

# FQ1 - Tema 5.4: Dinámica: Dinámica de los movimientos circular y armónico simple



**Dinámica:** Dinámica de los movimientos circular y armónico simple

## Física y Química

1.º Bachillerato

Contenidos

Dinámica

Dinámica de los movimientos circular y armónico simple

# 1. Introducción: Dinámica del movimiento circular y MAS

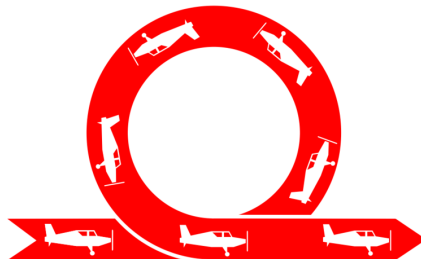
---

En este curso ya estudiaste las características del movimiento circular, calculando la velocidad de giro, relacionándola con la lineal y teniendo en cuenta además las características periódicas de ese tipo de movimiento. También has estudiado las características y magnitudes propias del movimiento armónico simple.

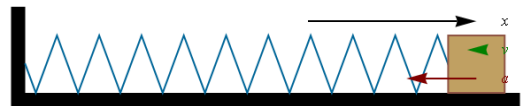
Ahora vas a analizar una serie de movimientos en los que toda la trayectoria o bien solamente una parte, que es la que nos interesa, es una circunferencia: perfecta en el caso de la noria y aproximada en el del avión haciendo un looping o rizo. Vas a analizar también también, en este último tema de la unidad que nos compete, la dinámica propia de un sistema que mantiene un movimiento vibratorio, en concreto, un movimiento armónico simple.



[Imagen](#) de Emilio J. Rodríguez  
Posada en Wikimedia. [CC](#)



[Imagen](#) en Wikimedia. Dominio público



[Imagen](#) de Gonfer en Wikipedia. [CC](#)

De entre los muchos casos que hay en tu entorno, se proponen algunos casos relevantes:

- En ámbitos muy variados, como el lanzamiento de martillo o los loopings de las patrullas acrobáticas aéreas.
- Relacionados con el tráfico, tales como son coches y motos que se mueven en curvas, cambios de rasantes o peraltes.
- Que se dan en parques de atracciones, como es el caso de norias, montañas rusas, carruseles y tubos de la muerte (cilindro por cuya pared

interior se mueven motos ¡y hasta coches!).

- el movimiento que sigue un peso que pende de un hilo o varilla, como puedes ver en los relojes de péndulo.

## 2. Movimiento circular: trayectorias no rectilíneas

---

Ya has estudiado que si un móvil no sigue una trayectoria rectilínea, va cambiando la dirección de su vector velocidad, por lo que hay aceleración. Recibe el nombre de **aceleración centrípeta**, y se calcula como  $v^2/R$ , siendo  $v$  la velocidad del móvil en cada instante y  $R$  el radio de curvatura de la trayectoria. Su dirección va precisamente hacia el centro de la trayectoria.

En el video de la izquierda se indica en color verde el vector velocidad de una bola azul que rebota en la parte interior de una pared circular, realizando una trayectoria cerrada. En cada rebote, cambia la dirección de ese vector, y se representa en magenta el vector aceleración, diferencia entre los vectores velocidad después y antes del choque con la pared. En cada giro aumenta el número de rebotes, con lo que la trayectoria se va aproximando a la circunferencia. Como puedes ver, el vector aceleración está dirigido hacia el centro de la circunferencia.

En el vídeo de la derecha puedes ver un modelo del clásico "looping" que está presente en las montañas rusas y también en los vuelos acrobáticos.

[Enlace a recurso reproducible >>](http://www.youtube.com/embed/fSfVVz0eIis)

<http://www.youtube.com/embed/fSfVVz0eIis>

[Enlace a recurso reproducible >>](http://www.youtube.com/embed/HhO4BewZGtU)

<http://www.youtube.com/embed/HhO4BewZGtU>

[Vídeo](#) de Animations for Physics and Astronomy alojado en Youtube

[Vídeo](#) de NeoLitik alojado en Youtube

## 2.1 Fuerza centrípeta

---

En el tema 1 de esta unidad (Fuerzas y leyes de la dinámica) has visto que las aceleraciones vienen causadas por la existencia de una fuerza neta que actúa sobre el cuerpo. ¿Cuál es la fuerza que provoca ese cambio de dirección del vector velocidad? ¿Qué la produce?

Esta fuerza centrípeta es la causa de los cambios de dirección de los móviles en su desplazamiento. Puede ser de contacto, como la sirga en un lanzamiento de martillo o el rozamiento entre las ruedas de un coche que toma una curva y el asfalto, o bien a distancia, como la atracción gravitatoria de la Tierra sobre un satélite o sobre un avión que hace un looping.

Va dirigida al centro de curvatura de la trayectoria (el centro de la circunferencia en el caso más sencillo).

Su módulo viene dado por la expresión  $F_c = mv^2/R$ , en la que  $m$  es la masa del móvil y, como ya sabes,  $v^2/R$  es la aceleración centrípeta ( $v$  es la velocidad y  $R$  el radio de giro).

Recordando la relación entre las velocidades lineal y angular ( $v = \omega R$ , donde  $\omega$  es la velocidad angular), también se puede escribir como  $F_c = m\omega^2 R$ .

Es decir, simplemente se aplica la ley de la dinámica  $F = m \cdot a$



### Importante

---

La fuerza centrípeta es la causa de los cambios de dirección del vector velocidad cuando un objeto sigue una trayectoria no rectilínea. Va dirigida hacia el centro de la trayectoria y su módulo viene dado por

$$m \frac{v^2}{R}$$

o por

$$m\omega^2 R$$

---

No es habitual que los móviles describan trayectorias exactamente circulares. Sí se dan en las norias, pero los loopings que describen los aviones son casi circulares, y los cambios de rasante y las curvas de las carreteras son arcos de circunferencia.

Por tanto, para poder realizar un análisis de las situaciones que nos interese resolver, reduciremos los problemas a trayectorias total o bien parcialmente circulares.



