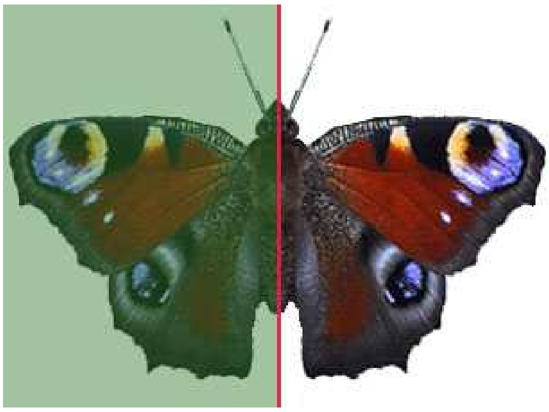
3. y = 5 /x (piensa que para qué valores de "x" no puedes hacer esa división)

Dominio = Todos los números reales menos el ☐

Enviar

2. Simetrías.

Esta palabra quiere decir lo mismo que en la vida cotidiana.



Modificado de Andrewtr en flickr bajo CC

Imagen de anniehp en flickr bajo CC

¿Observas alguna diferencia entre las simetrías de estas dos imágenes? Piénsalo y mira de nuevo las figuras.

En el caso de la mariposa, es simétrica respecto al eje que está marcado (en rojo). Es decir que si dobláramos la imagen por esa marca coincidirían un lado con el otro.

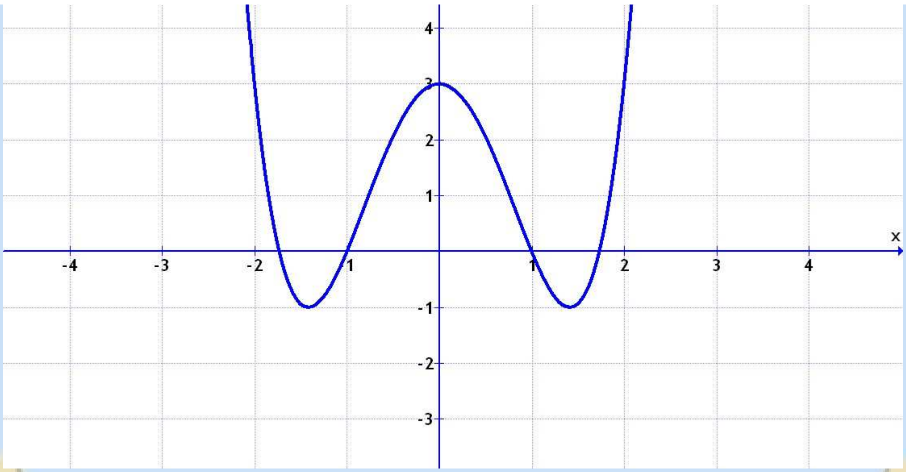
Sin embargo, en la imagen del molinillo no hay un eje por el que doblar. La figura se puede generar girando la parte sombreada alrededor del centro de la figura.

Pues con las funciones existen también estos dos tipos de simetría, exactamente lo mismo, sólo que tienen estos otros nombres: **PAR** e **IMPAR**

Importante

Una función es **PAR** cuando es simétrica respecto el eje y.

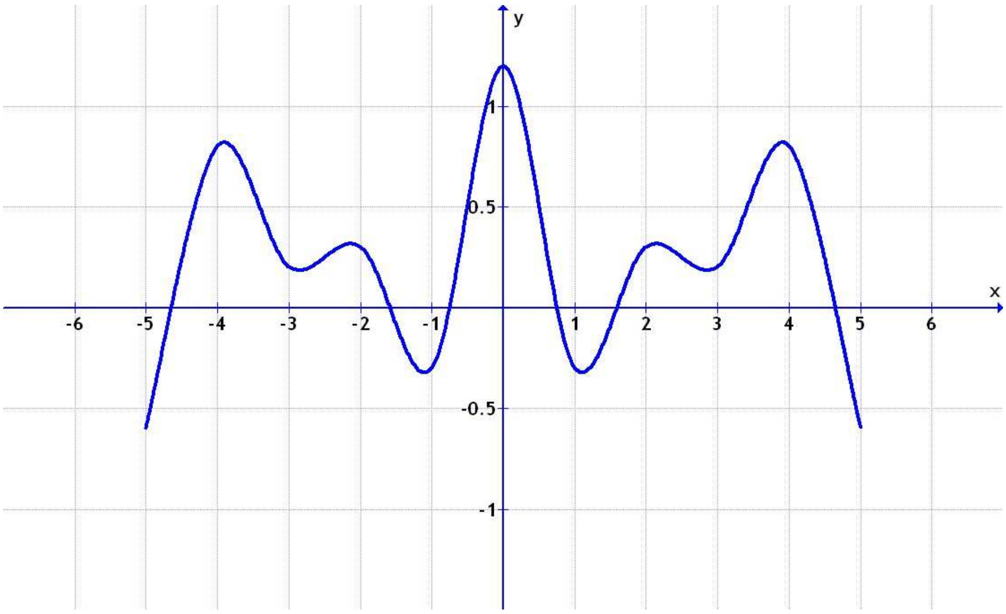
Es decir que el eje de simetría (por donde doblaríamos para que las dos mitades coincidieran) es el eje y.

