INSTITUTO de ENSEÑANZAS a DISTANCIA de ANDALUCÍA

PAU

Mayores de 25 años

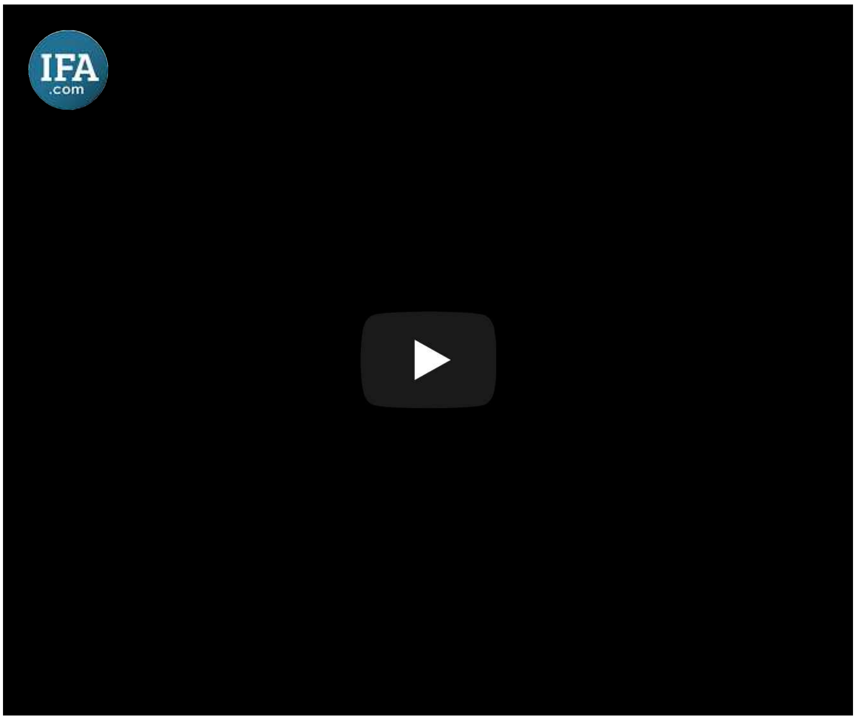
Contenidos

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales
Estadística y probabilidad: Variables aleatorias discretas

Sir Francis Galton fue un hombre polifacético y curioso que dedicó su vida al estudio de muy diversas ramas de las ciencias tanto naturales como sociales. A él debemos, entre otros conceptos matemáticos, la definición de correlación estadística.

También aportó grandes ideas a la aún incipiente teoría sobre la probabilidad de finales del siglo XIX. Por ejemplo, ideó una máquina, que consiste básicamente en un conjunto de clavos o pequeños cilindros distribuidos de forma triangular sobre un panel. Por la parte superior del triángulo se van soltando bolitas que irán sorteando los cilindros, cayendo hacia la derecha o izquierda de cada uno de ellos, realizando recorridos que vendrán condicionados por la probabilidad de caer a uno u otro lado de los clavos que se vayan encontrando.

En el siguiente vídeo puedes ver con más claridad una máquina de Galton de grandes dimensiones, y en qué consiste el experimento antes descrito.



Se puede apreciar que si, al impactar sobre cualquier clavo, la probabilidad de que una bola caiga hacia un lado u otro es igual a 0.5, el perfil con el que se van repartiendo las bolas en las cajas que hay en la parte inferior de la máquina, se distribuye de una forma muy similar cada una de las veces que se repite el experimento. De hecho, esos perfiles se aproximan a la curva que aparece representada en el cristal que recubre el aparato.

En este tema veremos que también se pueden asociar leyes y funciones a los experimentos aleatorios. Como dice el matemático y divulgador de la ciencia Ian Stewart en su libro "Historia de las matemáticas", al igual que Newton y sus sucesores dejaron claro que las matemáticas son una magnífica herramienta para modelizar las regularidades de la naturaleza, la teoría de la probabilidad, y su rama aplicada, la estadística, lo son para dar leyes a las irregularidades tanto de la naturaleza como del azar y multitud de fenómenos sociales.

Si quieres entender mejor la máquina de Galton y practicar con ella, haz clic en la siguiente imagen que te llevará a una simulación creada por el profesor **Manuel Sada**.

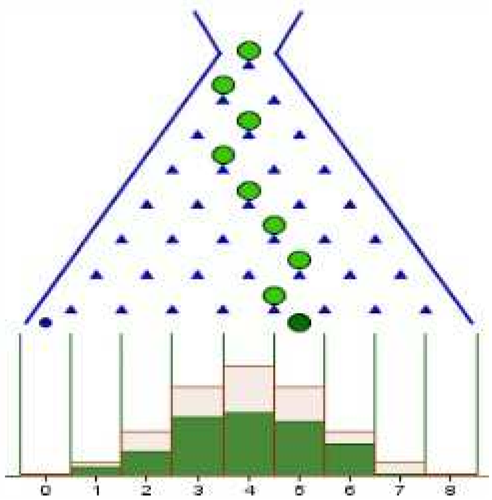


Imagen de elaboración propia

1.1. Definición

Es casi obligatorio jugar a los dados cuando se habla de probabilidad, de hecho se considera que el origen de esta rama de las matemáticas se encuentra en el deseo de encontrar reglas a este juego.

En la siguiente escena de GeoGebra creada por el profesor Jesús Fernández, se simula el lanzamiento de dos dados. Realiza varios lanzamientos y piensa un poco cuál será el **espacio muestral** que se obtiene.

Ejercicio resuelto

¿Cuál es el espacio muestral resultante del experimento de lanzar dos dados y fijarnos en sus caras superiores?

Mostrar retroalimentación

Seguro que has adivinado que el **espacio muestral,** si consideramos que no distinguimos los dados, es:

E={(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6) (4,4), (4,5), (4,6), (5,5), (5,6), (6,6)}

Del espacio muestral del ejercicio anterior vamos a fijarnos en la suma de los números que aparecen en los dados. A cada resultado obtenido le asociamos un número, la suma de las caras superiores. Si han salido los números 4 y 3, el suceso es (3, 4), y la suma sería 7.

A este tipo de aplicación se le denomina variable aleatoria.

Importante

Llamaremos **variable aleatoria**, X , a una aplicación que asocia un número real a

Comprueba lo aprendido

Imagen en Flickr de Catwomancristi bajo CC

Si X es la variable aleatoria que asocia la suma de las caras superiores al experimento aleatorio de lanzar dos dados, te pedimos que completes los huecos que aparecen en las siguientes afirmaciones.

a) X(5, 4) = $\square$

b) X($\square$, $\square$) = 2

c) X(3, 4) = X($\square$, 5) = X($\square$, 1) = 7

Enviar

El ejercicio es sencillo, por ejemplo X(5, 4) = 9, ya que la suma de 5 y 4 es 9. El resto de huecos no creemos que te cueste mucho completarlos.

No todas las variables aleatorias se aplican a un juego de azar, otras actúan sobre estudios estadísticos, por ejemplo, el tiempo de espera para una intervención quirúrgica. Observa la noticia del diario digital El Adelanto.com:

El Adelanto.com

El tiempo de espera medio para una operación se duplica en 2012

Salamanca, 19 de enero de 2013

4.489 pacientes aguardan a una intervención, 2.236 más que hace un año

El tiempo medio de espera para una intervención quirúrgica y el número de pacientes que aguarda a ser operado en Salamanca prácticamente se han duplicado en un año

Imagen de elaboración propia

El espacio muestral son los enfermos que se encuentran en lista de espera para una operación, y la variable aleatoria es la que asocia a cada enfermo el tiempo que tendrán que esperar.

En este caso, los valores que toma la variable aleatoria pueden ser **números decimales**, a diferencia de la suma de la puntuación obtenida al lanzar dos dados, que son **números enteros**.

Importante

Llamaremos variable aleatoria **continua** a la que toma valores en un intervalo de números reales.

El lanzamiento de los dos dados corresponde a una variable aleatoria discreta, en tanto que el tiempo de espera es de tipo continuo.

Este tema lo dedicaremos a las variables aleatorias discretas, dejando el siguiente para tratar las continuas.

Comprueba lo aprendido

En las variables aleatorias que se enuncian a continuación, elige si son continuas o discretas , según corresponda:

1. Número de pasajeros que han usado a lo largo de un día cierta línea urbana de autobuses.
Sugerencia

- Continua.
- Discreta.

¡Incorrecto!

¡Correcto!

Solution

1. Incorrecto
2. Opción correcta

2. Duración de determinadas bombillas halógenas.
Sugerencia

- Continua.
- Discreta.

¡Correcto!

¡Incorrecto!

Solution

1. Opción correcta
2. Incorrecto

3. Personas que viven en cada una de las casas de cierta urbanización.
Sugerencia

- Continua.

¡Correcto!

Solution

1. Incorrecto
2. Opción correcta

4. Tiempo de espera en una parada de autobús de una ruta interurbana.

Sugerencia

- Continua.
- Discreta.