Imagen de elaboración propia

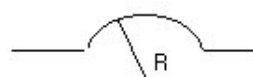


Imagen de elaboración propia



## Curiosidad

---

El desconocimiento científico de muchos periodistas les lleva a escribir auténticos despropósitos al tratar de explicar hechos que son noticia. Se transcribe a continuación un fragmento de una reseña de un accidente ferroviario, que apareció en el Heraldo de Aragón el sábado 12 de agosto de 1995:

### ***Dos muertos al ser succionados por la fuerza centrípeta de un Talgo***

*EFE Prádanos de Bureba (Burgos)*

*Los jóvenes EMB, de 16 años, y JMCM, de 17 años, murieron en Prádanos de Bureba (Burgos), al ser succionados por la fuerza centrípeta de un tren Talgo. Según fuentes de la Guardia Civil, el suceso se produjo a las 19,00 horas del jueves en el punto kilométrico 410 de la línea férrea Madrid-Irún.*

*Los jóvenes regresaban de una zona de baño en el río Oca y al cruzar las vías fueron absorbidos por la fuerza centrípeta que genera el tren a alta velocidad y se golpearon contra uno de los vagones, lo que provocó su muerte instantánea.*

*Un tercer joven que les acompañaba resultó ileso, al agarrarse con fuerza en unas barandillas de protección existentes junto a la vía, aunque tuvo que ser atendido de una fuerte conmoción nerviosa ...*

---



## Reflexiona

---

¿Dónde está el error científico en la noticia?

En que para que haya fuerza centrípeta, el tren tiene que describir una curva, y no se dice nada de que la trayectoria fuese curva, por lo que **no hay fuerza centrípeta**.

Además, se dice que los jóvenes fueron absorbidos por la fuerza centrípeta generada por el tren a alta velocidad, y esa fuerza existe, pero no es la centrípeta. Está relacionada con que por donde pasa el tren a alta velocidad, se produce una succión por efecto Venturi, debido a diferencias de presión.

---

## 2.2 ¿Fuerza centrífuga?

---

Seguro que has oído este término muchas veces: la lavadora centrifuga a 1200 rpm (como viste en el tema 3 de la unidad 4), en el análisis de sangre los tubos se centrifugan en el laboratorio, etcétera. Pero ¿qué hace la fuerza centrífuga?: absolutamente nada, ya que **la fuerza centrífuga no es una fuerza real** que origine algún tipo de efecto relacionado con el giro de los cuerpos. Solamente se utiliza cuando el observador está situado en el propio sistema que experimental el giro. Veamos cómo.

Imagina que estás sentado dentro de un coche, con los ojos cerrados. El coche circula con rapidez constante por una pista de pruebas, comenzando por una larga recta. En un momento dado, tienes la sensación de que una fuerza te desvía y te quedas pegado a la ventanilla. Como has experimentado una aceleración al cambiar la dirección de tu movimiento, deduces que una fuerza ha actuado sobre ti para provocar ese efecto: precisamente ésa es la fuerza centrífuga.

Si un observador externo hubiera visto la misma situación, ¿cómo la explicaría?: simplemente diría que el coche ha tomado una curva, que sobre él ha actuado una fuerza centrípeta que le obliga a girar (ya veremos más adelante que es la fuerza de rozamiento entre las ruedas y el asfalto), pero que como no actúa sobre ti, sigues con la trayectoria que llevabas, tangente a la trayectoria de la curva, y te desvías hacia la ventanilla.

Ten presente que tu movimiento no lo provoca ninguna fuerza, sino más bien la ausencia de una fuerza, la centrípeta. Eso sí, tú mismo puedes producir esa fuerza centrípeta, agarrándote al asidero que hay encima de la ventanilla.

Además de usar la fuerza centrífuga como si fuera real, otro **error muy común** es considerar que **la fuerza centrípeta y la centrífuga forman un par de acción y reacción**, cuando esos pares de fuerzas son fuerzas reales que surgen de la interacción entre dos cuerpos.

Fíjate ahora en la montaña rusa: cuando la vagoneta pasa por los cambios de rasante (las cimas) hay que sujetarse para no salir despedido, y por eso se utilizan barras y arneses de retención. ¡Y no es la fuerza centrífuga la que hace salir despedido de las vagonetas, sino la ausencia de centrípeta!





## Importante

---

No vas a utilizar en ningún caso la fuerza centrífuga, ya que los sistemas de referencia siempre van a ser exteriores y sin aceleración (sistemas inerciales).

---



## Curiosidad

---

Como sabes, la Wikipedia es una enciclopedia libre, referencia de búsqueda. Fíjate en las cinco definiciones que se hacen sobre la [fuerza centrífuga](#) y verás que en la primera y la tercera aparecen los dos errores que se ha indicado antes. Así que hay que ser crítico con lo que se lee, porque hay errores de concepto que, en lugar de ayudarnos, más bien nos despistan (y en la Wikipedia, muchos).

---



## Para saber más

---

La centrifugadora se utiliza en los laboratorios para separar las partículas que están en suspensión en un líquido.

De esta forma se separan los glóbulos rojos que hay en la sangre. Se introduce la muestra en un tubo de ensayo (fíjate en la imagen), se coloca inclinado en la centrifugadora y se pone el aparato en funcionamiento.

Como gira a varios miles de rpm, los sólidos en suspensión quedan pegados en el fondo del tubo de ensayo –tienen tendencia a salir de la trayectoria–.



[Imagen](#) de Agnus Manske en Wikimedia. [CC](#)

---

### 3. Movimiento circular: análisis de casos

---

Ahora es el momento de aplicar lo que sabes acerca de la fuerza centrípeta a algunas situaciones cercanas de gran interés.

¿Cómo vas a abordar la interpretación de situaciones en las que hay aceleración centrípeta?

Es aconsejable que sigas estos pasos:



Imagen de elaboración propia

- Reconocer que cambia la dirección del vector velocidad.
- Identificar el origen de la fuerza centrípeta que provoca esa aceleración.
- Representar el diagrama de las fuerzas que actúan sobre el móvil.
- Igualar la fuerza centrípeta concreta a su expresión general ( $mv^2/R$ ).