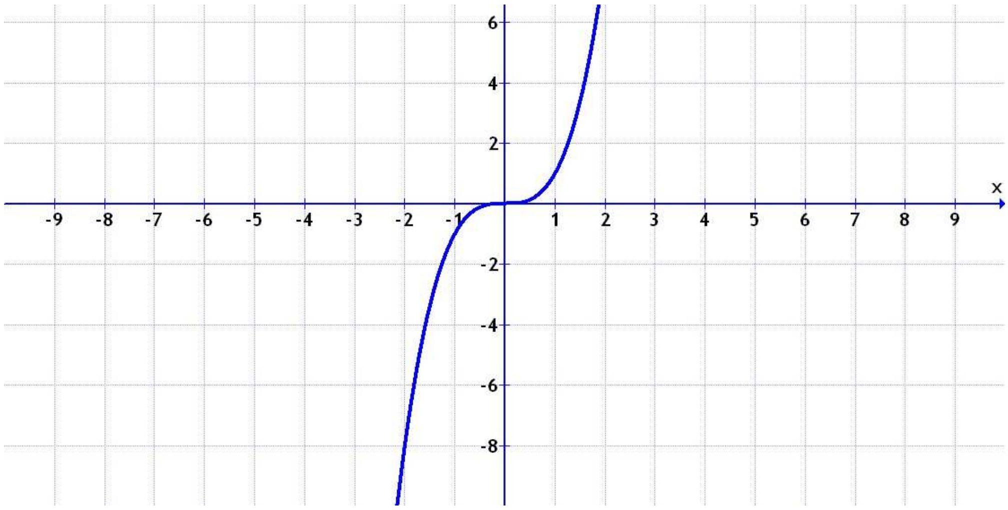


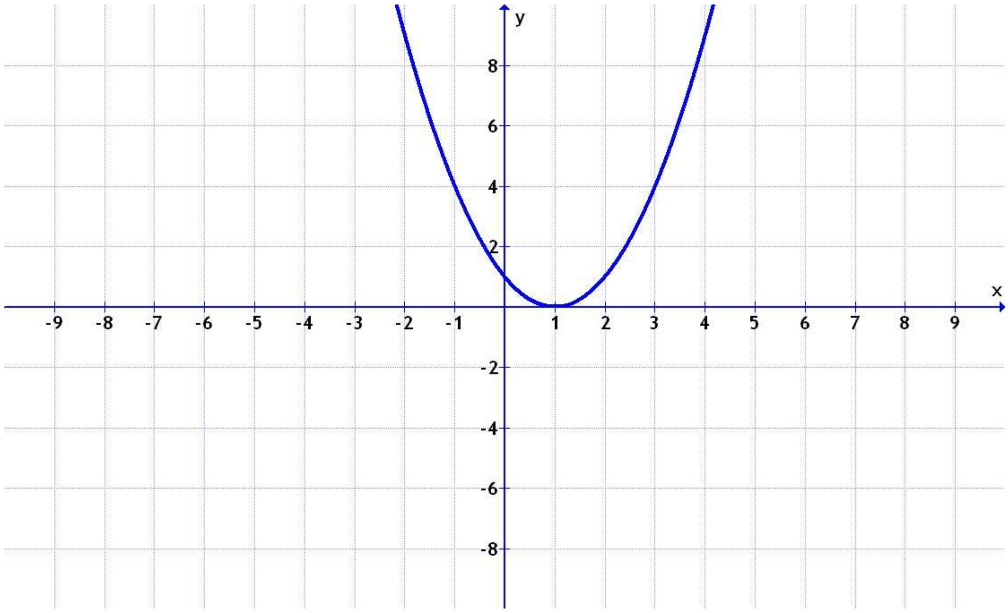
Comprueba lo aprendido

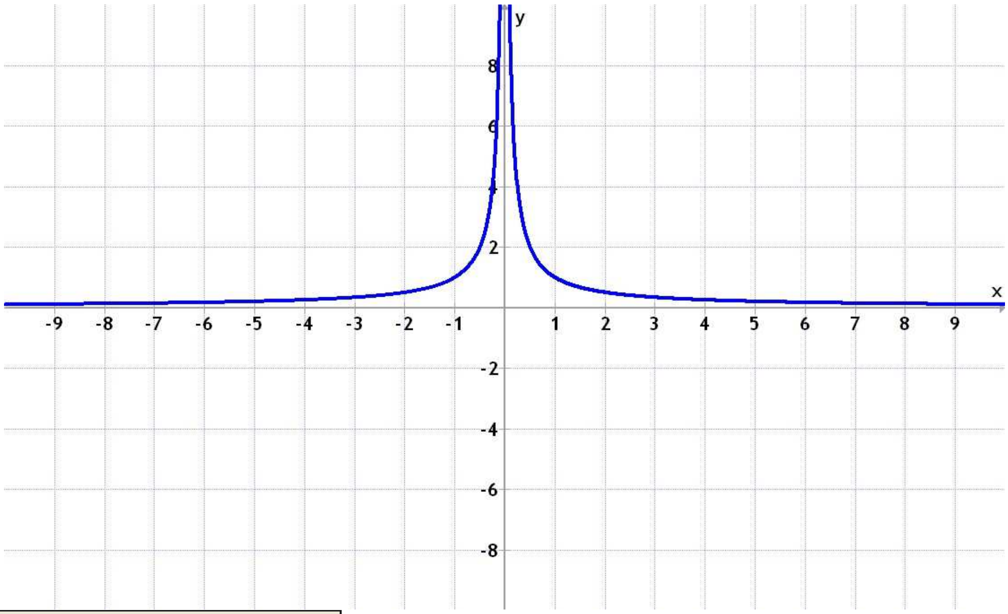
¿Cuáles de las funciones siguientes son pares?

☐





☐ 

☐ 

Mostrar retroalimentación

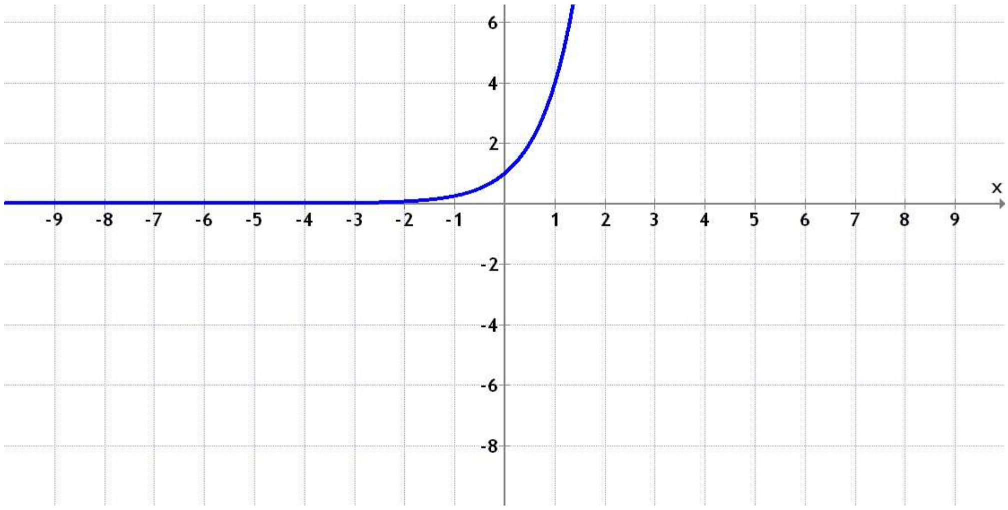
Importante

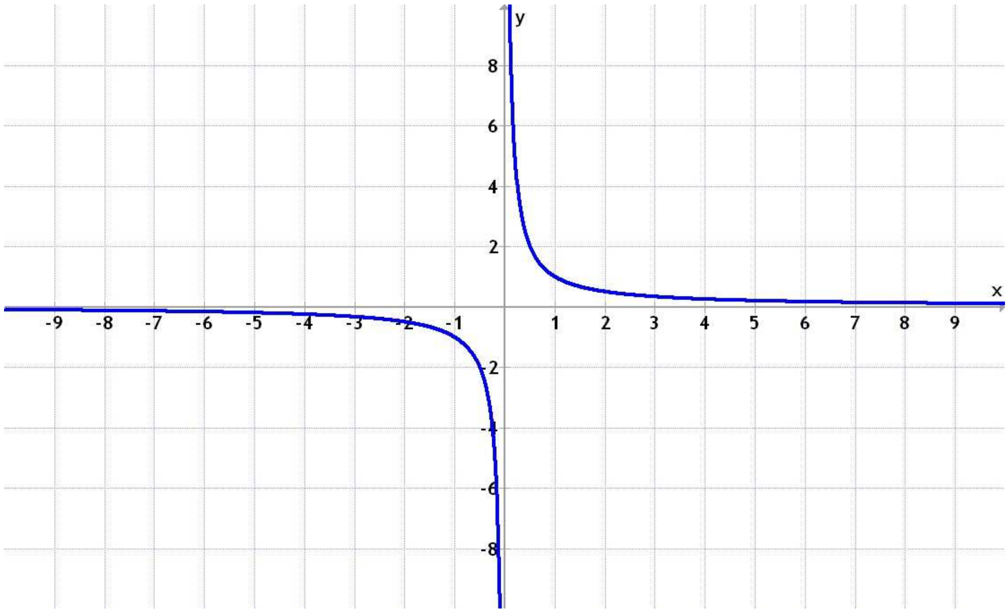
Una función es **IMPAR** cuando al girar 180º la mitad de la función (la parte sombreada) sobre el origen de coordenadas obtenemos la otra mitad de la función.

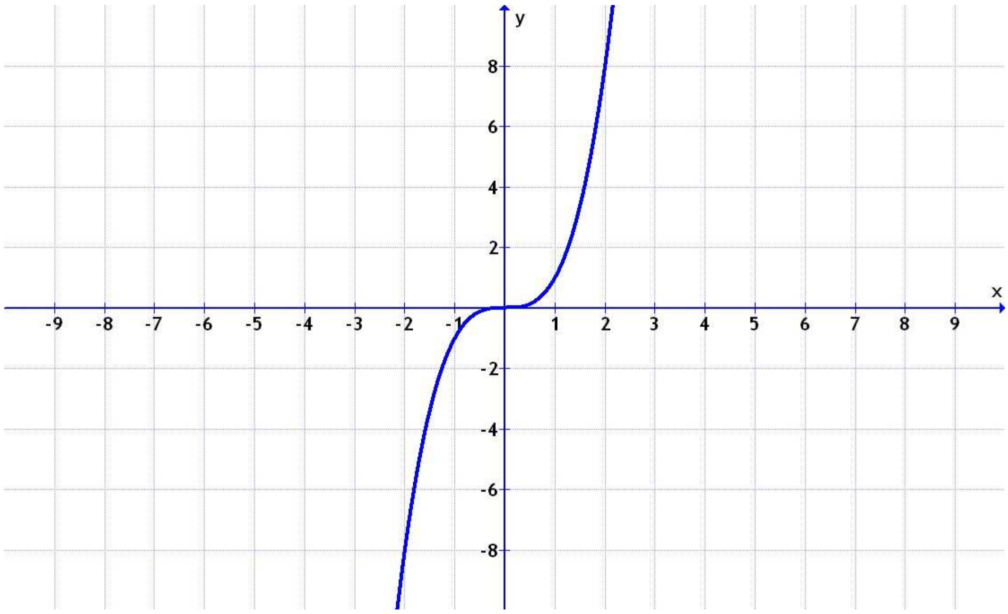
Vamos a comprobar si lo has entendido con el siguiente ejercicio:

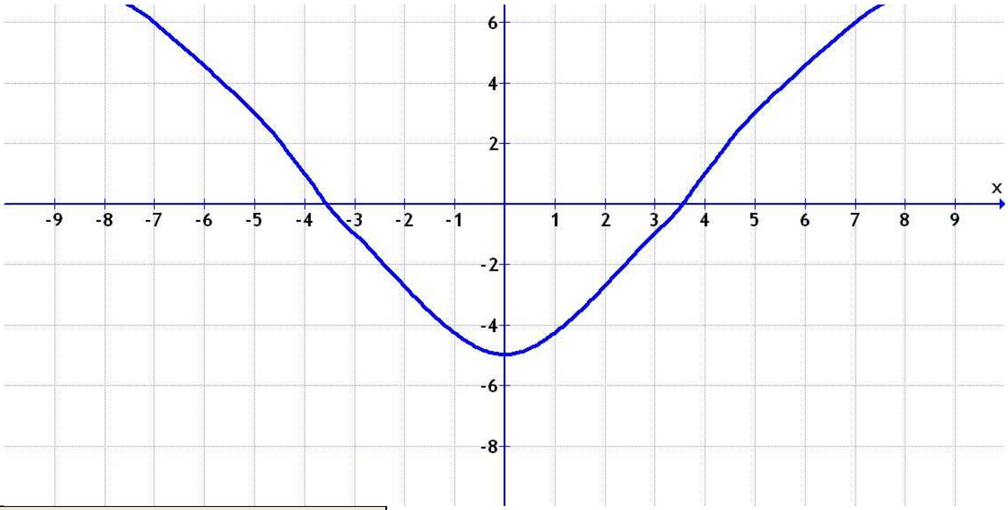
Comprueba lo aprendido

¿Cuáles de las siguientes funciones son impares?


x
-9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 1 2 3 4 5 6 7 8 9
6 4 2 -2 -4 -6 -8

☐ 
y
x
-9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 1 2 3 4 5 6 7 8 9
8 6 4 2 -2 -4 -6 -8

☐ 
y
x
-9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 1 2 3 4 5 6 7 8 9
8 6 4 2 -2 -4 -6 -8



Mostrar retroalimentación

Ten en cuenta que las funciones no tienen por qué ser pares o impares. Pueden no ser ni una cosa, ni la otra.