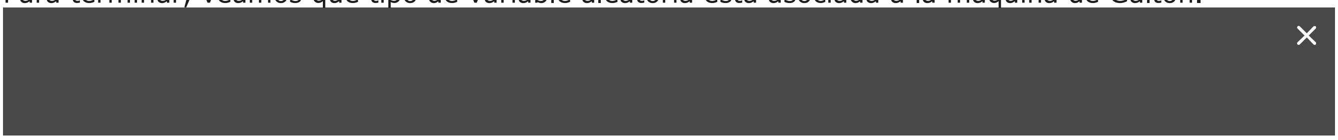
¡Correcto!

¡Incorrecto!

Solution

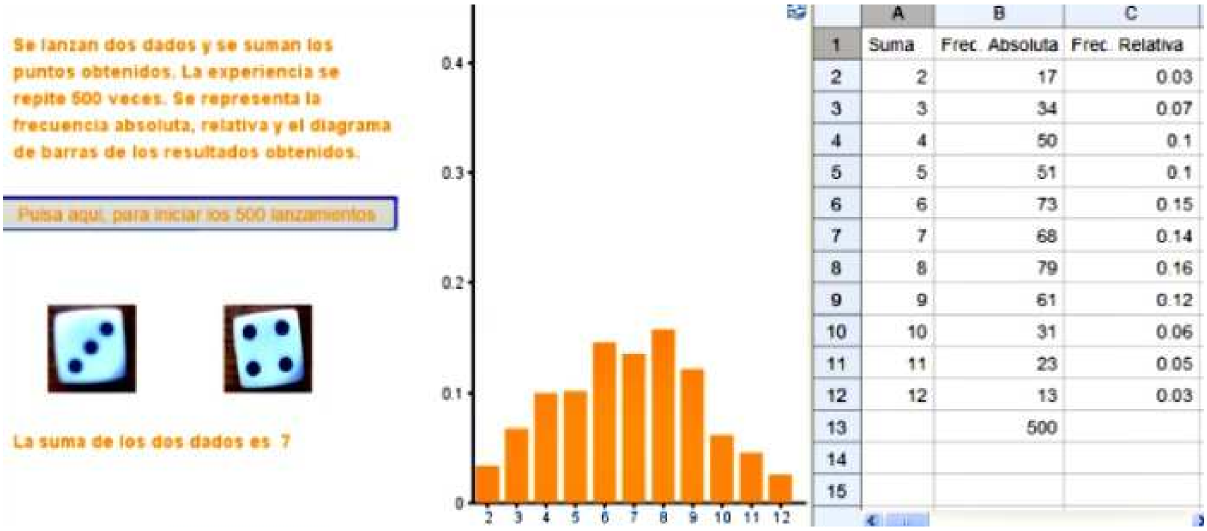
1. Opción correcta
2. Incorrecto

Para terminar, veamos qué tipo de variable aleatoria está asociada a la máquina de Galton.



Presentación de elaboración propia

Si haces clic en la siguiente imagen puedes acceder a una escena de GeoGebra donde se simula el experimento aleatorio del lanzamiento de dos dados y sumar los puntos obtenidos. La experiencia se repite 500 veces, y se van viendo los lanzamientos, las variaciones de las frecuencias absolutas y relativas, y los cambios en el diagrama de barras que corresponde a las frecuencias relativas.



	A	B	C
1	Suma	Frec. Absoluta	Frec. Relativa
2	2	17	0.03
3	3	34	0.07
4	4	50	0.1
5	5	51	0.1
6	6	73	0.15
7	7	68	0.14
8	8	79	0.16
9	9	61	0.12
10	10	31	0.06
11	11	23	0.05
12	12	13	0.03
13		500	
14			
15			

Imagen de elaboración propia

Recuerda, la variable aleatoria relacionada con la experiencia anterior es la que asocia a cada lanzamiento de dos dados, la suma de puntos. Dicha variable X toma los valores:

$$\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

que corresponde a los valores que pueden tomar las sumas.

En los 500 lanzamientos de la imagen anterior la suma 7 salió 68 veces, lo que le hace corresponder un frecuencia relativa de 0.14, en tanto que la suma 8 salió 79, por lo que tiene una frecuencia relativa de 0.16.

Pero los datos anteriores son solo 500 lanzamientos. Si repetimos la escena, saldrán otros valores distintos, pero a nosotros nos interesan las **probabilidades teóricas** asociadas a cada uno de los elementos de una variable aleatoria.

Importante

Llamaremos **distribución** de una variable aleatoria discreta X al conjunto formado por los valores que toma x_i y las probabilidades de que ocurran cada uno de ellos p_i.

Estas probabilidades, $p_i = p(X = x_i)$, también reciben el nombre de **función de probabilidad**, y cumplen las siguientes propiedades:

1. Son siempre positivas, es decir $p_i \geq 0$.
2. La suma de todas es igual a 1.

De la variable aleatoria del lanzamiento de dos dados, ya conocemos los x_i (distintos valores que pueden tomar las sumas de los dos dados). Ahora tenemos que calcular la función de probabilidad, es decir, la probabilidad de que al lanzar dos dados, la suma de sus caras sea igual a x_i: $p_i = p(X = x_i)$.

Nos ayudaremos de la tabla siguiente.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Aplicando la Ley de Laplace, casos favorables dividido entre casos posibles, obtenemos:

Valores de la variable	x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Frecuencias absolutas	n_i	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1
Probabilidad	$p_i = p(X = x_i)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/26

Puedes comprobar que la suma de los p_i es igual a 1, y evidentemente todos son mayores que 0.

Ejercicio resuelto

Realizamos el experimento aleatorio de lanzar tres monedas al aire, y definimos la siguiente variable aleatoria X = "número de caras que obtenemos".

Contesta a las siguientes cuestiones:

a. Describe los valores x_i que puede tomar la variable X .

b. Determina el espacio muestral, E.

c. Calcula la función de probabilidad, $p_i = p(X = x_i)$, de la variable X .

Imagen en Flickr de Jason Rogers bajo CC

Mostrar retroalimentación

a. Posibles valores de X son $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ o $x_4 = 3$, es decir, 0, 1, 2 o 3 caras respectivamente.

b. El espacio muestral obtenido al lanzar las tres monedas es:

E = {CCC, CCX, CXC, XCC, XXC, XCX, CXX, XXX}

c. Para calcular la función de probabilidad, $p(X = x_i)$, de la variable, debemos

$X = x_2 = 1$ cuando ocurre el suceso {XXC, XCX, CXX}.

$X = x_3 = 2$ cuando ocurre el suceso {CCX, CXC, XCC}.

$X = x_4 = 3$ cuando ocurre el suceso {CCC}.

Por tanto, la función de probabilidad es:

$$p_1 = p(X = x_1) = p(X = 0) = \frac{1}{8} = 0{,}125$$

$$p_2 = p(X = x_2) = p(X = 1) = \frac{3}{8} = 0{,}375$$

$$p_3 = p(X = x_3) = p(X = 2) = \frac{3}{8} = 0{,}375$$

$$p_4 = p(X = x_4) = p(X = 3) = \frac{1}{8} = 0{,}125$$

Importante

En una variable aleatoria discreta X, definiremos la **función de distribución** asociada a ella como

$$F(x) = p(X \leq x)$$

que asocia a cada número x, la probabilidad acumulada hasta él.

Las funciones de distribución de una variable aleatoria discreta son funciones definidas a trozos, donde los intervalos de definición de la función están comprendidos entre dos valores consecutivos de X.

Por ejemplo, en el caso del lanzamiento de las tres monedas que hemos visto anteriormente, como X = {0, 1, 2, 3}, los intervalos serán [0, 1), [1, 2), [2, 3) y [3, +∞).

- En [0, 1) la función tomará el valor correspondiente a una probabilidad de que X sea menor que 1, es decir:

$$F(x) = p(X < 1) = p(X = 0) = 0{,}125$$

- En [1, 2) la función sera igual a la probabilidad de que X sea menor que 2, es decir:

$$F(x) = p(X < 2) = p(X = 0) + p(X = 1) = 0{,}125 + 0{,}375 = 0{,}5$$

- En [2, 3):

$$F(x) = p(X < 3) = p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) = 0{,}125 + 0{,}375 + 0{,}375 = 0{,}875$$

- En [3, +∞):

$$F(x) = p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) + p(X = 3) = 0{,}125 + 0{,}375 + 0{,}375 + 0{,}125 = 1$$

La gráfica y expresión analítica de la función serían las siguientes:

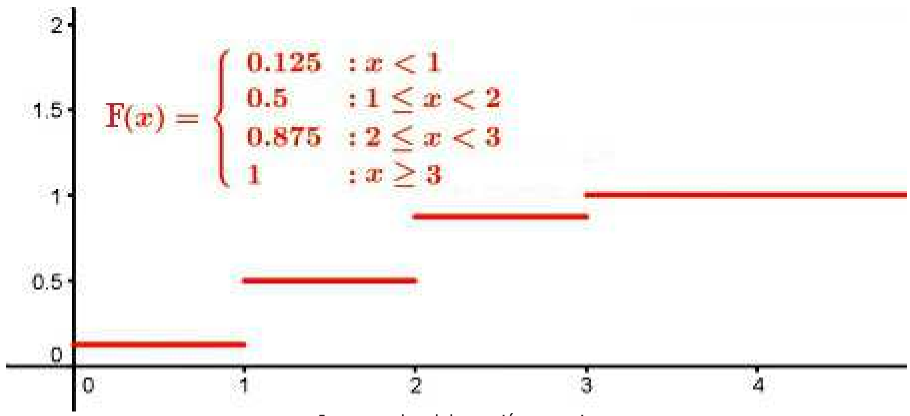
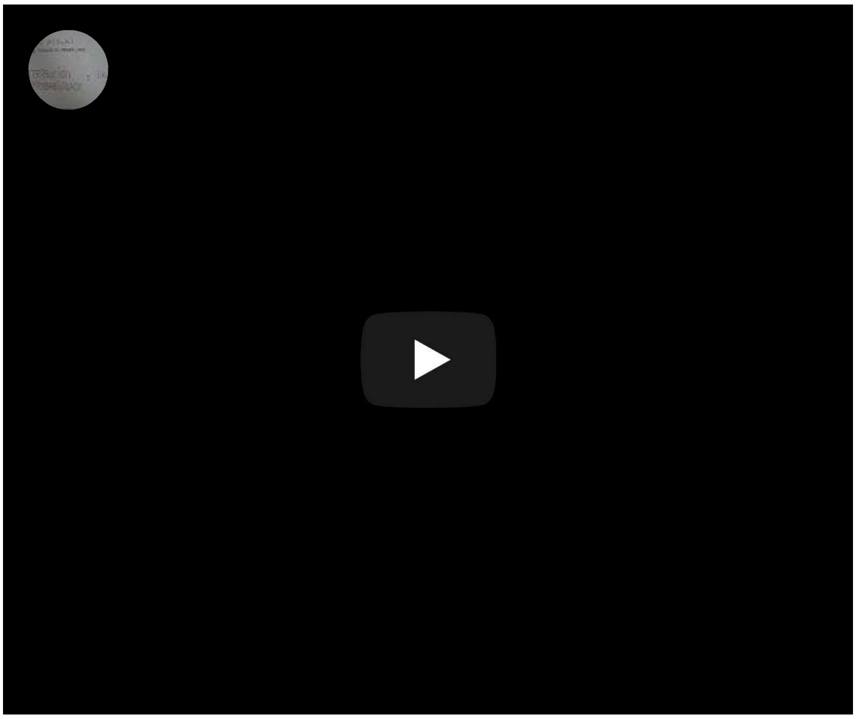


Imagen de elaboración propia

En el siguiente vídeo se hace un buen resumen de todos los conceptos estudiados hasta ahora de variable aleatoria. Está en gallego, pero se entiende con claridad.



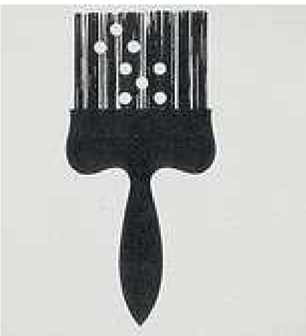


Imagen en Flickr
de Jordan Lloyd bajo CC

Como hemos podido ver en el apartado anterior, una distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta no es más que una idealización de una distribución estadística donde la **función de probabilidad** juega el papel de las **frecuencias relativas**.

Por ejemplo, en la simulación del lanzamiento repetido 500 veces de dos dados, obtuvimos que la frecuencia relativa de 8 era 0.16, en tanto que dedujimos que la función de probabilidad de 8 es $p(X=8)=\frac{5}{36}=0.138$

Al igual que ocurría con la distribuciones estadísticas, podemos hallar los parámetros de las distribuciones de probabilidad.

Importante

Cualquier variable aleatoria discreta X, que toma valores $x_i,\ i=1,\cdots,n$ y con función de probabilidad $p_i=p(X=x_i)$, tiene asociado los siguientes parámetros:

Media o **esperanza matemática**: $\mu=\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i$. También se representa como $E(X)$.

Varianza: $\sigma^2=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p_i-\mu^2$. Se representa también como $Var(X)$ o $V(X)$.

Desviación típica: $\sigma=\sqrt{\sigma^2}$. Llamada también $DT(X)$.

Estos parámetros son similares a los de un estudio estadístico, es decir, la esperanza se corresponde con la media y es una **medida de centralización** de la distribución de probabilidad, en tanto que la desviación típica lo es de la **dispersión**.

Ejercicio resuelto

Calcula los parámetros de la variable aleatoria asociada al experimento del lanzamiento de dos dados y sumar sus caras superiores.

Como ayuda te aportamos una tabla con las funciones de probabilidad y algunas columnas más que te facilitarán los cálculos.

3	0,056	0,167	0,500
4	0,083	0,333	1,333
5	0,111	0,556	2,778
6	0,139	0,833	5,000
7	0,167	1,167	8,167
8	0,139	1,111	8,889
9	0,111	1,000	9,000
10	0,083	0,833	8,333
11	0,056	0,611	6,722
12	0,028	0,333	4,000
		7,000	54,833

Imagen de elaboración propia

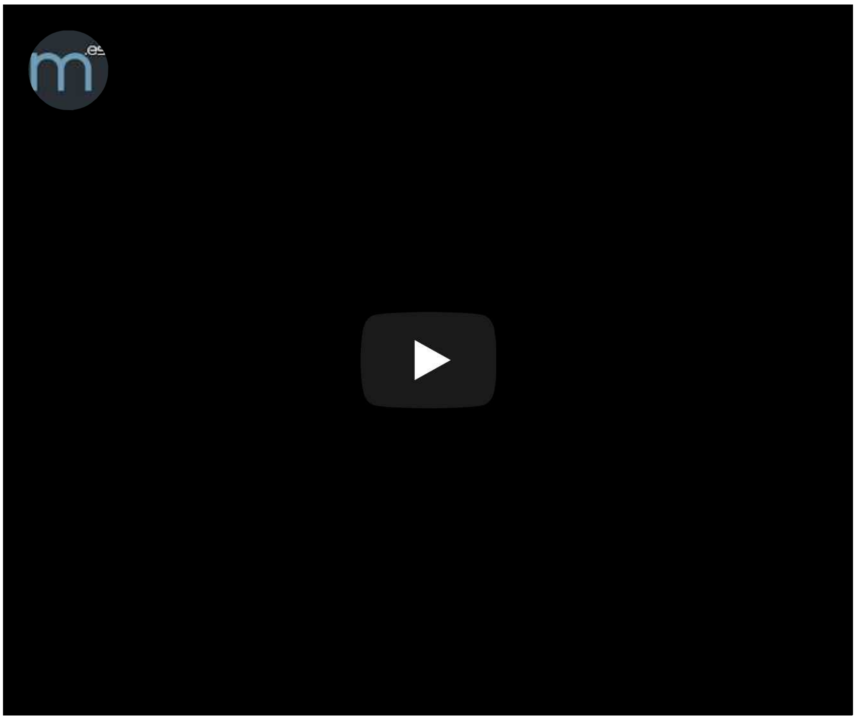
Mostrar retroalimentación

La suma de los $x_i \cdot p_i$ es igual a 7, lo que corresponde a la esperanza matemática: $\mu = 7$

La varianza es igual a la suma obtenida en la columna $x_i^2 \cdot p_i$, menos la esperanza al cuadrado. Es decir $\sigma^2 = 54.83 - 49 = 5.83$

Por último, la desviación típica es la raíz cuadrada de la varianza. Por tanto $\sigma = \sqrt{5.83} = 2.41$

En este vídeo del canal de juanmemol puedes ver de forma detallada cómo se calculan todos los parámetros de una función de probabilidad asociada a una variable aleatoria discreta.



¿Distribución bino... qué?

Sí, has leído bien, **distribución binomial**. Ese es el nombre de la variable aleatoria discreta más básica y conocida. Y no le faltan méritos para que sea así, ya que modeliza experimentos y situaciones de muy diversas procedencias.

Por ejemplo, qué tienen en común lanzar tres monedas al aire y saber la probabilidad de obtener dos cruces, o dejar caer una bola en una máquina de Galton de tres alturas y estudiar la probabilidad de que la bola vaya dos veces a la izquierda y una a la derecha.

Escena de Geogebra

¿Y qué tienen que ver esas situaciones con la probabilidad de que solo dos de los tres huevos puestos por un ave eclosionen?

En todas esas experiencias se repite una elección entre dos opciones: cara o cruz, izquierda o derecha, que eclosione o no el huevo. Y de ahí el término binomial, de tener que elegir entre dos opciones.

Éxito o fracaso, que entre o no la pelota, que sea niño o niña... La binomial está presente en nuestras vidas más de lo que podemos imaginar.

Rafael es investigador en la Estación Biológica de Doñana desde hace más de veinte años. La mayor parte de su tiempo y esfuerzo los ha dedicado a estudiar todos los factores relacionados con los procesos de reproducción de estas aves. Simplificando mucho el trabajo que realiza, lo que hace es más o menos lo que simula la siguiente escena de GeoGebra:

Rafael considera un éxito que un huevo llegue a eclosionar, y un fracaso todo lo contrario. Si repetimos muchas veces la simulación anterior, podemos ver que la probabilidad de que un huevo eclosione es de 0.66. Es la conclusión a la que ha llegado él después de todos esos años de observar y apuntar miles de nidos y puestas.