Además, vas a considerar la influencia de diferentes factores sobre el movimiento: la velocidad del objeto, su masa, el radio de la trayectoria descrita, la tensión de la cuerda, el coeficiente de rozamiento o el ángulo de inclinación que producen la fuerza centrípeta, etcétera, como irás viendo en cada caso.

¿Qué **situaciones** analizarás?

- Cuerpos que giran por acción de una ligadura (cuerda, varilla, etcétera), como sucede en el lanzamiento de martillo.
- Coches que toman las curvas en carreteras planas por acción de la fuerza de rozamiento.
- Móviles que hacen un looping (rizan el rizo) por acción de su propio peso.
- Ciclistas y motoristas que se inclinan para tomar mejor las curvas, hasta casi rozar el suelo con la rodilla.
- Velódromos y las pistas cubiertas de atletismo con curvas inclinadas (peraltadas).
- Montañas rusas con rizados, curvas peraltadas, tubos de la muerte y carruseles.

## 3.1 Cuerpos enlazados

---

Fíjate en el  
vídeo: un  
lanzador de  
martillo gira

[Enlace a recurso reproducible >> http://www.youtube.com/embed/dF9lJC4w\\_QM](http://www.youtube.com/embed/dF9lJC4w_QM)

[Vídeo](#) de emmanuel alojado en Youtube

sobre sí mismo, y hace girar la bola de aproximadamente 7,250 kg mediante una sirga metálica. Tras tres o cuatro giros completos, en un momento dado suelta el aparato, que sale en la dirección que llevaba en ese momento, tangente a la trayectoria. Se pueden alcanzar distancias superiores a los 50 m, con un récord mundial por encima de los 85 m.

¿Cuál es la fuerza que hace girar al martillo? La **tensión**  $T$  de la sirga, ejercida por el lanzador y que se transmite a la bola (consideramos que el peso del martillo es perpendicular al plano de giro). Por tanto,

$$T = \frac{mv^2}{R} = m\omega^2 R$$

de forma que sabiendo tres de las magnitudes podrás determinar la cuarta.

Cualquier situación en que haya un objeto que gira en un plano horizontal mediante una cuerda tensa, se resuelve de esta forma.

Además, podrás plantearte preguntas sobre cómo influirán las diferentes variables en el proceso. Por ejemplo, ¿por qué es necesario que el lanzador tenga una gran fuerza muscular? ¿Interesa que la sirga sea larga o corta? ¿Cómo influye la rapidez de giro?



### Caso práctico

---

Si la sirga del lanzador de martillo está deteriorada y puede soportar como máximo una tensión de 1000 N ¿qué velocidad de giro máxima puede llevar si el radio de giro es de 1,5 m? ¿Sería mejor acortar la sirga?

Utilizando la expresión ya vista y sustituyendo los valores, resulta que:

$$T = \frac{mv^2}{R} = m\omega^2 R$$

$$1000N = \frac{7,25kg \cdot v^2}{1,5m} = 7,25kg \cdot \omega^2 \cdot 1,5m$$

$$\omega = 9,6rad/s$$

$$v = 14,4m/s$$

Lo que interesa es que la velocidad de salida  $v$  sea lo mayor posible. Se puede conseguir si  $R$  es mayor, es decir, alargando la sirga (fíjate en la expresión que relaciona la tensión  $T$  con el radio  $R$  y la velocidad  $v$ ), pero su longitud está limitada por la normativa vigente en el atletismo.



## Reflexiona

Indica las condiciones más adecuadas para que nuestro lanzador mejore su marca. Reflexiona sobre las cuestiones que se acaban de plantear para decidir la estrategia que debe seguir en sus entrenamientos.

Para llegar lejos, la velocidad de lanzamiento debe ser lo más grande posible. Despejando de la expresión de la fuerza centrípeta:

$$v = \sqrt{\frac{RT}{m}}$$

Por tanto, la tensión que debe soportar el lanzador debe ser la mayor posible (debe realizar mucha fuerza), con una masa lo menor posible y un radio mejor cuanto mayor sea. Obviamente, las condiciones físicas del atleta marcan los límites que puede tener en su progresión deportiva.



## Curiosidad

Puedes hacer una experiencia muy sencilla, pero instructiva y divertida. Solamente necesitas un cubo de plástico, de los que utilizan los niños para jugar en la playa. Le atas al asa una cuerda de aproximadamente medio metro y lo haces girar en vertical. Verás que la cuerda se pone tensa, y más cuanto más deprisa hagas girar el cubo: la fuerza centrípeta es la resultante de la componente del peso en la dirección radial y la tensión de la cuerda (qué irá dirigida hacia el centro de giro).

Llena el cubo hasta la mitad con agua y hazlo girar otra vez. ¡El agua no cae cuando el cubo está en el punto más alto! Parece que se pegue a su fondo, y así no llega a caer. La tensión de la cuerda no actúa sobre el agua: sobre el agua actúa su peso y la fuerza que le ejercen las paredes del cubo ( $N$ ), que es la reacción a la fuerza que el agua ejerce sobre ellas. La fuerza centrípeta es la resultante de la componente del peso en la dirección radial y la normal ( $N$ ) (qué irá dirigida hacia el centro de giro).

Si piensas un poco, te darás cuenta de que es el mismo mecanismo que la centrifugadora de laboratorio, o que el centrifugado de las lavadoras (excepto que en ese caso hay agujeros para que pueda escapar el agua).

## 3.2 Rozamiento

---

¿Qué fuerza es la que permite que un coche tome una curva plana?

¿Cuál es la fuerza centrípeta que evita que el coche, como suele decirse, se "salga por la tangente"? ¿De qué depende la velocidad máxima a la que el móvil puede tomar la curva?