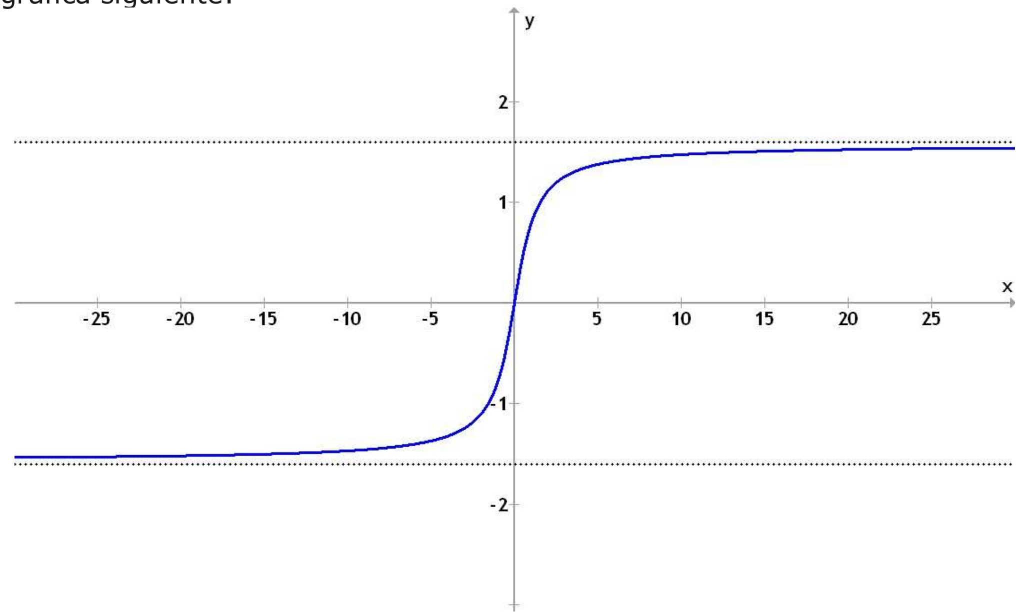
Y habrás visto que sin son pares no pueden ser a la vez impares. Y al revés, claro.

Importante

En resumen, las funciónes pueden:

- Tener simetría
  - Pares
  - Impares
- No tener simetría

Observa la gráfica siguiente:



Las rectas horizontales que puedes ver punteadas indican el límite del que la gráfica no pasa. Estas funciones que tienen unos límites de los que no pasan se llaman **funciones acotadas.** Cuando lo están por arriba y por abajo, como ésta, decimos que la función está **acotada superiormente e inferiormente**.

Ese número del que no pasa la función se llama **cota** de la función. Y en este caso tendríamos una **cota superior** y una **cota inferior**.

- Cota superior: y = 1,6 (porque no hay ningún punto cuya y valga más que ésta)
- Cota inferior: y = -1,6 (porque no hay ningún número cuya y valga menos que ésta)

Fíjate que la cota se escribe siempre y = número.

Importante

- Una función está **acotada superiormente** cuando hay un valor de "y" que la función no supera.
- Una función está **acotada inferiormente** cuando hay un valor de "y" del que la función no pasa por debajo.

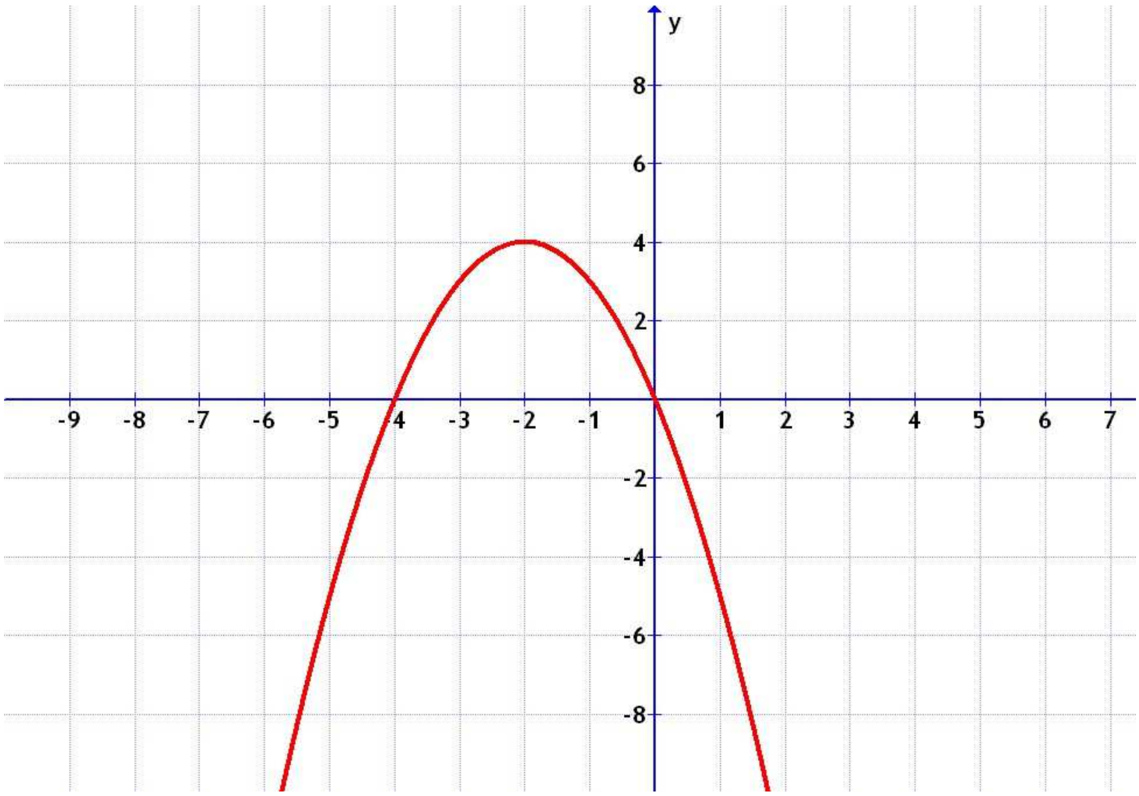
Las funciones pueden estar:

- Acotadas superiormente e inferiormente
- Acotadas sólo inferiormente
- Acotadas sólo superiormente
- No estar acotadas

Vamos a comprobar si lo has entendido con la siguiente autoevaluación:

Comprueba lo aprendido

Indica si es verdadera o falsa la afirmación sobre la siguiente función:



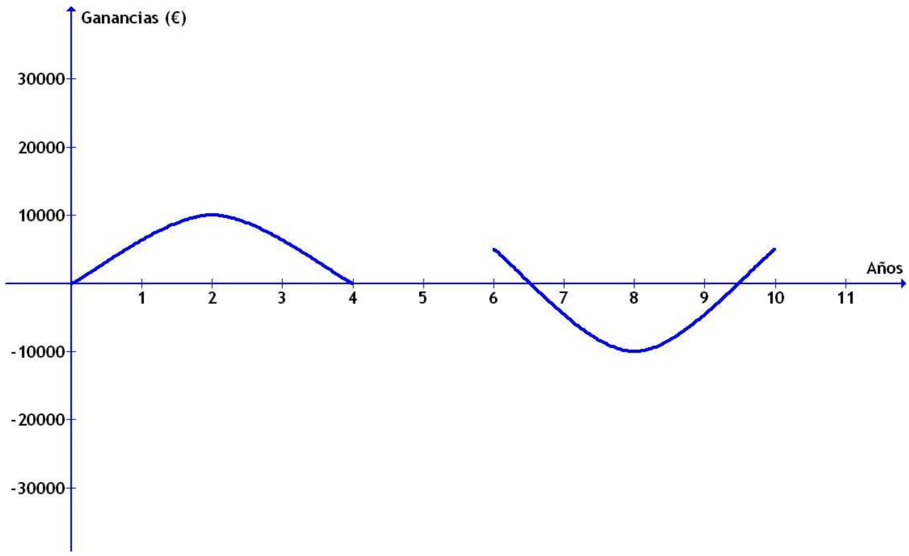
a. Esta función no está acotada.

Verdadero ○ Falso ○

b. Esta función está acotada superiormente por y = 5

Verdadero ○ Falso ○

¿Recuerdas nuestra empresa de chimineas ecológicas?



Pulsa sobre la imagen para verla a mayor tamaño

Seguro que no te resulta difícil responder a estas preguntas:

- ¿En qué año obtuvo sus **máximas** ganancias? ¿Cuál fue la ganancia de ese año?
- ¿En qué año obtuvo las ganancias **mínimas**? ¿Cuál fue el balance ese año?