Conocer esa probabilidad le servirá para saber con bastante aproximación cuántos pollos de ánade real tendrán la oportunidad de salir sanos de su cascarón, en la próxima primavera.

Lanzar una moneda al aire, lado hacia el que caerá la bola en cada clavo de una máquina de Galton, futuro de un huevo de ánade. Todas las experiencias anteriores tienen características comunes: sus resultados son solo dos posibles y cada vez que las repetimos la probabilidad de cada unos de ellos es la misma e independiente del resultado obtenido en experiencias anteriores.

Importante

Llamaremos **distribución de Bernouilli** a una variable aleatoria discreta que solo puede tomar dos valores: 0 y 1.

En general el éxito se asocia con 1 y el fracaso con 0.

Se suele denotar como **Be(p)**, donde $p(X=1)=p$ es la probabilidad del éxito y $p(X=0)=q=1-p$ la del fracaso.

Sus parámetros son:

Esperanza matemática: $\mu=E(X)=p$

En la experiencia de lanzar la moneda, podemos considerar el éxito como sacar cruz, por tanto p=0.5 y la distribución será Be(0.5).

De igual manera, en la experiencia de hacia qué lado caerá la bola en un clavo de la máquina de Galton, podemos considerar éxito que caiga hacia la izquierda, p=0.5 y estaremos también en una Be(0.5).

Comprueba lo aprendido

La variable aleatoria definida por la experiencia de tomar un huevo de ánade real y asociar éxito a que llegue a eclosionar y fracaso a que no lo haga, es del tipo Bernouilli.

Completa las siguientes frases:

Es una Bernouilli del tipo Be(____).

p(X=0) = ____ .

La varianza es igual a ____ .

Enviar

Recuerda, en esta experiencia la probabilidad de éxito es p = 0.66, y por tanto la de fracaso es q = 1-p = 0.34. Por tanto la varianza es p·q = 0.66·0.34 = 0.22.

Ejercicio resuelto

Imagen en Flickr de Nina bajo CC

Una urna contiene 2 bolas amarillas y 6 bolas blancas. Introducimos la mano en ella y sacamos una bola. Vemos si es amarilla y la introducimos de nuevo en la urna.

¿Es un experimento de tipo Bernouilli? En caso afirmativo, ¿cuál sería el éxito y cual el fracaso?

¿Cúal es la probabilidad de sacar una bola amarilla? ¿Y de sacar una blanca?

Mostrar retroalimentación

Es un experimento de tipo Bernouilli ya que solo pueden darse dos resultados: o

Una distribución de tipo Bernouilli viene caracterizada por el valor p de la probabilidad de obtener éxito. Vamos a obtener ese valor:

p("sacar una bola amarilla") = 2/8 = 0.25 = p(Éxito)

Así, estamos ante una distribución: Be(0.25)

p("sacar bola amarilla") = p(Éxito) = p(X=1) = 0.25

p("sacar bola blanca") = p(Fracaso) = p(X=0) = 1 - 0.25 = 0.75

Comprueba lo aprendido

Indica en cada una de las situaciones siguientes cuál es la respuesta correcta:

1. Estamos realizando un control de calidad y tenemos un lote de tornillos fabricados por una máquina de la que sabemos que produce un 3 % de tornillos defectuosos. Realizamos la experiencia de elegir un tornillo al azar del lote.

- No es una distribución Bernouilli ya que la probabilidad de éxito, que el tornillo sea defectuoso, es muy baja.
- Cumple todas las condiciones para ser Bernouilli. Solo hay dos opciones: éxito (que el tornillo sea defectuoso) y fracaso (que no lo sea), o viceversa.
- No es Bernouilli ya que éxito sería que no fuese defectuoso.

No es correcto. La probabilidad baja no es motivo para no ser Bernouilli.

Has elegido la opción correcta.

No es correcta tu elección, la etiqueta éxito es completamente independiente de lo que se considere éxito en el contexto de la experiencia. De hecho, éxito y fracaso son etiquetas completamente intercambiables.

Solution

1. Incorrecto
2. Opción correcta
3. Incorrecto

2. En una asignatura hay 24 estudiantes matriculados. Al final del curso han suspendido 6 alumnos. Se elige un alumno al azar y nos preguntamos por la probabilidad de que haya aprobado.

- No es Bernouilli, ya que al repetir la experiencia, la probabilidad de que el alumno haya aprobado está condicionada por el tipo de alumno que se ha elegido en la primera extracción.
- Es Bernouilli ya que el éxito es aprobar y el fracaso es suspender.
- No es Bernouilli, porque para que sea de este tipo de distribución las probabilidades de éxito y fracaso deben ser iguales a 0.5.

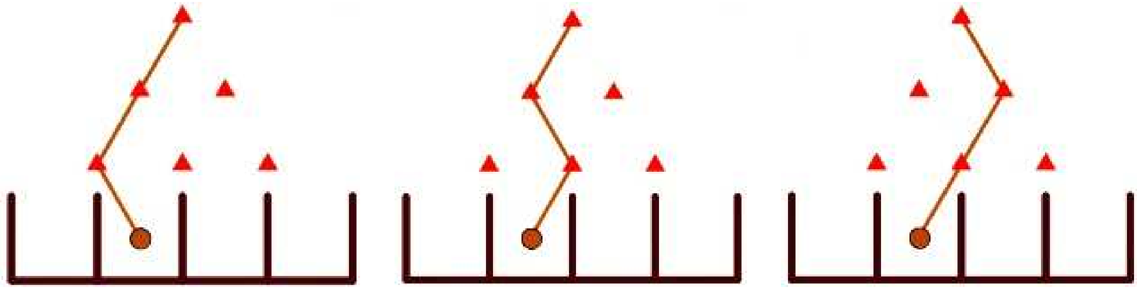
Has elegido la opción correcta, ya que la probabilidad tanto de éxito como de fracaso van variando en las sucesivas elecciones de alumnos.

No es correcto. Aunque es cierto que no es Bernouilli, no es ese el motivo. En absoluto en una Bernouilli las probabilidades de éxito y fracaso deben ser iguales. Por ejemplo, el caso de los huevos de las ánades reales.

Solution

1. Opción correcta
2. Incorrecto
3. Incorrecto

¿En una máquina de Galton de tres alturas, cuántos son los recorridos posibles en los que la bola cae dos veces a la izquierda y una a la derecha?



Imágenes de elaboración propia

Son tres y podríamos sintetizarlos como I-I-D, I-D-I y D-I-I. Expresado de otro modo, que las dos izquierdas sean en los pasos 12, 13 ó 23.

¿De cuántas formas nos pueden salir dos cruces si lanzamos tres monedas?

Imágenes de elaboración propia

¿Qué casualidad, también son tres? Y podríamos representarlos de forma esquemática como XXC, XCX y CXX. O en función del lugar que ocupan las cruces: 12, 13 y 23.

Se repite el esquema de la máquina de Galton.

En el caso de que fuera una máquina de cuatro alturas y nos hiciéramos la misma pregunta, ¿cuántos son los recorridos posibles en los que la bola cae dos veces a la izquierda y dos a la derecha?, tendríamos las siguientes posibilidades:

IIDD	IDID	IDDI	DIID	DIDI	DDII
12	13	14	23	24	34

Es decir, 6 recorridos. Si nos fijamos en la fila inferior, hemos escrito **todas las formas posibles de agrupar 4 números de 2 en 2**.

Ejercicio resuelto

Lanzamos cinco monedas al aire y nos preguntamos de cuántas formas nos pueden salir dos cruces.

Mostrar retroalimentación

El truco está en ser ordenados e ir escribiendo, por ejemplo, en primer lugar las dos cruces y después permutar las posiciones.

XXCCC, XCXCC, XCCXC, XCCCX, CXXCC, CXCXC, CXCCX, CCXXC, CCXCX, CCCXX.

Si escribimos las 10 posibles formas de que salgan 2 cruces al lanzar 5 monedas, en función del lugar que ocupan, nos quedaría: 12, 13, 14, 15, 23, 24, 25, 34, 35 y 45. Que no son más que todas las formas posibles de agrupar **5 números tomados de 2 en 2**.

Hasta ahora hemos hallado "**las formas de agrupar m números tomados de n en n**", a mano. Pero si n y m son grandes, esa labor puede ser tediosa y casi agotadora.

Importante

Llamaremos **combinaciones de m elementos tomados de n en n** al número de agrupaciones posibles de esos m elementos formadas por n de ellos.

Las denotaremos como $C_{m,n}$, C_m^n o $\binom{m}{n}$. A esta última expresión también se le llama **número combinatorio de m sobre n**.

Calcularemos el número de combinaciones de m elementos tomados de n en n, usando la siguiente fórmula:

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n! \cdot (m-n)!}$$

Donde $m!$ se denomina **factorial de m**, y se calcula como $m! = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$

Apliquemos las definiciones anteriores a las posibles formas de obtener 2 cruces al lanzar 5 monedas. Ya sabemos que son 10, e incluso las hemos descrito:

12, 13, 14, 15, 23, 24, 25, 34, 35 y 45

Pero vamos a usar los números combinatorios para hallar su número.