[Enlace a recurso reproducible >>](#)

<http://www.youtube.com/embed/TahcJy1AlXI>

[Vídeo](#) de Animations for Physics and Astronomy alojado en Youtube

La responsable es la **fuerza de rozamiento** entre las ruedas y la superficie de la carretera. Fíjate en el vídeo, en el que se ve que sobre el coche actúan tres fuerzas: su peso, realizada por la Tierra, vertical hacia abajo ( $w$ , amarilla); la reacción del suelo en el que se apoya, vertical hacia arriba ( $N$ , verde) e igual en módulo al peso, con lo que en la dirección vertical la fuerza resultante es nula; y, por último, la fuerza de rozamiento entre el coche y la superficie de apoyo, dirigida hacia el centro de curvatura y responsable de que el coche tome la curva sin peligro ( $f$ , naranja).

En realidad, el coche empuja a la pista hacia fuera de la curva, y la pista, por reacción, realiza sobre el coche una fuerza hacia el interior de la curva: ése es el origen de la fuerza centrípeta.

Utilizando la expresión de la fuerza de rozamiento que se obtuvo en el tema anterior, se tiene que

$$\mu mg = \frac{mv^2}{R}$$

con lo que la expresión de la velocidad se reduce a

$$v = \sqrt{\mu g R}$$

Es decir, cuanto mayor sea el radio de curvatura y el coeficiente de rozamiento, mayor será la velocidad máxima a la que se puede tomar una curva sin derrapar.



## Comprueba lo aprendido

---

Si con motivo de unas obras de mejora, el radio de la curva de una carretera se hace cuatro veces mayor, ¿cómo se modifica la velocidad máxima a la que se puede tomar esa curva?

### Sugerencia

- ☐ No cambia.
- ☐ Se hace doble.
- ☐ Se multiplica por cuatro.
- ☐ Se hace la mitad.

Incorrecto

Correcto: la velocidad depende de la raíz cuadrada del radio de curvatura (y si se multiplica por cuatro, la velocidad lo hace por la raíz de cuatro, que es dos).

Incorrecto

Incorrecto

### Solución

1. Incorrecto
2. Opción correcta
3. Incorrecto
4. Incorrecto





### 3.3 Cambios de rasante

---



[Imagen](#) de Benedicto16 en Wikimedia. CC0

Los cambios de rasante son arcos de circunferencia que habitualmente tienen un radio bastante grande, pero que pueden provocar que el coche vuele si pasa a demasiada velocidad. No hay más que ver el vídeo para comprobarlo.

Resultan tan peligrosos por esa razón que hasta hay una señal de tráfico específica para indicarlo.

¿Cuál es la fuerza centrípeta?: en el punto más alto es la resultante del peso y la normal ( $P - N$ ). La situación límite para que el coche no "vuele" es que la normal sea cero en ese punto. En este caso, la fuerza centrípeta, es el peso del móvil que pasa el cambio de rasante. Es decir,

$$mg = m \frac{v^2}{R}$$
$$v = \sqrt{gR}$$

Como puedes ver, la velocidad máxima de paso por el cambio de rasante depende únicamente de su radio de curvatura, pero no de la masa del móvil. La dependencia no es lineal: un radio cuatro veces mayor supone una velocidad doble.

También depende del valor de  $g$ , que no presenta variaciones apreciables en la Tierra y, por tanto, influye en menor medida (recuerda que al aumentar la altura  $g$  disminuye).



#### Caso práctico

---

¿Qué radio ha de tener como mínimo un cambio de rasante para que una moto que circula a 90 km/h lo pueda superar sin despegarse del suelo?

Como el peso de la moto es la fuerza centrípeta que le obliga a seguir la trayectoria curva, en el punto más alto del cambio de rasante se cumple que

$$mg = m \frac{v^2}{R}$$
$$R = \frac{v^2}{g} = \frac{(25\text{m/s})^2}{9,8\text{m/s}^2} = 63,8\text{m}$$



## Comprueba lo aprendido

Un coche de 1200 kg puede pasar sobre un cambio de rasante a una velocidad máxima de 80 km/h sin despegarse del asfalto. Una moto de 150 kg podrá pasar:

- ☐ A la misma velocidad.
- ☐ Más deprisa.
- ☐ Más despacio.

Correcto, ya que la velocidad de paso no depende de la masa.

Incorrecto, ya que la velocidad de paso no depende de la masa.

Incorrecto, ya que la velocidad de paso no depende de la masa.

## Solución

1. Opción correcta
2. Incorrecto
3. Incorrecto

## 3.4 Rizando el rizo

---

Resulta

[Enlace a recurso reproducible >> http://www.youtube.com/embed/zs6rUOduWd4](http://www.youtube.com/embed/zs6rUOduWd4)

[Vídeo](#) de taljan82 alojado en Youtube

extraordinariamente espectacular ver cómo móviles pequeños (bolas) o grandes (coches) recorren una pista vertical describiendo una circunferencia; se dice que están haciendo un **looping**, y también que están **rizando el rizo**.

Observa en el vídeo el movimiento del coche: riza el rizo con toda facilidad, entrando en él desde un tramo horizontal y saliendo por otro tramo también horizontal.

Ahora solamente te vas a ocupar del aspecto dinámico de la situación, relacionando la fuerza centrípeta con la velocidad de giro y el radio de la pista, pero en la unidad siguiente analizarás otros aspectos de este mismo caso.

Si te fijas, en el punto más alto la velocidad es menor que la de entrada y de salida del rizo; parece que, durante un instante, el coche va a quedarse suspendido en el aire.

¿Qué crees que sucedería si la velocidad de entrada fuese un poco menor?  
¿Rizaría el rizo?

¿Cuál es la fuerza centrípeta que permite que el móvil describa el giro? Cuando entra en la pista vertical, la normal del suelo va dirigida hacia arriba, hacia el centro de giro; conforme va subiendo, la normal va siendo cada vez menor. Incluso puede llegar a anularse, con lo que en el punto más alto del giro la fuerza centrípeta será el peso del móvil.

En el vídeo siguiente verás cómo la bola describe perfectamente el giro si se deja caer desde bastante altura por la rampa de acceso al rizo. Pero si se deja caer desde poca altura, se despegas de la pista antes de llegar al punto más alto y no lo describe totalmente.