No es complicado darse cuenta de que el **segundo año** es cuando la empresa tuvo los mayores beneficios. Concretamente **10.000 euros**. Esto es porque no hay ningún punto que esté "más arriba de ese". Por eso decimos que:

La función tiene un máximo en el punto (2, 10.000)

Además decimos que este máximo es absoluto porque nunca en toda la vida de la empresa se superaron esas ganancias.

De la misma manera podemos ver que el año de menos ganancias fue en el año 8 en que la ganancia fue de -10.000, es decir que la empresa perdió 10.000 euros. Esto es porque no hay ningún año en que las cosas le fueran peor a la empresa, es decir que las "ganancias" (que cuando son negativas son pérdidas) estén por debajo de este valor. En matemáticas decimos que:

La función tiene un mínimo en el punto (8, -10.000)

También este mínimo es absoluto porque nunca en la vida de la empresa se rebasaron esas pérdidas.

Importante

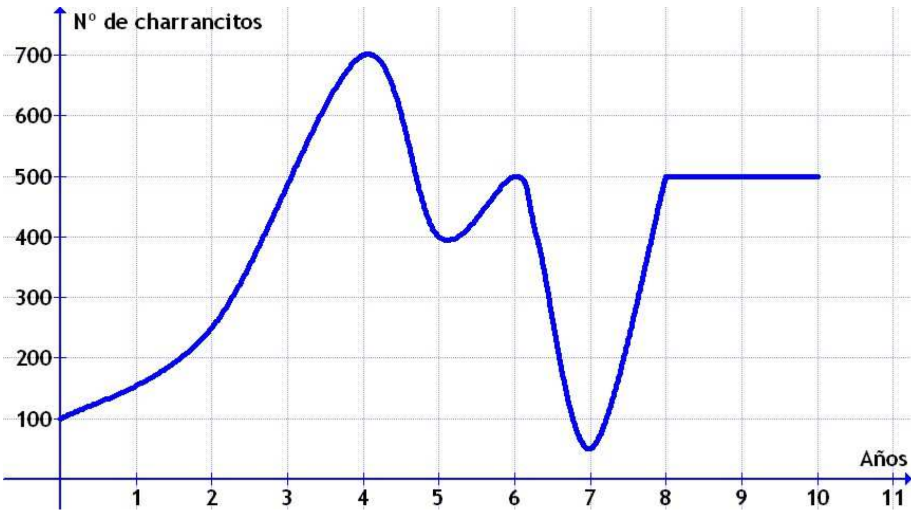
Para escribir un **máximo o un mínimo** de una función siempre escribimos las coordenadas del punto **(x,y)** en el que se encuentra.

Ahora intenta resolver tú el siguiente ejercicio antes de mirar la solución:

Ejercicio resuelto

¿Conoces a los charrancitos? (imagen de trebol-a en flickr con licencia CC)

En el Parque nacional de Doñana un
durante 10 años un estudio sobre ur
año han controlado el número de ind
datos obtenidos han elaborado la sigui

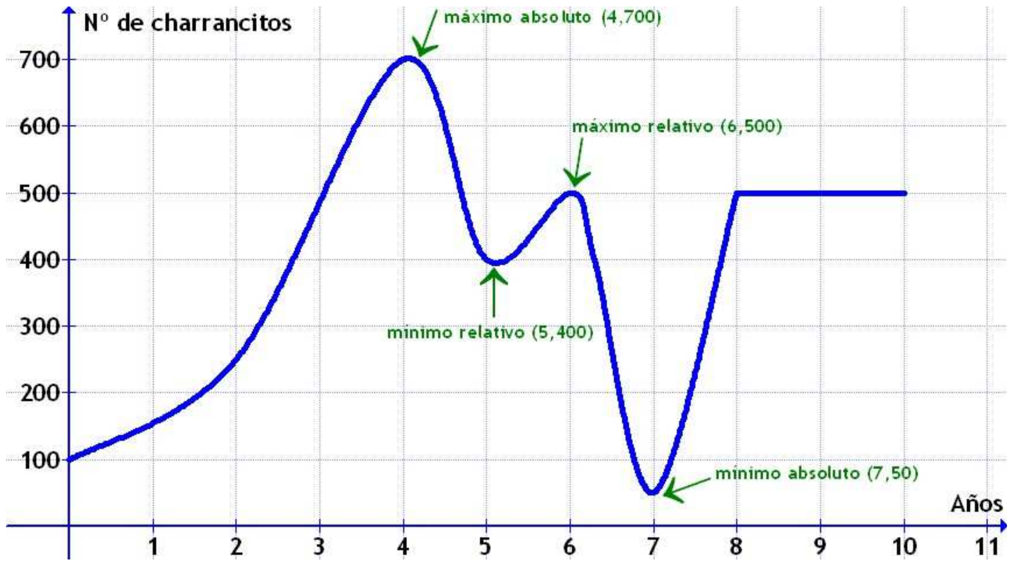


Pulsa sobre la imagen para agrandarla

¿Cuál es el máximo y el mínimo absoluto de esta función? ¿Cuál es su significado?

Pero en la gráfica anterior existen otros puntos en que la población de charrancitos también fue más alta que los años cercanos. Es el punto que tienes marcado en la imagen como **máximo relativo** porque es máximo, no de toda la gráfica, sino sólo de un trocito de gráfica.

Igualmente pasa con los minimos. En este caso hay otro punto en que la población alcanzó un valor inferior que en los años cercanos. Es el **mínimo relativo** que también puedes ver marcado en la gráfica:



Pulsa sobre la imagen si necesitas ampliarla

Esta función tiene un máximo relativo en el punto (6,500)

Esta función tiene un mínimo relativo en el punto (5,400)

Importante

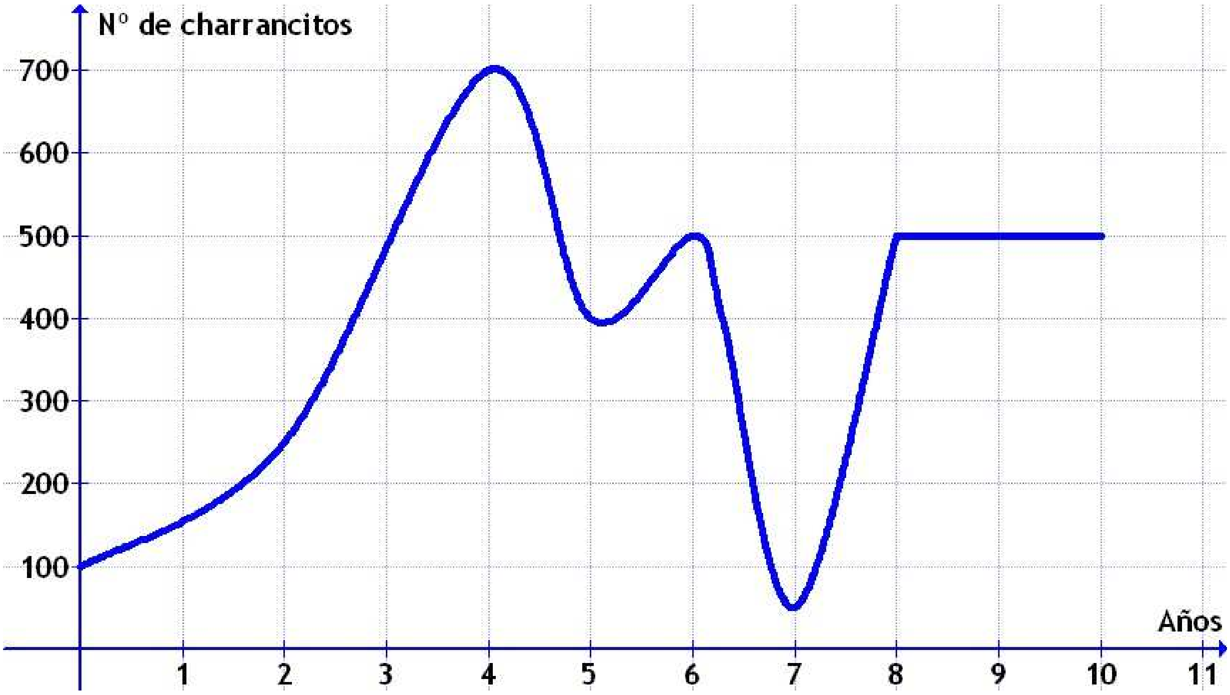
- Una función tiene un **máximo absoluto** en un punto si en ese punto el valor de y es mayor que en el resto de la gráfica.
- Una función alcanza un **mínimo absoluto** en un punto en el que el valor de y es menor que en toda la gráfica.

Las funciones pueden tener también máximos y mínimos relativos.

4.1. Crecimiento y decrecimiento

Este apartado es muy intuitivo, verás como te resulta muy fácil de comprender.

Volvamos a el ejemplo de los charrancitos:



Pulsa sobre la imagen para ampliar

Comprueba lo aprendido

Completa las siguientes frases con las palabras ***crece*** o ***decrece:***

Desde el año 0 hasta el 4 la población de charrancitos ______ .

Desde el año 4 hasta el 5 la población ______ .

Entre los años 5 y 6 la población ______ .

Entre los años 6 y 7 la función ______ .