Lo que queremos calcular es el número de formas en que podemos agrupar 5 elementos tomados de 2 en 2, es decir $C_{5,2} = \binom{5}{2}$

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \cdot (5-2)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 10$$

Imagen en Flickr de Leo Reynolds bajo CC

¡Uf, qué lío! Menos mal que las nuevas tecnologías nos alivian de la tediosa y pesada carga de factoriales y multiplicaciones.

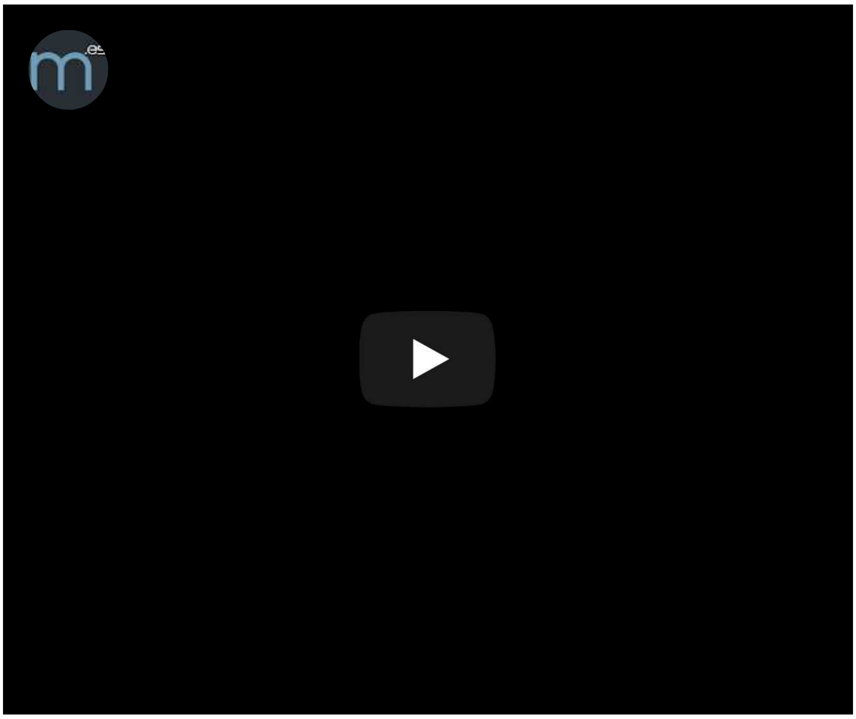
Por ejemplo, con una calculadora científica de las actuales es posible hallar el factorial de un número o calcular números combinatorios. En las imágenes inferiores se puede apreciar cómo calcular $6!$ o $\binom{9}{4}$ con la **fx-82ES** de Cassio.

Imágenes de elaboración propia

Ejercicio resuelto

En una carrera participan 11 corredores, y se entregan 100 euros a los tres primeros clasificados. ¿Cuántos repartos distintos podrían hacerse?

Mostrar retroalimentación



Si haces clic en la siguiente imagen podrás acceder una la página del Proyecto Descartes del MECD con escenas que permiten calcular fácilmente factoriales de números y números combinatorios.

Imagen de elaboración propia

Reflexiona

En una clase de 24 estudiantes queremos seleccionar un grupo de seis para que representen a la clase en un concurso de elaboración de figuras geométricas, que se realizará en el Instituto con motivo de la semana de la ciencia.

siempre a ellos?

Mostrar retroalimentación

a) Se trata de combinaciones de 24 elementos (estudiantes) tomados de 6 en 6.

Es decir:

$$C_{24,6} = \binom{24}{6} = \frac{24!}{6! \cdot (24-6)!} = 134.596$$

134.596 maneras de formar el grupo.

b) Si ahora consideramos que esa alumna debe estar de manera fija, nos quedará una clase con 23 elementos (estudiantes) y queremos tomarlos de 5 en 5 (porque al estar la alumna, ya formaría grupo de 6)

Es decir:

$$C_{23,5} = \binom{23}{5} = \frac{23!}{5! \cdot (23-5)!} = 33.649$$

33.649 maneras de formar el grupo.

Comprueba lo aprendido

Realiza las siguientes actividades. Puedes optar por hacerlas con la calculadora o con las escenas de Descartes, pero sería interesante que previamente reforzaras los cálculos de factoriales y números combinatorios con bolígrafo y papel.

Una vez realizada deberás elegir, en cada caso, una de las tres opciones propuestas:

1. 10! =

- 100
- 1.000.000
- 3.628.800

No es correcto. Revisa tus cálculos y prueba otra vez.

No es correcto. Revisa tus cálculos y selecciona otra opción.

Has elegido la opción correcta.

Solution

1. Incorrecto
2. Incorrecto
3. Opción correcta

2. $\binom{7}{2} =$

14

No es correcto. Revisa tus cálculos y prueba otra vez.

Has elegido la opción correcta.

No es correcto. Revisa tus cálculos e inténtalo de nuevo.

Solution

1. Incorrecto
2. Opción correcta
3. Incorrecto

3. Tenemos cuatro botes de pintura cada uno de un color: azul, blanco, rojo y verde. ¿Cuántas mezclas de pinturas de 2 colores podemos hacer?

Sugerencia

- $\binom{6}{2}=6$ mezclas.
- $\binom{4}{2}=6$ mezclas.
- $\binom{2}{4}=6$ mezclas.

No es correcto. Revisa tus cálculos y prueba otra vez.

El número de mezclas que podemos hacer sí coincide pero el número combinatorio no.

Has elegido la opción correcta.

Combinaciones de 4 colores tomados de 2 en 2.

No es correcto.

El número de mezclas sí coincide, pero el número combinatorio no.

Solution

1. Incorrecto
2. Opción correcta
3. Incorrecto

4. $\binom{8}{0}-\binom{8}{8}+\binom{7}{2}-\binom{7}{5}$

Sugerencia

- 1.000.000
- 1
- 0

No es correcto. Revisa tus cálculos y selecciona otra opción.

No es correcto. Revisa tus cálculos y selecciona otra opción.

Has elegido la opción correcta.

Solution

1. Incorrecto
2. Incorrecto
3. Opción correcta

A Rafael, el investigador de la Estación Biológica de Doñana se le plantea el siguiente problema, de los diez huevos que han tenido Daisy y Donald este año, ¿cuántos polluelos saldrán adelante? ¿qué probabilidad hay de que, como ocurrió el año pasado, al menos ocho eclosionen?

Recuerda, los estudios de Rafael han llegado a la conclusión de que la probabilidad de que un huevo eclosione es de 0.66.

Vamos a ayudar a Rafael.

En primer lugar vamos a estudiar **cuál es la probabilidad de que de los 10 huevos, solo eclosionen 8**. Empezaremos numerando los huevos del 1 al 10, y viendo de cuántas maneras puede ocurrir lo anterior. La siguiente escena nos puede ayudar.

Puedes ver que las diferentes formas en que puedes eclosionar 8 de los 10 huevos anteriores no son más que las combinaciones de 10 elementos tomados de 8 en 8. Es decir:

$$C_8^{10} = \binom{10}{8} = \frac{10!}{8!\cdot 2!} = \frac{10\cdot 9}{2\cdot 1} = 45$$

Es decir, 45 formas diferentes de que eclosionen 8 y 2 no.

La probabilidad de cada una de esas formas diferentes es igual a $0.66^8 \cdot 0.34^2$, ya que el que cada huevo eclosione o no, es independiente de que lo hagan los demás.

Por tanto, la probabilidad de que 8 de los 10 huevos eclosionen será igual a:

$$p(X=8) = \binom{10}{8} \cdot 0.66^8 \cdot 0.34^2 = 45 \ \ 0.036 \ \ 0.115 = 0.187$$

De la misma manera podemos ir calculando la probabilidad de que eclosionen 0, 1, 2,..., 7 huevos. Y así sabremos cuál es la probabilidad de que al menos 8 lo hagan.

A una distribución con características similares a las situaciones que hemos planteado con la eclosión de los huevos, el lanzamiento de las monedas o la máquina de Galton se la denomina **Binomial**.

Importante

Diremos que una distribución X es **binomial**, si cumple las siguientes características.

1. Es un experimento aleatorio que se repite **n veces** de modo independiente.
2. Cada vez que se realiza el experimento solo pueden darse dos sucesos al estilo de la Bernouilli, **éxito** o **fracaso**.
3. **La suma** de las probabilidades del éxito y fracaso **debe ser 1**. Normalmente **p**

La distribución la denotaremos por X es B(n,p).

Su **función de probabilidad** es:

$$p(X=k) \;=\; \binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$$

Donde k es el número de éxitos de los queremos conocer la probabilidad. Por tanto k puede tomar los valores 0, 1, 2,..., n.

Ejercicio resuelto

Termina de ayudar a Rafael, el investigador de Doñana, y halla las sucesivas probabilidades de que eclosionen 0, 1, 2,... y 7 huevos. Para terminar, halla la probabilidad de que eclosionen al menos 8 huevos.

Está claro que estamos antes una B(10, 0.66).

Mostrar retroalimentación

Te ayudaremos a calcular dos de las probabilidades que se piden, el resto tendrás que hacerlas tú.