[Enlace a recurso reproducible >> http://www.youtube.com/embed/4fhHCeLJe2g](http://www.youtube.com/embed/4fhHCeLJe2g)

[Vídeo](#) de risibe alojado en Youtube



## Caso práctico

Fíjate en el vídeo anterior. Si la bola tiene 100 g y el radio del rizo es de 20 cm ¿qué velocidad mínima debe llevar la bola en la parte superior para no despegarse de la pista?

En el caso límite en el que la bola está a punto de despegarse de la pista, no hay reacción normal del plano, con lo que la fuerza centrípeta es solamente el peso de la bola. Por tanto:

$$mg = m \frac{v^2}{R}$$
$$v = \sqrt{gR} = \sqrt{9,8m/s^2 \cdot 0,2m} = 1,4m/s$$

Si la velocidad es menor en el punto más alta del rizo, se despegue de la pista y la bola no "riza el rizo".



## Comprueba lo aprendido

La vagoneta del tren de la mina del parque de atracciones hace un looping. Indica las afirmaciones correctas:

- ☐ La vagoneta debe circular a una velocidad máxima determinada para describir el rizo.
- ☐ La velocidad con la que entra la vagoneta en el rizo no es importante.
- ☐ Si el radio fuese menor podría describirlo con más facilidad.

### Solución

1. Incorrecto
2. Incorrecto

3. Correcto

---

## 3.5 Moto GP

¿Qué característica especial tienen las motos? Seguro que sabes que los motoristas inclinan su máquina para tomar mejor las curvas. Fíjate en cómo toma una curva Dani Pedrosa.

Naturalmente, hay rozamiento con el asfalto, pero no es suficiente para tomar la curva a la velocidad que necesitan llevar. Al inclinarse aumenta la fuerza centrípeta, y eso permite tomar la curva a mayor velocidad, o tomar a una velocidad dada una curva de radio pequeño.

¿Qué fuerzas reales actúan sobre la moto? El rozamiento, como siempre, porque en caso contrario la moto no podría circular; cuando toma la curva, produce fuerza centrípeta, como ya has visto antes. Además, también actúan el peso ejercido por la Tierra, y la normal, realizada por la superficie.

Observa ahora el diagrama de fuerzas: la resultante del peso y la normal es una fuerza dirigida hacia el centro de la curva. Se representa solamente la contribución de la inclinación a la fuerza centrípeta: para obtener el valor total habría que sumar la fuerza de rozamiento.



Imagen de [Patrick Mayon](#) bajo licencia CC

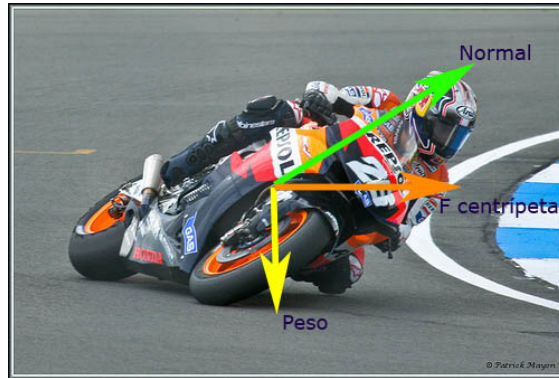


Imagen de elaboración propia a partir de la anterior

Sin tener en cuenta el rozamiento, siendo  $\alpha$  el ángulo de inclinación de la moto respecto de la vertical, se cumple que:

$$\tan\alpha = \frac{F_{centripeta}}{Peso} = \frac{Fc}{mg}$$

$$Fc = mg \cdot \tan\alpha$$



## Importante

---

La inclinación de una moto, bicicleta o cualquier otro móvil al tomar una curva aumenta la fuerza centrípeta que le permite tomar la curva con mayor velocidad y seguridad.

---



## Caso práctico

---

Una moto se inclina  $30^\circ$  al tomar una curva de 80 m de radio. ¿A qué velocidad la podrá tomar como máximo por efecto de la inclinación?

$$F_c = mg \cdot \tan \alpha = m \frac{v^2}{R}$$

$$v = \sqrt{gR \cdot \tan \alpha} = \sqrt{9,8m/s^2 \cdot 80m \cdot \tan 30} = 21,3m/s = 76,6km/h$$

Como además hay rozamiento, la velocidad podrá ser mayor del resultado obtenido en este caso.



## Reflexiona

---

Un motorista circula a 90 km/h cuando se encuentra con una curva de 50 m de radio, inclinándose 40° como máximo. ¿Podrá tomarla o se saldrá de la carretera? (no tengas en cuenta el rozamiento).

La expresión de la fuerza centrípeta es:

$$F_c = mg \cdot \tan\alpha = m \frac{v^2}{R}$$

Puedes calcular la velocidad máxima a la que puede tomar la curva en esas condiciones, y ver si la que realmente lleva es mayor o menor:

$$v = \sqrt{gR \cdot \tan\alpha} = \sqrt{9,8m/s^2 \cdot 50m \cdot \tan 40} = 20,28m/s = 73km/h$$

Como la velocidad que lleva es superior a la máxima permitida, **se saldrá de la curva.**

También podías haber calculado el radio mínimo que debería tener la curva para poder tomarla a 90 km/h y compararlo con el real de 50 m.

---



## 3.6 Peraltes

---

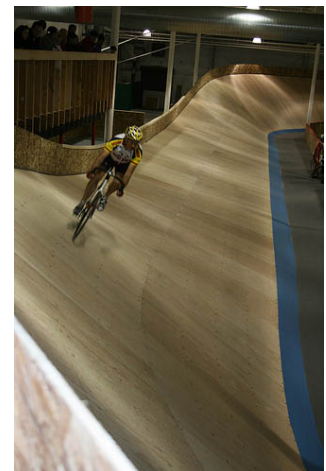
Para conseguir que una curva se pueda tomar a mayor velocidad, hay que peraltarla, elevando la parte exterior para que el móvil experimente el mismo efecto que produce la inclinación de un motorista: aumentar fuerza centrípeta.