Enviar

Esto en el lenguaje de las matemáticas lo tenemos que decir así:

- f(x) es creciente en el intervalo (0,4). *Que significa que la función crece en los x contenidos en ese intervalo.*
- f(x) es decreciente en el intervalo (4,5)
- f(x) es creciente en el intervalo (5,6)

- f(x) es decreciente en el intervalo (6,7)

Esto se llama **estudiar el crecimiento de una función o estudiar la monotonía de una función.**

Importante

Para estudiar el **crecimiento** (o monotonía) de una función:

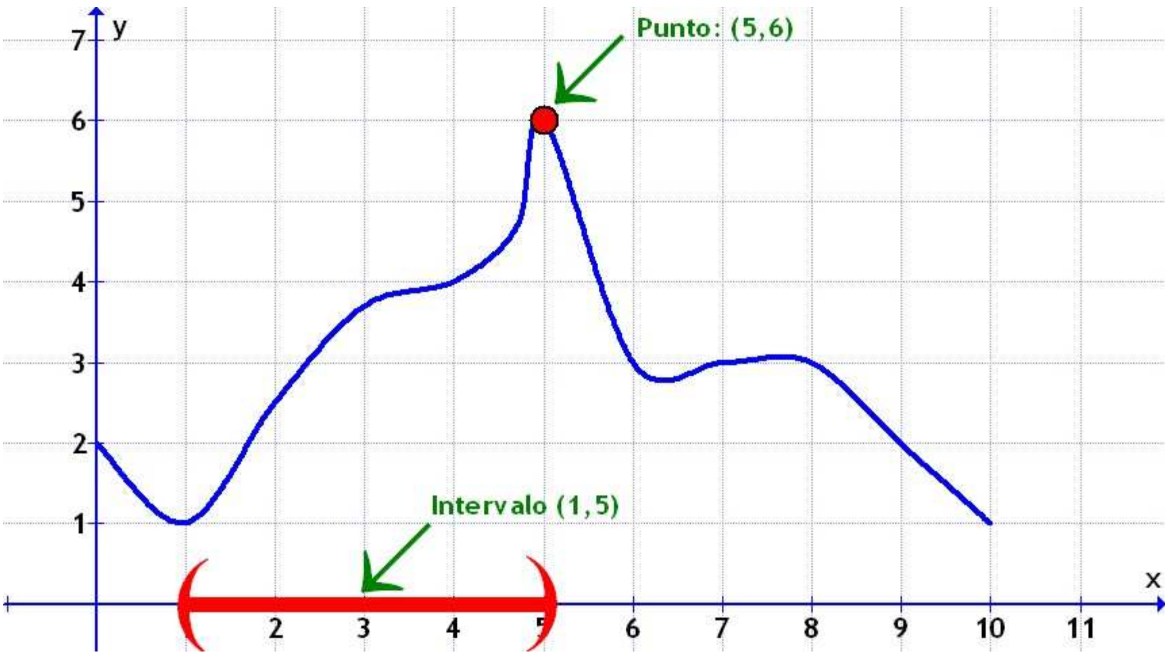
1. Escribimos los puntos dónde estan **los máximos y los mínimos.**
2. Observamos cuando la función crece y cuando decrece siempre **mirando el eje x de izquierda a derecha.**
3. Escribimos los **intervalos** siempre **referidos al eje de las x.**

¡¡TEN MUCHO CUIDADO!!

PUNTOS E INTERVALOS SE ESCRIBEN IGUAL PERO SON DOS COSAS MUY DISTINTAS

Cuando decimos que una función tiene un máximo en (5,6), con (5,6) nos estamos refiriendo al **punto** x=5 y=6

Pero cuando decimos que f(x) es creciente en (1,5), con (1,5) NO nos estamos refiriendo a un punto, sino a un **intervalo**.



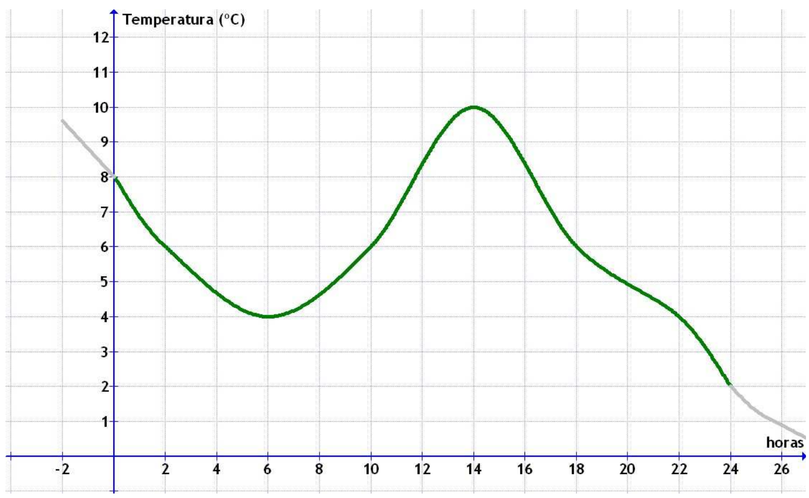
Pulsa sobre la gráfica para ampliar

A veces esto puede inducir a confusión porque estamos usando una misma manera de escribir dos cosas diferentes: **punto e intervalo.**

Vamos a aclararlo con un ejemplo:

Ejercicio resuelto

En un centro meteorológico se ha elaborado la siguiente gráfica con las temperaturas de una población:



pulsa sobre la imagen para ampliar

Imagen de W. Siegmund
wikimedia commons bajo

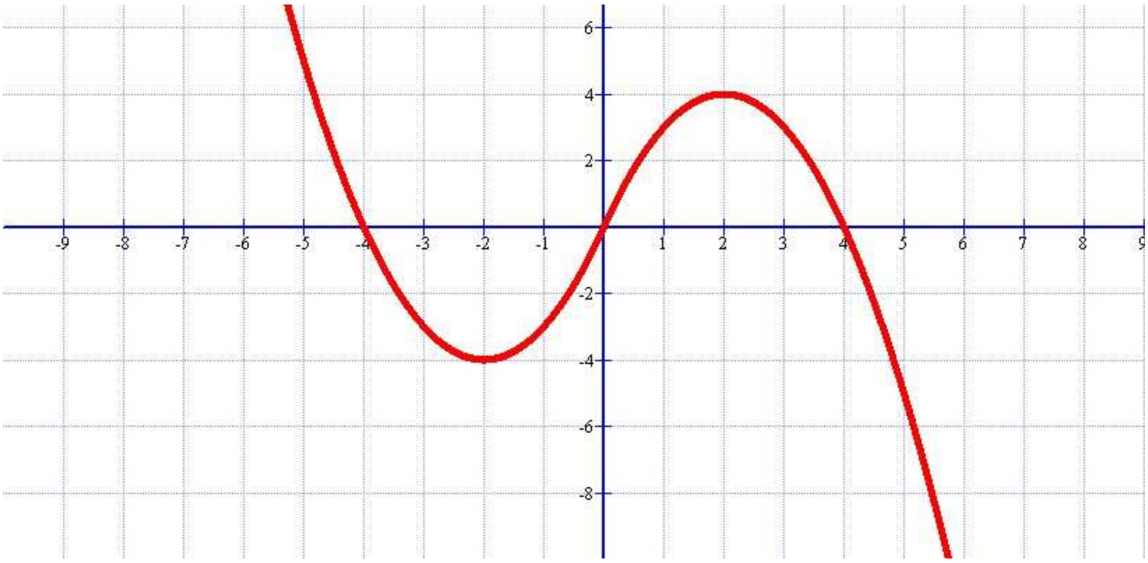
Nuestro trabajo consiste en realizar un estudio en que recojamos las temperaturas máximas y mínimas y los períodos en que las temperaturas aumentan y disminuyen. Antes de ver la solución, prueba tú a hacerlo ¡seguro que algo te sale bien!

Recuerda que:

- *Para los máximos y los mínimos escribimos **puntos**.*
- *Para el crecimiento y el decrecimiento escribimos **intervalos** del eje x.*

Comprueba lo aprendido

Ahora sí que te toca ver si lo has entendido. Completa los huecos con la información de esta gráfica:



Pulsa sobre la imagen para agrandarla

La función tiene un máximo ______ en ______

La función tiene un mínimo ______ en ______

La función es creciente en el intervalo ______

La función es decreciente en los intervalos (-∞, ____) y (____ ,∞)

Enviar

ESTUDIANDO EL CRECIMIENTO DE UN CULTIVO DE BACTERIAS

En un laboratorio se está estudiando la evolución de una población de bacterias a lo largo de 24 horas. En el estudio se parte de una población inicial de 4.500 bacterias a las que se deja en un medio favorable para que se reproduzcan. Tras 9 horas de cultivo se le añaden 4.000 nuevas bacterias y se sigue observando la evolución del cultivo hasta las 24 horas.