Hallaremos la probabilidad de que eclosionen 2 y 6 huevos.

$$p(X=2) \;=\; \binom{10}{2}\cdot 0.66^2\cdot(0.34)^8 = 45\cdot 0.435\cdot 0.0001 = 0.0035$$

$$p(X=6) \;=\; \binom{10}{6}\cdot 0.66^6\cdot(0.34)^4 = 210\cdot 0.189\cdot 0.013 = 0.2319$$

La suma que se nos pide es $p(X\leq 8) = 0.9035$

Vamos a estudiar las probabilidades de una máquina de Galton de 8 alturas.

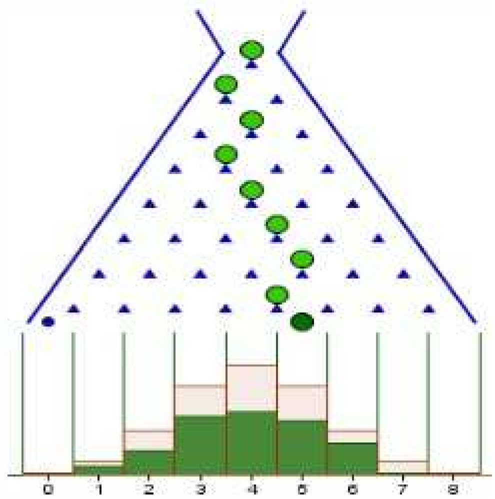


Imagen de elaboración propia

Repasemos si cumple las condiciones para ser una distribución binomial. El experimento se repite 8 veces y son independientes, los resultados son izquierda (éxito) o derecha (fracaso) y la suma de sus probabilidades es 1, ya que ambos tienen probabilidad 0.5.

Estamos ante una distribución X , binomial **B(8, 0.5)**.

Calcularemos $p(X=k)$, es decir que la bola en su recorrido haya ido k **veces a la izquierda y** $8-k$ **veces a la derecha**, donde k = 0, 1,... , 8.

$$\begin{aligned}
p(X=0) &= \binom{8}{0} \cdot 0.5^0 \cdot 0.5^8 = 1 \cdot 1 \cdot 0.0039 = 0.0039 \\
p(X=1) &= \binom{8}{1} \cdot 0.5^1 \cdot 0.5^7 = 8 \cdot 0.5 \cdot 0.0078 = 0.0312 \\
p(X=2) &= \binom{8}{2} \cdot 0.5^2 \cdot 0.5^6 = 0.1094 \\
p(X=3) &= \binom{8}{3} \cdot 0.5^3 \cdot 0.5^5 = 0.2188 \\
p(X=4) &= \binom{8}{4} \cdot 0.5^4 \cdot 0.5^4 = 0.2734 \\
p(X=5) &= \binom{8}{5} \cdot 0.5^5 \cdot 0.5^3 = 0.2188 \\
p(X=6) &= \binom{8}{6} \cdot 0.5^6 \cdot 0.5^2 = 0.1094 \\
p(X=7) &= \binom{8}{7} \cdot 0.5^7 \cdot 0.5^1 = 0.0312 \\
p(X=8) &= \binom{8}{8} \cdot 0.5^8 \cdot 0.5^0 = 0.0039
\end{aligned}$$

Si construimos una tabla con las funciones de probabilidad, obtendremos la siguiente gráfica.

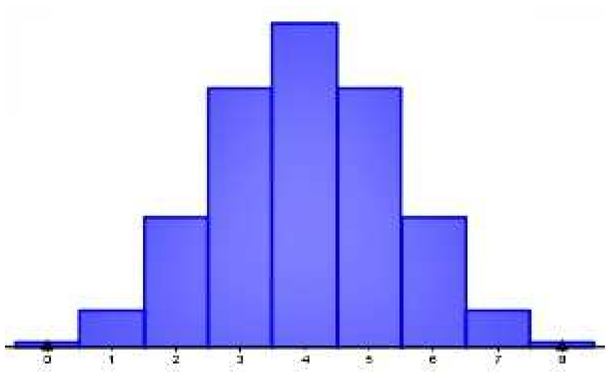


Imagen de elaboración propia

Se puede apreciar que la gráfica es simétrica y se concentra en la probabilidad de 4 izquierdas y 4 derechas. ¿Recuerdas cómo se distribuían las bolas en las diferentes repeticiones de la máquina de Galton en el vídeo del principio del tema?

Comprueba lo aprendido

Se lanzan 8 monedas al aire, y queremos saber cuál es la probabilidad de obtener más de 3 cruces.

Completa los siguientes espacios en blanco para dar una solución al problema

La variable aleatoria es una ____ , ya que el lanzamiento de una moneda se repite ____ veces, y son experimentos ____ . Los resultados que se obtienen son cruz (____) o ____ (fracaso), con probabilidad igual a ____ cada uno de ellos, por tanto su suma es ____ .

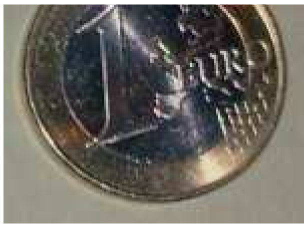


Imagen de elaboración propia

Por lo que estamos ante un variable X donde n = ____ y p = ____ . Es decir, del mismo tipo que la experiencia de Galton anterior.

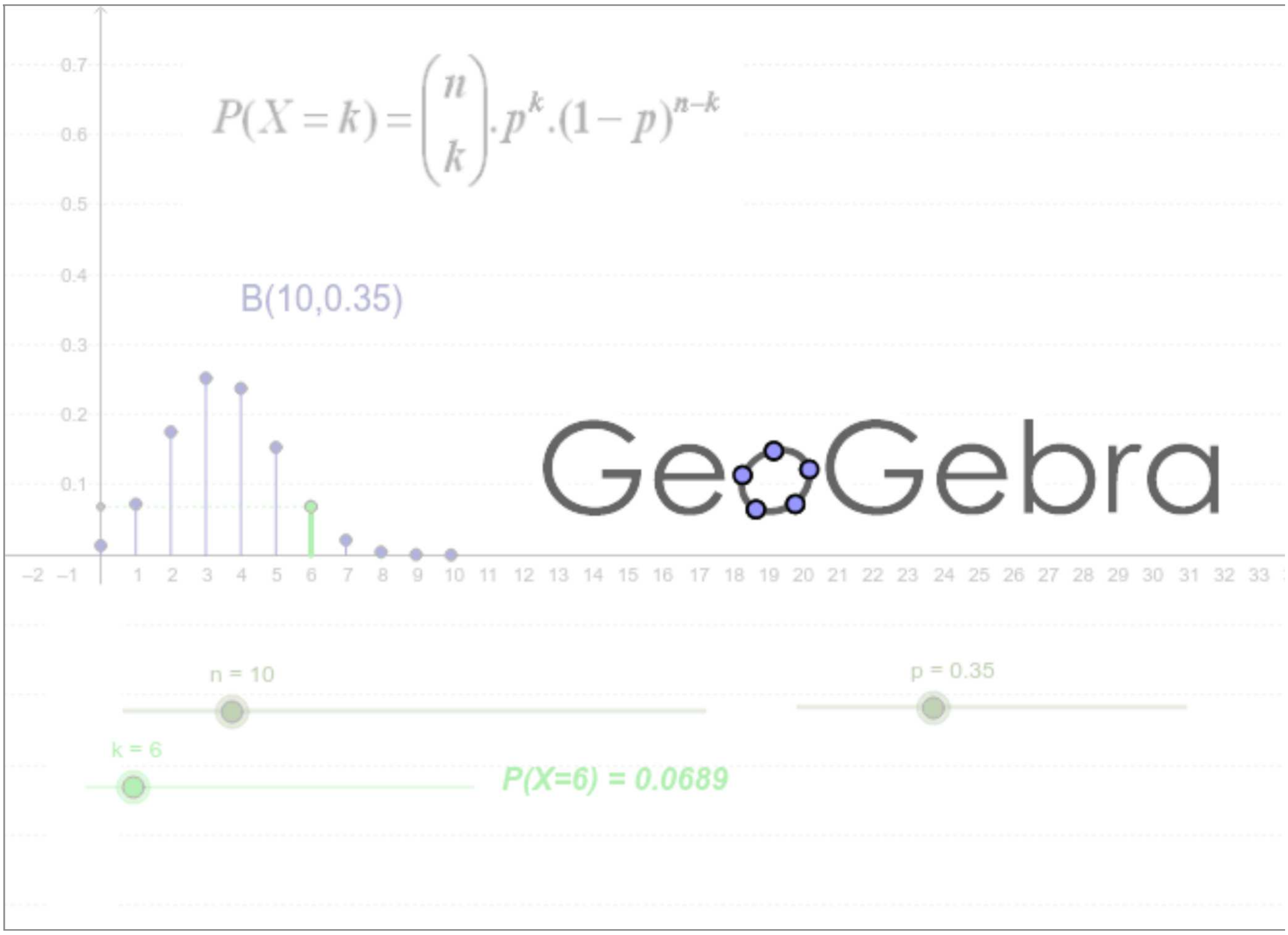
Queremos calcular p(X ____ 3). Podríamos ir sumando los valores de la función de ____ que hallamos en la máquina de Galton, pero es más corto hacer lo siguiente.