Observa el vídeo para ver el origen de la fuerza centrípeta. Fíjate en que al aumentar la inclinación respecto de la horizontal también lo hace la fuerza centrípeta.

[Enlace a recurso reproducible >>](#)

[http://www.youtube.com/embed/\\_m0QbOwx0GM](http://www.youtube.com/embed/_m0QbOwx0GM)

[Vídeo](#) de Animations for Physics and Astronomy alojado en Youtube



[Imagen](#) de lets ideas compete en Flickr. [CC](#)

Los peraltes son muy llamativos en las pistas que tienen curvas muy cerradas, como es el caso de los velódromos y las pistas cubiertas de atletismo (de 200 m de cuerda, en lugar de los 400 de las pistas al aire libre). Resulta extraordinariamente difícil andar o correr por ellos.

También hay en los circuitos de automovilismo y motociclismo, pero se notan mucho menos a simple vista, aunque su efecto sí resulta apreciable.



### Caso práctico

---

Un ciclista de 80 kg (incluida la masa de su bicicleta) toma una curva peraltada de 18 m de radio a una velocidad máxima de 54 km/h, la máxima permitida para no salirse de la pista. Determina el ángulo de inclinación de la pista sin tener en cuenta el rozamiento.

Como en el caso del motorista que se inclinaba al tomar una curva, la expresión de la fuerza centrípeta es:

$$F_c = mg \cdot \tan \alpha = m \frac{v^2}{R}$$

Organizando los términos y sustituyendo:

$$\tan \alpha = \frac{v^2}{gR}$$
$$\alpha = \arctan \frac{v^2}{gR} = \arctan \frac{15^2}{9,8 \cdot 18} = 51,9^\circ$$

Es decir, la pista se ha de inclinar  $51,9^\circ$  con respecto a la horizontal. En realidad, no es necesaria tanta inclinación, ya que el rozamiento también contribuye a la fuerza centrípeta.



## Comprueba lo aprendido

El efecto del peralte es más necesario si:

- ☐ Está circulando un camión en lugar de un coche.
- ☐ La curva es de radio pequeño.
- ☐ El móvil que toma la curva está frenando.

¡Incorrecto! El efecto del peralte no depende de la masa.

¡Correcto!

¡Incorrecto! No tiene que ver que el coche cambie su velocidad.

## Solución

1. Incorrecto
  2. Opción correcta
  3. Incorrecto
-

## 3.7 Parques temáticos

---

La fuerza centrípeta resulta necesaria para explicar cómo funcionan muchos aparatos de los parques temáticos.

En los **carruseles de caballitos** hay que sujetarse a la barra para no salir despedido: el niño tira de la barra hacia fuera, y la barra empuja al niño hacia adentro, produciéndose la fuerza centrípeta necesaria.

En las **montañas rusas** hay subidas y bajadas vertiginosas: al llegar a una de las cimas, las barras de sujeción y los arneses evitan que los pasajeros salgan despedidos. Además, hay curvas muy pronunciadas, que se tienen que peraltar para poderlas tomar a gran velocidad. También hay tirabuzones, y, por supuesto, *loopings*.

En estos dos vídeos puedes ver, en primer lugar, un modelo de montaña rusa montado con un juguete de construcción con piezas de plástico del tipo mecano. A la derecha, hay una filmación hecha desde una vagoneta que va por una montaña rusa con un triple *looping* y todo tipo de ascensos, descensos y tirabuzones.

¿Cuál es la fuerza centrípeta que obliga a seguir esas trayectorias? Las vagonetas están sujetas a los raíles, por lo que la fuerza necesaria la proporcionan esas sujeciones, mientras que los ocupantes reciben la acción directa de barras y arneses.

[Enlace a recurso reproducible >>](http://www.youtube.com/embed/ZH1OKj-C7M8)

<http://www.youtube.com/embed/ZH1OKj-C7M8>

[Vídeo](#) de Knexaholic alojado en Youtube

[Enlace a recurso reproducible >>](http://www.youtube.com/embed/A86gIci8JsI)

<http://www.youtube.com/embed/A86gIci8JsI>

[Vídeo](#) de gtcamara alojado en Youtube



### Curiosidad

---

¡Espectacular!: los **tubos de la muerte** en India, con coches y motos que giran por una pista vertical de madera. En el vídeo puedes ver que llega a haber dos coches y dos motos girando a la vez. El peligro es muy alto, y los

accidentes, frecuentes. Observa cómo el conductor sale fuera del coche mientras se mueve por la pared vertical.

Fíjate en el título que ha dado el autor al vídeo cuando lo ha subido a youtube. ¡Habla de la fuerza centrífuga!

¿Cuál es el origen de la fuerza centrípeta? En este caso, la reacción de la pared del tubo a la acción del móvil que se desplaza a alta velocidad, realizando fuerza sobre ella.

[Enlace a recurso reproducible >> http://www.youtube.com/embed/hZOekFFSoWI](http://www.youtube.com/embed/hZOekFFSoWI)

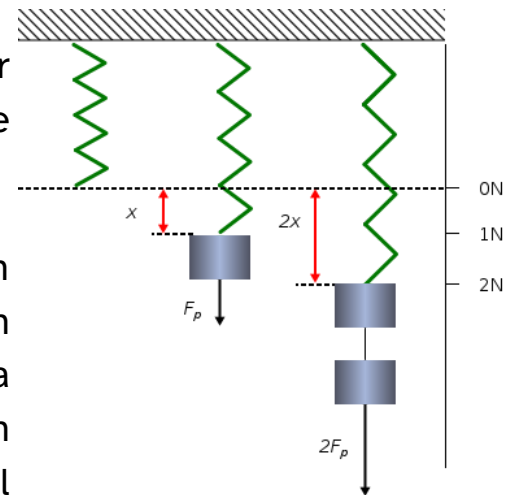
[Vídeo](#) de GuzerVídeo alojado en Youtube

---

## 4. Movimiento armónico simple

Para abordar este apartado vamos a recordar algo que ya vimos en el primer tema de esta unidad: *La medida de las fuerzas*:

Los cuerpos elásticos (muelles) se deforman cuando se les aplica una fuerza, pero recuperan su forma original al dejar de actuar la fuerza. La deformación producida y la fuerza aplicada están relacionadas de forma que el alargamiento del muelle es directamente proporcional a la fuerza aplicada:



[Imagen](#) de Marc Lagrange en Wikipedia. [CC](#)

$$F = k \cdot \Delta L$$

siendo  $F$  la fuerza aplicada,  $\Delta L$  el alargamiento del muelle y  $k$  la constante elástica o recuperadora del muelle. Esta es la **ley de Hooke**.