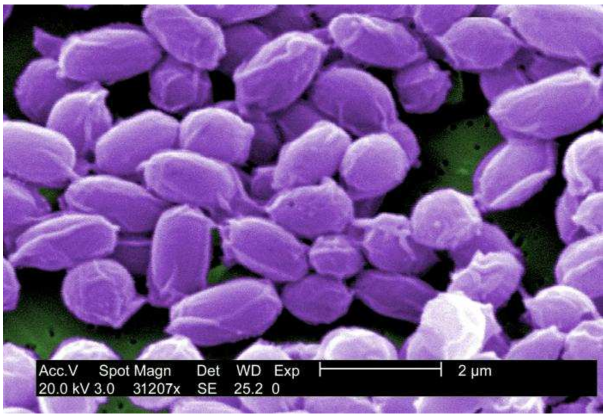
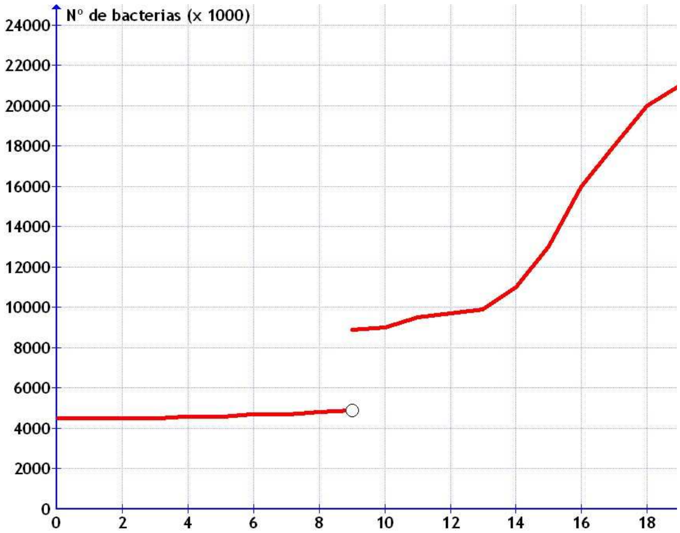


Imagen de pingnews.com en flickr bajo CC

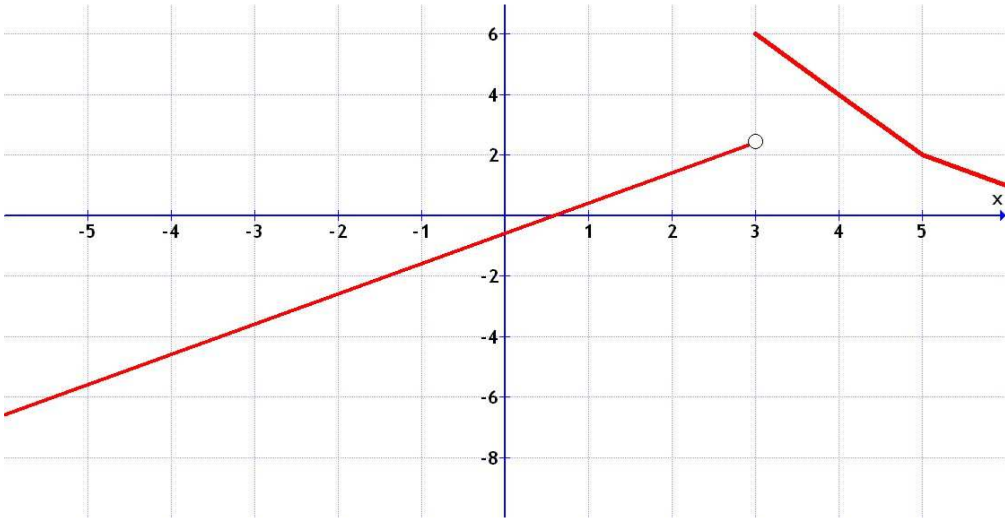


En x=9, es decir en la novena hora, puedes ver que en la gráfica hay un salto. Este salto se debe a que hemos añadido de golpe 4.000 nuevas bacterias. En el resto de la gráfica el aumento de la población se hace de forma **continua**, sin saltos.

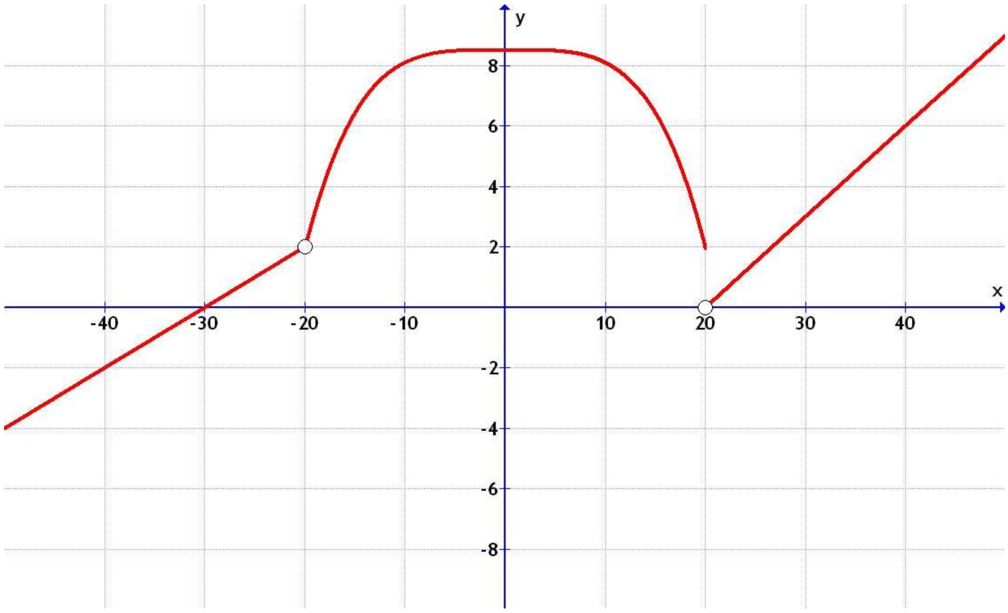
Por eso decimos que esta función que relaciona el tiempo con el número de bacterias **es una función continua en todos los puntos menos en x=9**. En este punto la función presenta una **discontinuidad.**

Para aclarar las ideas, función continuaes aquella cuya gráfica puede dibujarse sin levantar el lápiz del papel.Siguiendo este ejemplo ¿podrías decir cuándo las siguientes funciones no son continuas?