Los sucesos "obtener más de 3 cruces" y "obtener 3 o menos cruces" son complementarios, por tanto la suma de sus probabilidades es 1.

Entonces p(X>3) = ____ − p(X≤3) = 1 − (p(X= ____)+p(X=1)+p(X=2)) = 1 (0.0039 + ____ + 0.1094) = 1 - 0.1445 = ____ .

Enviar

En la siguiente escena de Geogebra podemos calcular probabilidades de una distribución binomial de una manera simple. Basta con que demos los valores p, n y k correspondientes.



Comprueba lo aprendido

En todos los apartados de este ejercicio consideraremos que tenemos una distribución binomial, **B(5;0.2)**

Con la ayuda de la escena anterior, o bien realizando los cálculos de manera manual, calcula las probabilidades indicadas y selecciona Verdadero o Falso según corresponda.

1. p(X=3)= 0,0512

Sugerencia

Verdadero Falso

Verdadero

Es Verdadero.

Basta configurar en la escena los siguientes valores: p=0,2; n=5 y k=3.

2. p(X=6)= 0,4

Verdadero Falso

Falso
Es falso.

¡No se puede calcular, porque es imposible obtener k=6 éxitos al realizar n=5 experimentos!

3. p(X≤3)=0,72

Sugerencia

Verdadero Falso

Falso
Es falso.

Por definición de Función de Distribución de una variable aleatoria discreta tenemos que: "la probabilidad de que X sea menor o igual que 3 es igual a la suma de las probabilidades de los valores menores o iguales que 3", es decir,

P(X≤3)= P(X=3) + P(X=2) + P(X=1) + P(X=0) = 0,0512 + 0,2048 + 0,4096 + 0,32768 = 0,99328

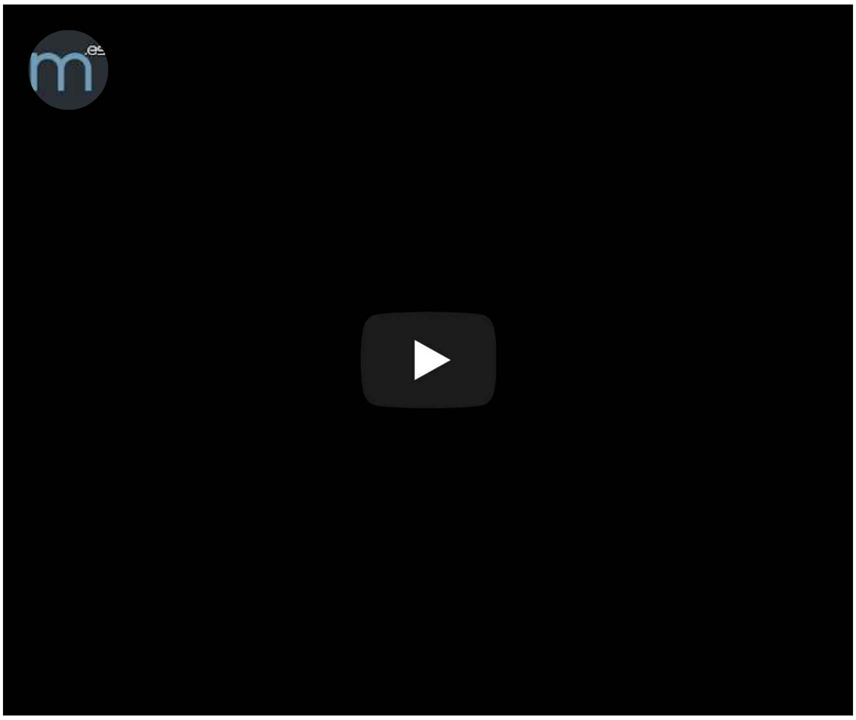
Importante

Si X es una variable aleatoria binomial, B(n,p), tendremos que:

Su **esperanza matemática** o media es $\mu = E(X) = n \cdot p$

La **varianza** es $\sigma^2 = Var(X) = n \cdot p \cdot q$

En el siguiente vídeo del canal de **juanmemol** puedes ver cómo hallar la esperanza y la desviación típica de una variable aleatoria binomial:



3. Apéndice

Tras un primer tema dedicado al cálculo de probabilidades, en este se ha introducido la idea de variable aleatoria y en concreto se ha desarrollado el de variable discreta. Este concepto junto con los de función de probabilidad y distribución implican un intento de sistematizar y formalizar la probabilidad.

Los casos más básicos y conocidos de variables aleatorias discretas son la Bernouilli y su hermana mayor, la Binomial. A conocerlas y presentar ejemplos que se distribuyen según ellas está dedicada la mayoría de los contenidos del tema.

Una herramienta necesaria para hallar la probabilidad de experimentos aleatorios que se ajustan a la binomial es la de los números combinatorios, por lo que hay un apartado donde se desarrollan de una manera cercana y básica.

Importante

En el siguiente mapa conceptual se trazan las líneas fundamentales de los conceptos que se han tratado a lo largo del tema.

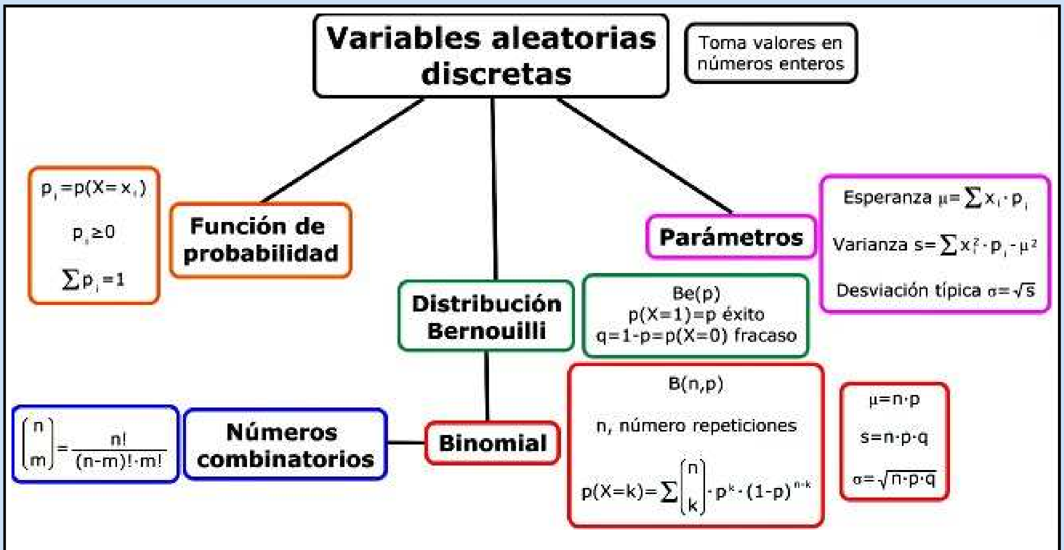
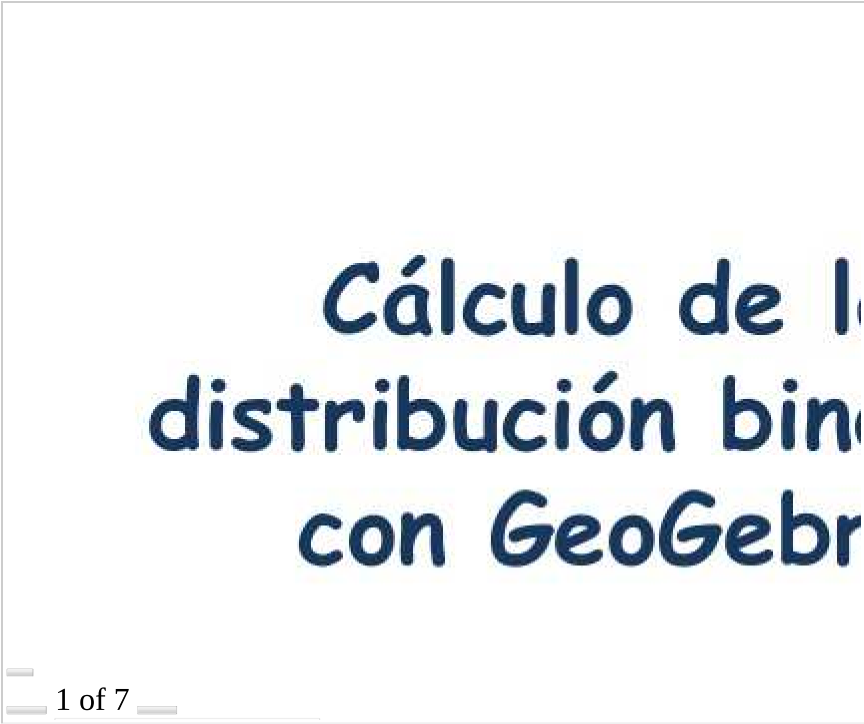


Imagen de elaboración propia. Haz clic en ella para ampliar

Existen multitud de herramientas informáticas que nos facilitan los cálculos necesarios para hallar probabilidades de la distribución binomial, sobre todo en lo referente a las operaciones tan pesadas con los números combinatorios.