Sabemos que, una vez estirado, el muelle tiende a su estado inicial, gracias a una fuerza recuperadora, proporcional a la deformación del resorte, aunque de sentido opuesto, y que cumple la ley de Hooke:

$$\vec{F} = -k \cdot \vec{x}$$

Esta fuerza recuperadora pretende llevar de nuevo al sistema al equilibrio.

La fuerza restauradora (recuperadora o elástica) es variable, y tendrá sentido contrario al movimiento (siempre se dirige hacia la posición de equilibrio). Puedes verlo en la animación siguiente:

Ya ves que el valor de  $F$  varía: cuanto mayor es el alargamiento o la compresión del muelle, mayor será la fuerza.

Aplicando la segunda ley de Newton:

$$\vec{F} = -k \cdot \vec{x} = m \cdot \vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{k}{m} \cdot \vec{x}$$

Bajo la acción de una fuerza elástica, un cuerpo seguirá un movimiento armónico simple.



## Nueva definición del MAS

Es posible, por todo lo anterior, redefinir el MAS:

El movimiento armónico simple de un punto material se da cuando, si por una perturbación se pierde el equilibrio estable, este se hallará sometido a una fuerza restauradora que intente devolver el sistema al equilibrio. Esta, proporcional al desplazamiento de su posición de equilibrio, es opuesta al movimiento de forma que realice un movimiento de vaivén en torno a una posición de equilibrio.

La fuerza restauradora ha de cumplir la ecuación  $\vec{F} = -k \cdot \vec{x}$  siendo  $x$  la separación de la posición de equilibrio (elongación) y  $K$  la constante recuperadora del muelle.



## Caso práctico

Si se cuelga un cuerpo de 2 kg en dos muelles, vemos que estos se alargan 2,3 cm y 30 cm. Determina el valor de la constante elástica de cada muelle.

se cumple la ley de Hooke,  $F=k\cdot\Delta x$  siendo  $\Delta x$  la deformación que experimenta el muelle.

La fuerza que actúa es el peso:

$$F=P=m\cdot g$$

Sustituyendo valores:

$$\text{muelle 1: } F = m\cdot g = k\cdot x \rightarrow 2 \text{ kg} \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 = k \cdot 2,3\cdot 10^{-2} \text{ m} \rightarrow k = 852 \text{ N/m}$$

$$\text{muelle 2: } F = m\cdot g = k\cdot x \rightarrow 2 \text{ kg} \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 = k \cdot 0,3 \text{ m} \rightarrow k = 65,3 \text{ N/m}$$

---

Conocemos las ecuaciones de movimiento del MAS, si recordamos la de la aceleración:  $a = -\omega^2 x$

Combinando con la expresión de la fuerza restauradora y la segunda ley de Newton:

$$\left. \begin{array}{l} a = -\omega^2 x \\ m \cdot a = -K \cdot x \end{array} \right\} \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{K}{m}} \rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}}$$

Estas expresiones importantes muestran cómo la frecuencia angular  $\omega$  y el período  $T$  del movimiento armónico simple dependen de las características del oscilador (de  $k$ ).



## 4.1 Péndulo



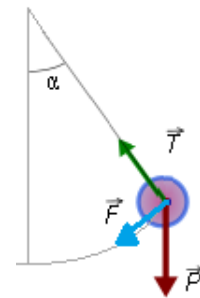
[Enlace a recurso reproducible >>](#)

<http://www.youtube.com/embed/WKDLp1IM4xU>

[Imagen](#) de burro en Wikipedia.  
[CC](#)

[Video de fgarbor906 alojado en Youtube](#)

Un péndulo simple es un sistema de gran interés. Consta de una masa suspendida de un hilo, cable o varilla inextensible y de masa despreciable. En una situación estable, sobre el péndulo actúan dos fuerzas que están en equilibrio: la tensión del hilo que sostiene al objeto y el peso de este.



[Imagen](#) modificada de FJGAR (BIS) en  
Wikimedia. [CC](#)

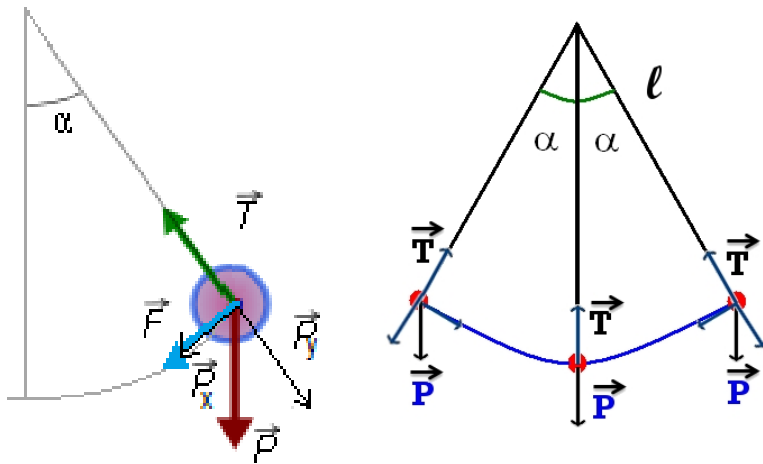
Al separar el péndulo de la la posición de equilibrio, que es la vertical, un determinado ángulo  $\alpha$ , el cuerpo oscila en torno a esta posición de equilibrio, comenzando entonces un movimiento de oscilación.

Hay por tanto una fuerza restauradora que actúa sobre el cuerpo que oscila, la puedes ver representada en la imagen de la derecha (en azul).