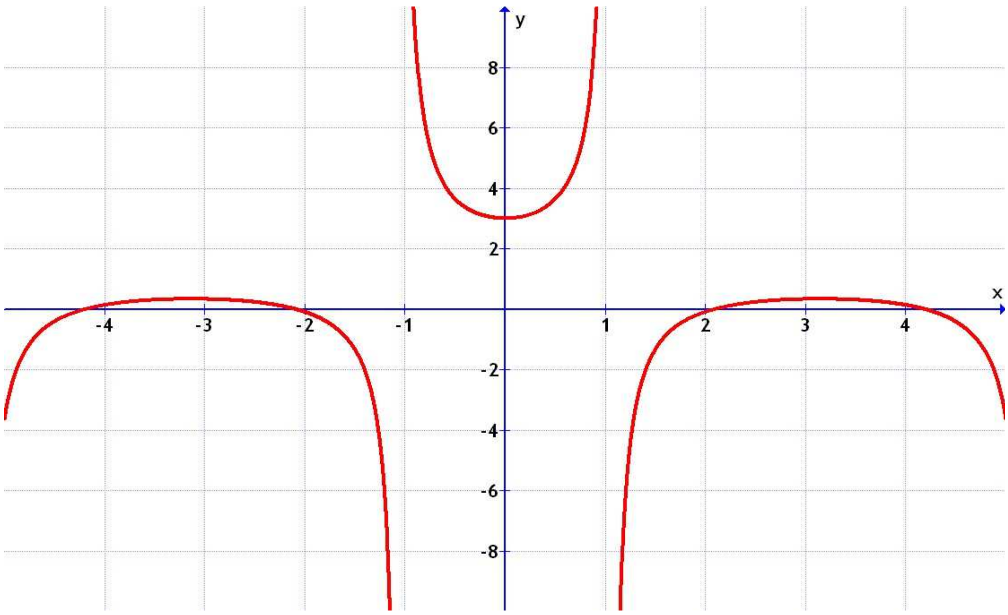
Comprueba lo aprendido



a. Esta función presenta una discontinuidad en x= ☐



b. Esta función presenta una discontinuidad en x= ☐ y x= ☐

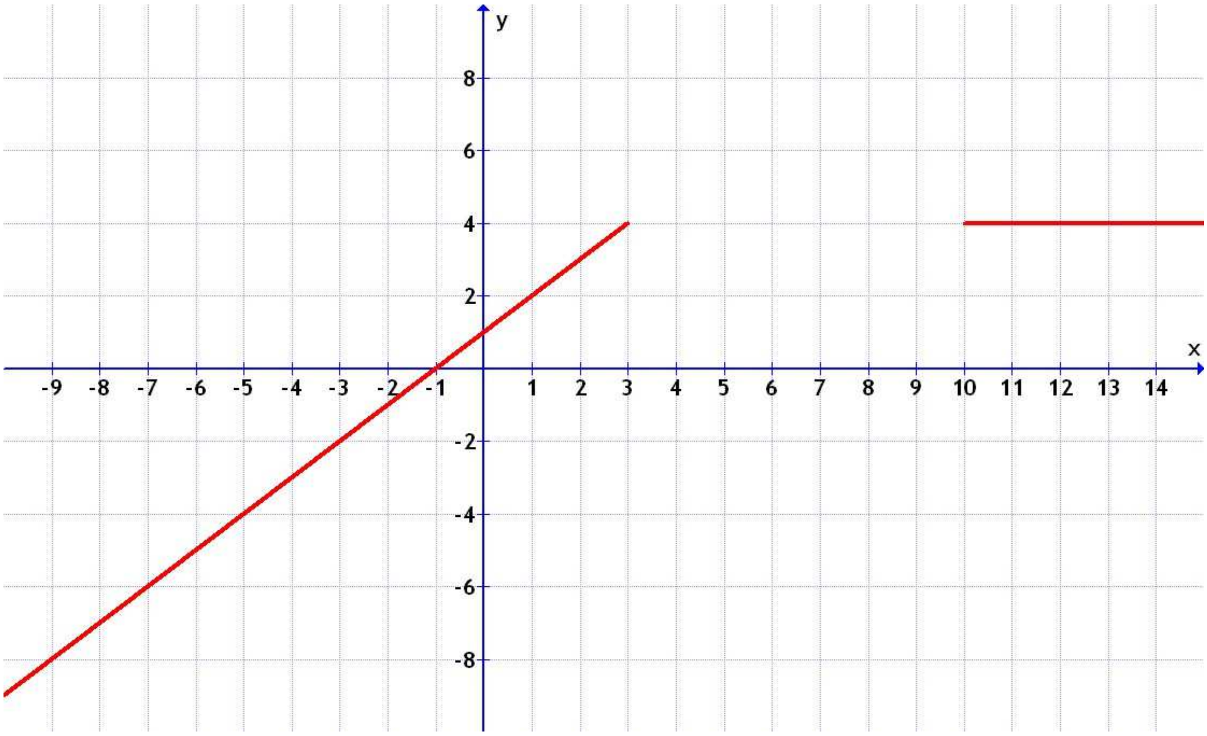


c. Esta función NO es continua en x= ☐ y en x= ☐

Importante

Intuitivamente, decimos que una función es **continua** siempre su gráfica no se vea interrumpida en algún punto y pueda desarrollarse de un trazo.En los puntos en los que tengamos que se presente algún salto diremos que la función es **discontinua**.

Esto que hemos hecho se llama **estudiar la continuidad de una función.** Para eso tenemos que fijarnos en el eje de las "x". Mira la gráfica siguiente:



Entre la x= 3 y la x= 10 no tenemos función por lo tanto no puede ser continua. Pero en el resto, la función sí es continua puesto que no se interrumpe. Para expresar esto volvemos a necesitar nuestros viejos conocidos: los **intervalos** (puedes repasarlo en la unidad 1, tema 1, apartado 2). Esto lo expresamos así en matemáticas:

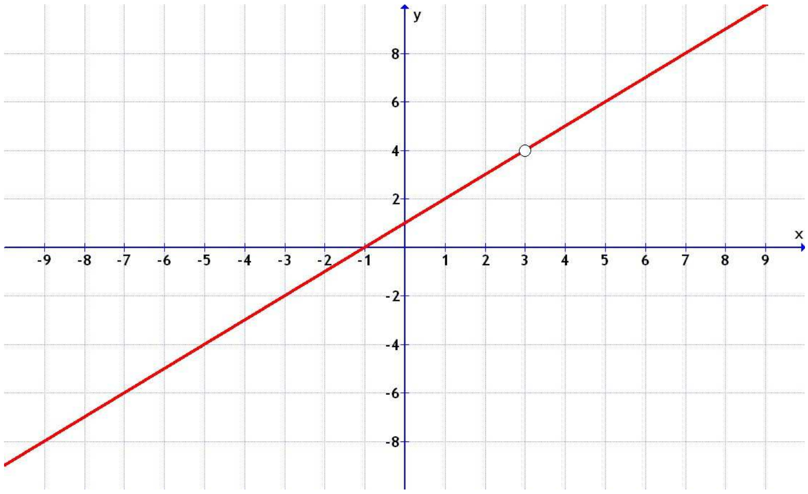
f(x) es continua en los intervalos$(-\infty,3)$ y $(10, \infty)$

Esto quiere decir que para las "x" que están en alguno de esos dos intervalos, la función es continua. ¿Lo entiendes? Si no lo ves claro sigue viendo ejemplos y ya verás como terminas por comprenderlo.

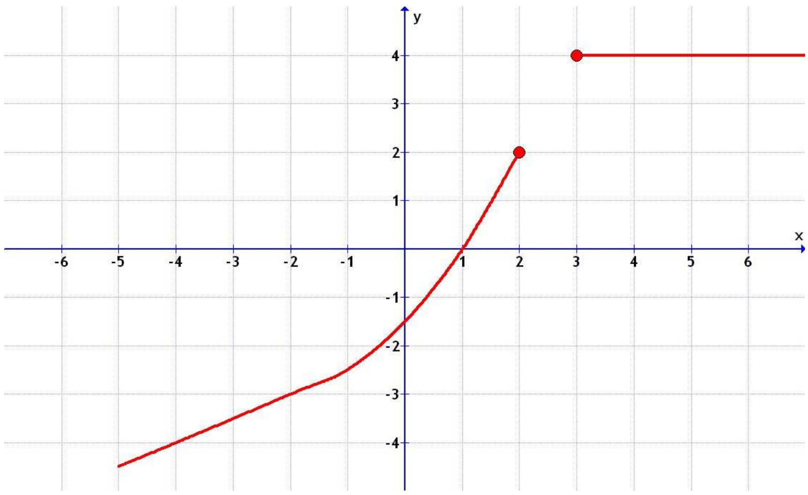
Te puedes encontrar una gran variedad de situaciones en esto de la continuidad. En la siguiente autoevaluación tienes unas cuantas para que te familiarices con ellas. Si tienes dudas repasa la gráfica con el dedo y mientras no tengas que despegar el dedo de la pantalla para seguirla es que la función es continua.

Comprueba lo aprendido

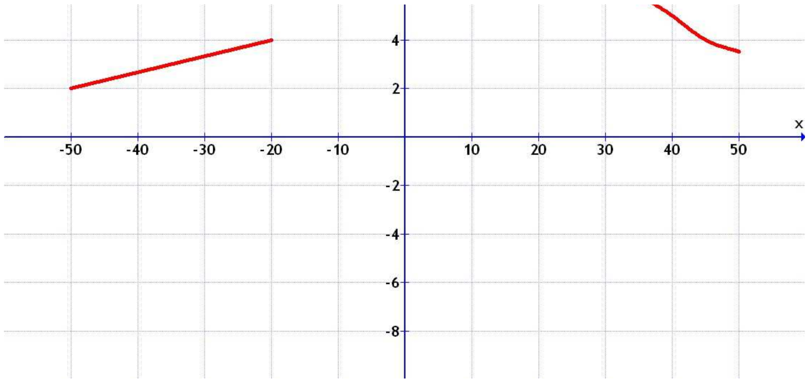
Completa los huecos estudiando las funciones que tienes a continuación. Acuérdate de que las discontinuidades están en las x en las que tengas que levantar el dedo de la pantalla para seguir la gráfica. Siempre que no tengas que levantarlo es que la función es continua.



a. La función es continua en todo R menos en x = ☐



b. La función es continua en los intervalos (-∞, ☐) y (☐ , ∞)



c. La función es continua en los intervalos (-50, ☐), (☐ , ☐) y (☐ , ☐)

Enviar

Y ahora todo junto. Porque lo que te pueden pedir en el examen es que sobre una misma gráfica estudies todas las características que hemos ido viendo en estos apartados.

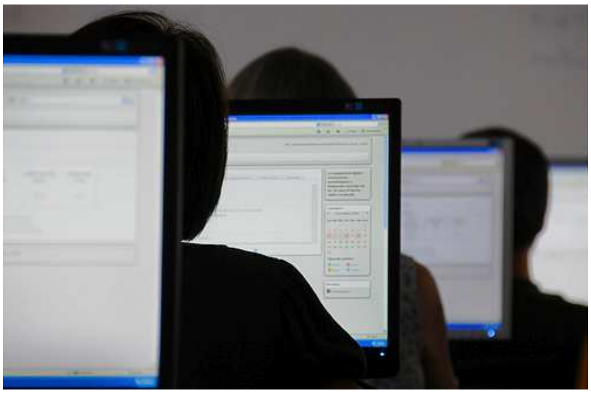


Imagen de Olga Diez en flickr bajo CC

Como la única forma de aprender es haciendo ejemplos vamos a ponerte un ejercicio resuelto para empezar y luego lo intentas tú.