Con GeoGebra también es posible hallar probabilidades de la binomial:



Por último, todas las hojas de cálculo incluyen fórmulas que facilitan el cálculo de probabilidades de las diferentes variables aleatorias. En la imagen inferior podemos ver la fórmula y el resultado de la probabilidad usando la correspondiente función de Excel.

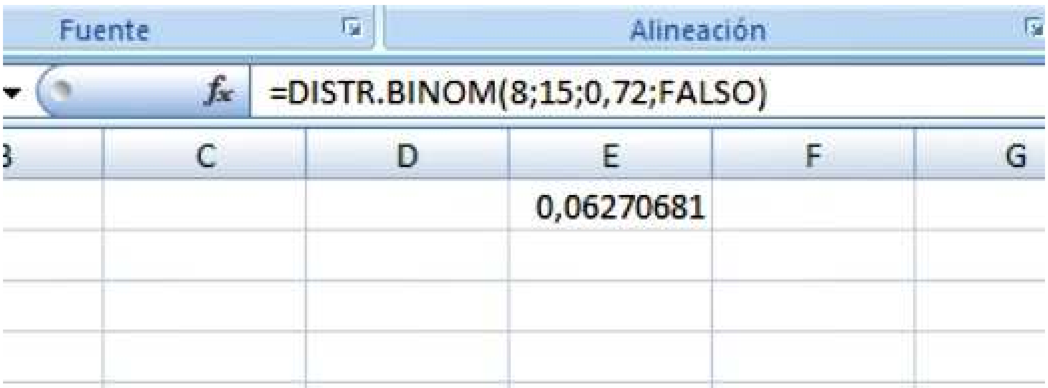


Imagen de elaboración propia

La binomial es B(15, 0.72), y con la función DISTR:BINOM se ha calculado $p(X=8)$. El último parámetro es FALSO, para indicar que se pide solo la probabilidad de 8, no la acumulada hasta 8.

Curiosidad

Imagen en Wikimedia Commons de Materialscientist bajo Dominio Público

Los números combinatorios tienen una larga historia. Ya, hacia 950, en un libro indio llamado Chandas Sastra, se los menciona.

También los utiliza el matemático suizo Jacobo Bernouilli en el considerado primer tratado moderno sobre probabilidad, su libro **Ars Conjectandi**, escrito en 1713.

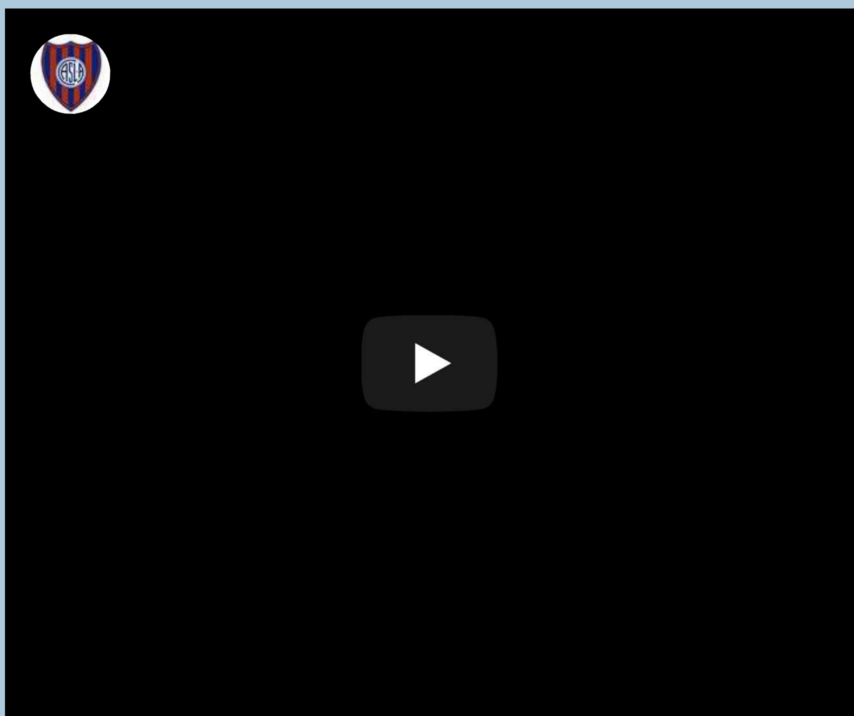
La distribución que hemos estudiado en este tema, debe su nombre a Jacobo. Es necesario dar su nombre, ya que los Bernouilli son una de las sagas familiares más importantes y creadoras en lo que se refiere a la historia de las matemáticas.

Los números combinatorios son los que componen el famoso **Triángulo de Pascal**, que llevan ese nombre porque fue estudiado por el matemático francés Blaise Pascal, aunque era conocido desde mucho antes.

Ese famoso triángulo también es conocido como de Tartaglia, conocido matemático italiano del siglo XVI.

Los componentes de ese triángulo aparecen no solo en el estudio de la distribución binomial, por ejemplo, también están presentes en el desarrollo del binomio de Newton.

Como podemos ver, los números combinatorios y el triángulo de Pascal dan para una novela o para un cuento para pensar:



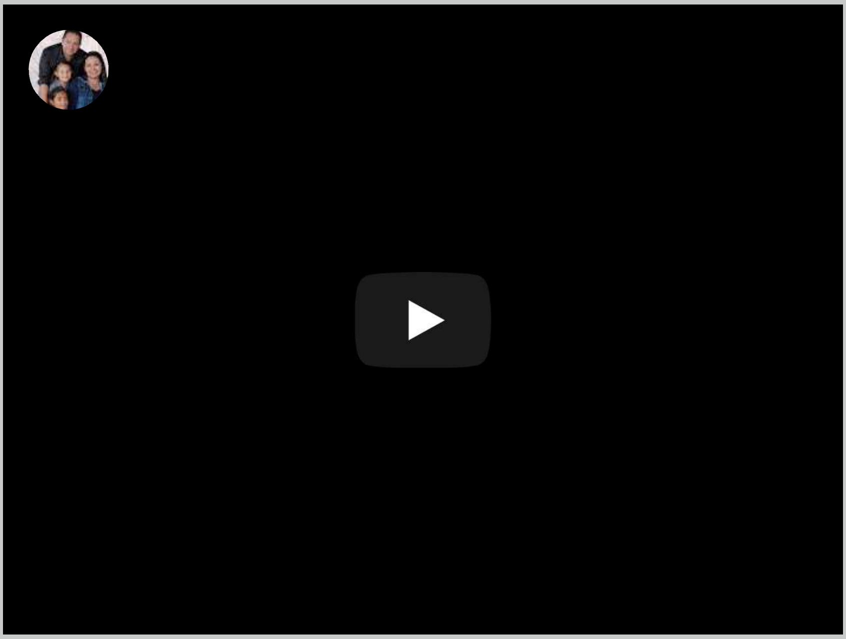
Curiosidad

Hay quien considera a la matemática como la ciencia de las relaciones. En este tema hemos visto que situaciones que en un principio pueden parecer lejanas o que no tienen nada ver unas con otras, siguen las reglas marcadas por la distribución binomial.

Si haces clic en la siguiente imagen, podrás acceder a una escena de GeoGebra creada por Jesús Fernández, donde se puede ver con claridad la similitud que existe entre las experiencias aleatorias de lanzar una moneda y la máquina de Galton.

Para saber más

La siguiente presentación resume con claridad los aspectos más importantes relacionados con la distribución binomial:



Terminamos con una relación de enlaces con los que podrás repasar y ampliar muchos de los contenidos tratados en el tema:

- Probabilidad y parámetros de la binomial.

Aviso Legal

El presente texto (en adelante, el "**Aviso Legal**") regula el acceso y el uso de los contenidos desde los que se enlaza. La utilización de estos contenidos atribuye la condición de usuario del mismo (en adelante, e "**Usuario**") e implica la aceptación plena y sin reservas de todas y cada una de las disposiciones incluidas en este Aviso Legal publicado en el momento de acceso al sitio web. Tal y como se explica más adelante la autoría de estos materiales corresponde a un trabajo de la **Comunidad Autónoma Andaluza Consejería de Educación (en adelante Consejería de Educación**).

Con el fin de mejorar las prestaciones de los contenidos ofrecidos, la Consejería de Educación se reserva el derecho, en cualquier momento, de forma unilateral y sin previa notificación al usuario, a modificar ampliar o suspender temporalmente la presentación, configuración, especificaciones técnicas y servicios del sitio web que da soporte a los contenidos educativos objeto del presente Aviso Legal. En consecuencia, se recomienda al Usuario que lea atentamente el presente Aviso Legal en el momento que acceda al referido sitio web, ya que dicho Aviso puede ser modificado en cualquier momento, de conformidad con lo expuesto anteriormente.

Régimen de Propiedad Intelectual e Industrial sobre los contenidos del sitio web.

Imagen corporativa. Todas las marcas, logotipos o signos distintivos de cualquier clase, relacionados con la imagen corporativa de la Consejería de Educación que ofrece el contenido, son propiedad de la misma y se distribuyen de forma particular según las especificaciones propias establecidas por la normativa existente al efecto.