Si ese ángulo es suficientemente pequeño podemos afirmar que seguirá un movimiento armónico simple.

La fuerza restauradora será la componente tangencial del peso del cuerpo ( $\vec{P}_x$ ), es decir, la parte de la fuerza peso que es tangente a la trayectoria. Tal fuerza varía su valor según la posición que ocupe el objeto oscilante.

Por otro lado, existe otra componente de la fuerza peso, la componente normal ( $\vec{P}_y$ ). La misma es anulada por la tensión de la fuerza. La componente normal toma su valor máximo, o lo que es lo mismo, toma el valor del peso cuando se encuentra en la posición de equilibrio, siendo pues la otra componente nula. Ello mantiene más aún la relación con el movimiento armónico simple.



[Imagen](#) de FJGAR en Wikimedia. [CC](#)

En la figura adjunta puedes ver claramente las fuerzas que intervienen en cada momento y cómo las mismas pueden descomponerse, así descubrirás cuáles se anulan y cuáles provocan el cambio de posición. Aplicando los conocimientos básicos de geometría podrás darte cuenta de que el ángulo formado por la fuerza peso y su

componente normal es exactamente igual al que forma el hilo con la posición de inicio.

Por ello, se puede establecer que la componente tangencial toma la siguiente expresión:

$P_x = -mg \operatorname{sen} \alpha$  (el signo negativo da idea de que su sentido es hacia la posición de equilibrio).

Curiosamente, el valor de la función seno toma valores casi iguales que el propio ángulo cuando hablamos de valores muy pequeños y, por tanto, puede ser sustituido el seno por el ángulo. El valor del ángulo se puede calcular como:

$$\operatorname{sen} \alpha \approx \alpha = \frac{x}{L}$$

Por tanto, la fuerza será:

$$P_x = -mg \operatorname{sen} \alpha \approx -mg \alpha = -mg \frac{x}{L}$$

Ya sabes que esta es la fuerza restauradora, por tanto se igualan expresiones:

$$F = -kx \text{ y } P_x = -mg \frac{x}{L} \text{ y se llega a la siguiente expresión: } k = \frac{mg}{L}$$

Como  $k = \omega^2 m$  entonces:  $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$

Y sabiendo que  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  obtenemos la expresión del período para el movimiento de un péndulo:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

En esta última ecuación puedes observar que el período (y por tanto, la frecuencia) de un péndulo, al igual que en cualquier movimiento armónico simple, son independientes de la amplitud del movimiento. Además, para un péndulo que oscila bajo pequeños ángulos con respecto a la posición de equilibrio, el período y la frecuencia son independientes de la masa, algo que no es posible para el caso de un muelle oscilante por la acción de masa.

Esto que acabas de ver es lo que hace que los péndulos fueran empleados como instrumentos de medida del tiempo y que ambas magnitudes sólo dependen de la longitud del péndulo y de la aceleración consecuencia del campo gravitatorio terrestre.



## Caso práctico

---

Calcula la aceleración de la gravedad allá donde un péndulo simple de 1 m oscila con una frecuencia de 0,5 Hz.

La frecuencia es la inversa del período, por tanto la expresión que relaciona  $g$  y  $f$  es:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{L}}$$

Despejando queda  $g = 4\pi^2 L f^2 = 9,86 \text{ m s}^{-2}$

---

# Resumen

---



## Importante

---

La **fuerza centrípeta** es la causa de los cambios de dirección del vector velocidad cuando un objeto sigue una trayectoria no rectilínea. Va dirigida hacia el centro de la trayectoria y su módulo viene dado por  $mv^2/R$  o por  $m\omega^2 R$ .

No vas a utilizar en ningún caso la **fuerza centrífuga**, ya que los sistemas de referencia siempre van a ser exteriores y sin aceleración (sistemas inerciales).

---



## Importante

---

Una situación en que haya un objeto que gira en un plano horizontal mediante una cuerda tensa se resuelve con esta expresión:

$$T = \frac{mv^2}{R} = m\omega^2 R$$

---



## Importante

---

La fuerza que permite que un coche tome una curva plana es la **fuerza de rozamiento**.

Utilizando la expresión de la fuerza de rozamiento se tiene que

$$\mu mg = \frac{mv^2}{R}$$

con lo que la expresión de la velocidad queda

$$v = \sqrt{\mu g R}$$

La inclinación de una moto, bicicleta o cualquier otro móvil al tomar una curva aumenta la fuerza centrípeta que le permite tomar la curva con mayor velocidad y seguridad.



## Importante

---

El **movimiento armónico simple** de un punto material se da cuando, si por una perturbación se pierde el equilibrio estable, este se hallará sometido a una fuerza restauradora que intente devolver el sistema al equilibrio. Esta, proporcional al desplazamiento de su posición de equilibrio, opuesta al movimiento, de forma que realice un movimiento de vaivén en torno a una posición de equilibrio.

La fuerza restauradora ha de cumplir la ecuación  $\vec{F} = -K \cdot \vec{x}$  siendo  $x$  la separación de la posición de equilibrio (elongación) y  $K$  la constante recuperadora del muelle.

Conocemos las ecuaciones de movimiento del MAS, si recordamos la de la aceleración:  $a = -\omega^2 x$

Combinando con la expresión de la fuerza restauradora:

$$\left. \begin{array}{l} a = -\omega^2 x \\ m \cdot a = -K \cdot x \end{array} \right\} \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{K}{m}} \rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}}$$

Esta ecuación corresponde al movimiento armónico simple de un muelle, de constante elástica  $K$  unido a una masa  $m$ .

---



## Importante

---

### Péndulo simple

La constante recuperadora es

$$k = \frac{mg}{L}$$

Y el periodo:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

---

# Imprimible

---

Descarga aquí la versión imprimible de este tema.



---

Si quieres escuchar el contenido de este archivo, puedes instalar en tu ordenador el lector de pantalla libre y gratuito [NDVA](#).

---

# Aviso legal

---

Las páginas externas no se muestran en la versión imprimible

<http://www.juntadeandalucia.es/educacion/permanente/materiales/index.php?aviso#space>