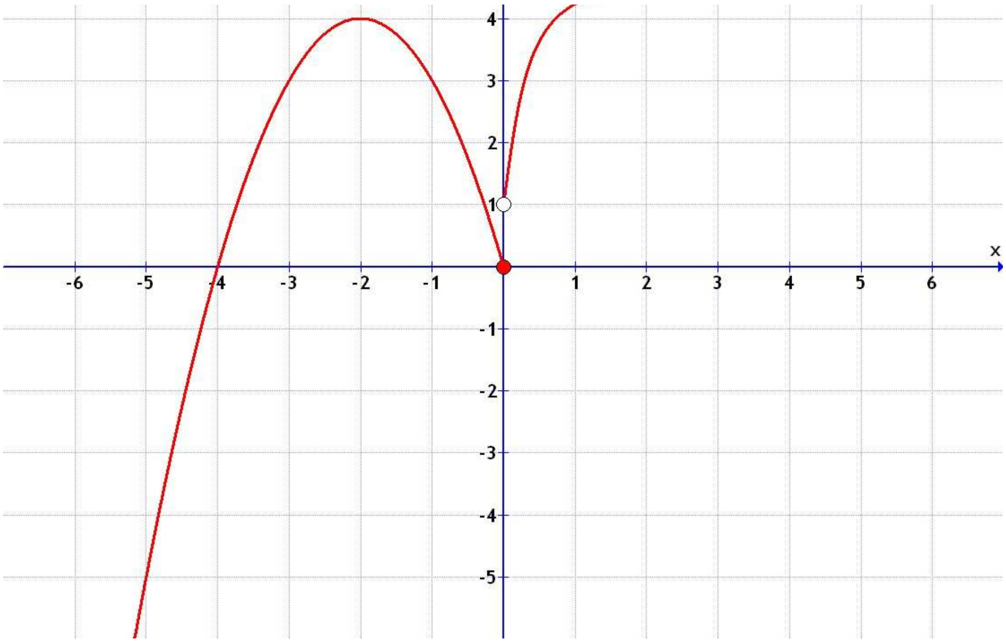
Importante

No sólo tienes que saber las características de la función, además **tienes que expresarlas correctamente.** Presta mucha atención en el ejemplo a la forma en que se escribe cada cosa que a veces es donde se cometen los errores.

Recuerda que la persona que te corrija el examen agradecerá enormemente que escribas con claridad, explicando las cosas. Por eso aunque no sepas hacer todo, intenta sacar partido de lo que sepas poniéndolo muy claro.

Ejercicio resuelto

Vamos a hacer el estudio de una función por la que se preguntó en el examen de septiembre de 2009. Aunque entonces no preguntaban por todas las características de la función nosotros sí vamos a estudiarlas todas.



1. DOMINIO
Recuerda que el dominio eran todas las x para las que existe función. En este caso son TODOS LOS NÚMEROS porque no hay ninguna x a la que no le corresponda una y. Aunque pueda parecer que en x= -6 la función se corta, no es así. Lo que pasa es que se nos escapa del dibujo, pero en realidad sigue bajando y bajando....Así que el dominio son todos lo números reales y eso lo escribimos así:

Dom f(x) = R

2. SIMETRÍAS
¿Al doblar por el eje y coinciden las dos mitades? ¿Y si giramos una parte de la gráfica sobre el origen? Para nada ¿verdad? Esta gráfica **no tiene simetrías.**

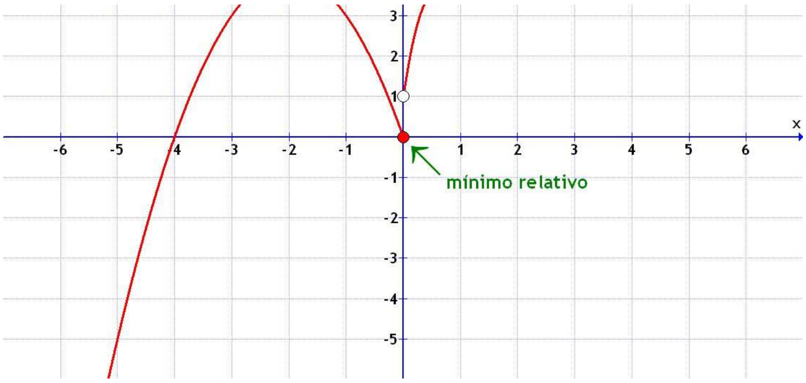
3. ACOTACIÓN
¿Existe algún valor de la y del que la función no pase por arriba? ¿y por abajo?

Por arriba está claro que sí ¿verdad? No pasa de y = 5. Por eso decimos que **f(x) está superiormente acotada por y=5**

Sin embargo por abajo la función baja y baja, así que **f(x) no está acotada inferiormente**.

4. MONOTONÍA (CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO) Y MÁXIMOS Y MÍNIMOS
Siempre empezamos por los máximos y mínimos, y para eso sólo hay que mirar la gráfica y escribir los puntos que están por encima o por debajo de los de alrededor:

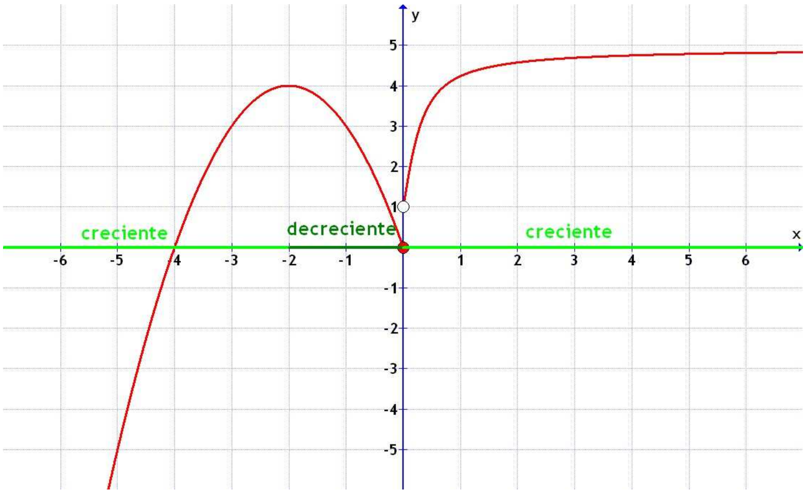
- **f(x) tiene un máximo relativo en el punto (-2,4).** Es relativo porque hay puntos que están más altos que él
- **f(x) tiene un mínimo relativo en el punto (0,0).** Igual este punto te resulta más raro porque hay un corte en la gráfica, pero en lo que te tienes que fijar es en que los puntos de la izquierda están más arriba. Y los de la derecha, aunque haya un corte, también. Por eso es un mínimo.



Pulsa sobre la imagen para ampliar

Para estudiar el crecimiento acuérdate que hay que ver cuándo la gráfica "sube" y cuando "baja". Eso es muy fácil ¿verdad? Pero ten en cuenta que para escribirlo tienes que dar los intervalos del eje de la x para los que eso sucede.

- **f(x) es creciente en (-∞, -2) y (0, ∞)**
- **f(x) es decreciente en (-2,0)**



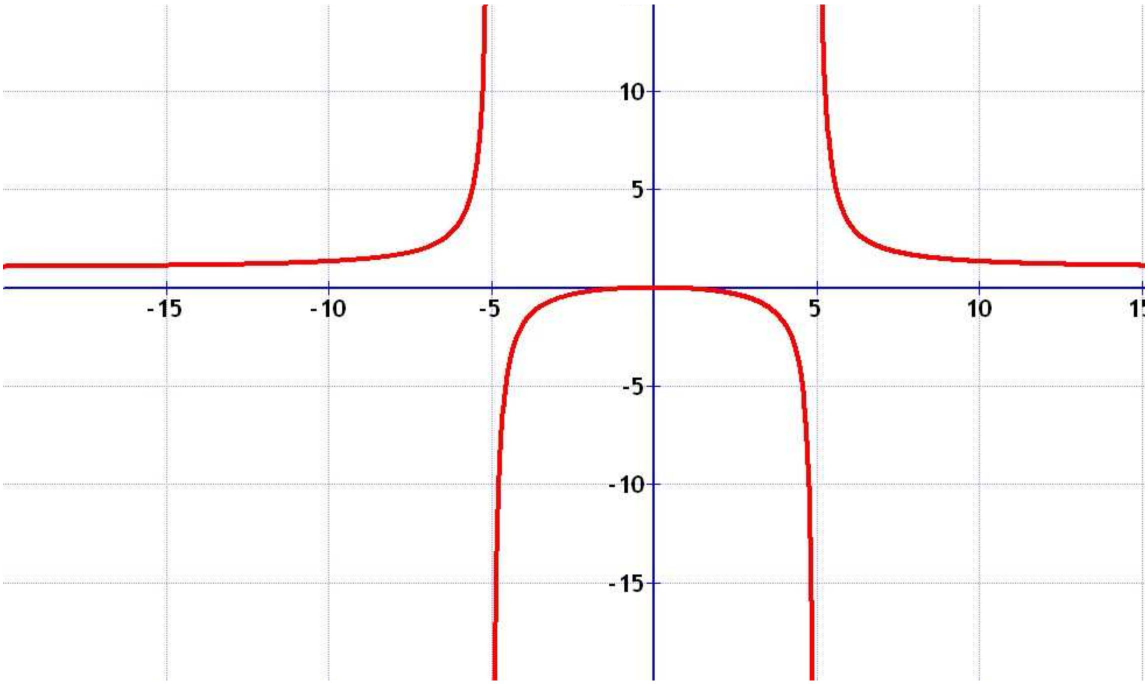
Pulsa sobre la imagen para ampliar

5. CONTINUIDAD

Esto te lo vamos a dejar a ti, que lo tienes reciente. Escríbelo en tu cuaderno y después comprueba la solución.

Reflexiona

Ahora te toca a ti estudiar todas las características de esta función. Coge tu cuaderno y escribe todo perfectamente. Luego miras las soluciones y las cosas que no tengas escritas igual, las corriges.



Pulsa sobre la imagen para ampliar

Para seguir practicando sobre todos los conceptos del tema en este enlace tienes unos cuantos ejercicios que se autocorrigen. Si no lo has entendido todo bien te recomendamos que los hagas. Los apartados que no hemos trabajado, sáltatelos.