INSTITUTO de ENSEÑANZAS a DISTANCIA de ANDALUCÍA

2º de Bachillerato

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Contenidos

Programación lineal: Inecuaciones y sistemas de inecuaciones con dos incógnitas.

Conocemos a Pedro, un avezado motorista que suele hacer muchos kilómetros en su moto. Pedro busca reducir el coste del importe de combustible y le han comentado que podía mezclar la gasolina con otro producto de más baja calidad, que cuesta 0,5 € el litro.

Fotografía en Flickr de apagada_barcelona07 bajo licencia Creative Commons

Para poder resolver el problema del coste que supone el repostaje de carburante, necesita saber cuántos litros de gasolina tiene que echar de cada clase, sabiendo que como mucho se puede gasta 10 €.

Como te habrás fijado, entran en juego dos variables, el número de litros de gasolina que llamaremos ***x,*** y el otro producto que vamos a llamar ***y***.

¿Cómo plantearías ahora el problema?

Teniendo en cuenta que el litro de gasolina cuesta 1,25 €, escribimos la siguiente ***inecuación*** con dos incógnitas: $1{,}25\cdot x+0{,}5\cdot y\leq 10$.

Importante

Una inecuación en el plano viene dada por una desigualdad del tipo:

- $ax + by \leq c$
- $ax + by < c$
- $ax + by \geq c$
- $ax + by > c$

y la solución corresponde a un semiplano.

Recuerda que se llama **semiplano** cada una de las dos partes en que un plano queda dividido por una recta.

La recta asociada a una inecuación resulta de cambiar el símbolo de desigualdad por el de igualdad, $ax+by=c$.

Si representamos la recta $ax+by-c=0$ en el plano, ésta lo divide en dos zonas (semiplanos).

Si tomamos cualquier punto del plano y sustituimos sus coordenadas en la ecuación de la recta, tendremos siempre un resultado que será:

Positivo, es decir $ax+by-c>0$, para todos los puntos de uno de los lados.

Negativo, es decir $ax+by-c<0$, para los del otro lado.

Cero,es decir,$ax+by-c=0$, para los puntos de la recta.

Dada una inecuación, por ejemplo 2x+y<5, si al sustituir un punto del plano, por ejemplo el punto P(2,-1), comprobamos que verifica dicha inecuación, como es el caso ya que 2·2+(-1) es igual a 3 que es menor que 5, entonces se cumple que para todo punto del semiplano donde esté situado P respecto a la recta 2x+y=5 verificará la inecuación. Si el p, ningún punto del semiplano donde esté situado P verificaría la inecuación. Si el punto P no verificara la inecuación, ningún punto del semiplano donde estuviera situado P la verificaría.

Comprueba lo aprendido

Dada la inecuación ***2x+y≤1***, indica si son solución los siguientes puntos del plano:

(0,0)

Sugerencia

Verdadero Falso

Verdadero
2·0+0-1=-1≤0

(-2,1)

Sugerencia

Verdadero Falso

Verdadero
2·(-2)+1-1=-4≤0

(2,-1)

Sugerencia

Verdadero Falso

Falso
2·2-1-1=2≥0

(1/2,1)

Sugerencia

Verdadero Falso

Falso
2·(1/2)+1-1=1≥0

Importante

Resolver una inecuación con dos incógnitas consiste en hallar todos los puntos del plano que verifican dicha inecuación. Para ello, procederemos de la siguiente forma:

1º) Convertimos la inecuación en ecuación.

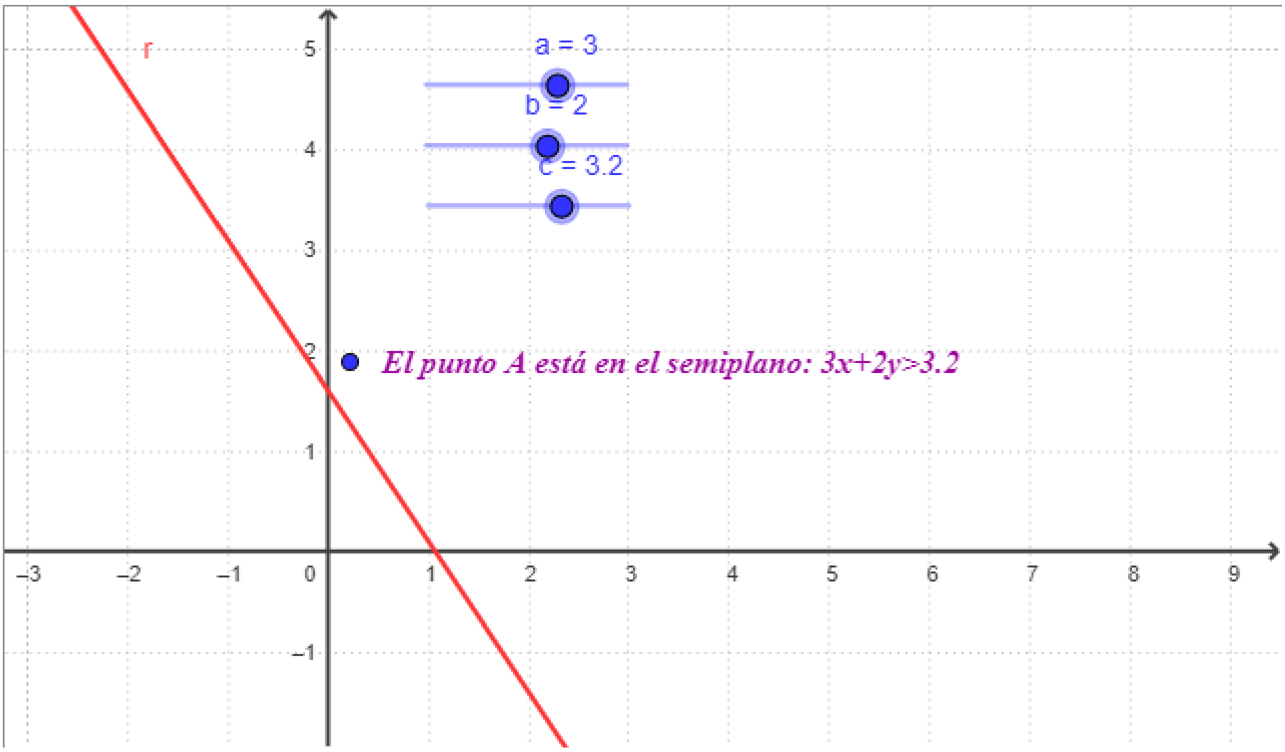
2º) Podemos despejar la variable **y** y representar la recta obtenida mediante una tabla de valores. Dicha recta divide al plano en dos zonas (semiplanos).

3º) Elegimos un punto de cualquiera de estos semiplanos y sustituimos en la inecuación de partida.

4º) Si el punto verifica la inecuación, el semiplano solución será la zona donde se encuentra dicho punto. En caso contrario,será la otra.

5º) Los puntos sobre la recta forman parte de la solución siempre y cuando en la inecuación de partida tengamos los símbolos $\geq$ **o** $\leq$

En la siguiente escena, basada en una creada con Geogebra por José Álvarez y modificada, puedes ver el comportamiento de un punto sobre una recta y las posiciones relativas de dicho punto respecto a la recta.
Mueve el punto A a cada lado de la recta r y sobre ella. te aparecerá un texto indicándote si A es solución de la ecuación ax + by + c = 0, la inecuación ax + by + c < 0 o la inecuación ax + by + c > 0.
Mueve también los deslizadores a , b y c para que varíe la recta r. Observa las posiciones relativas de dicho punto respecto de la recta.



Ejemplo:

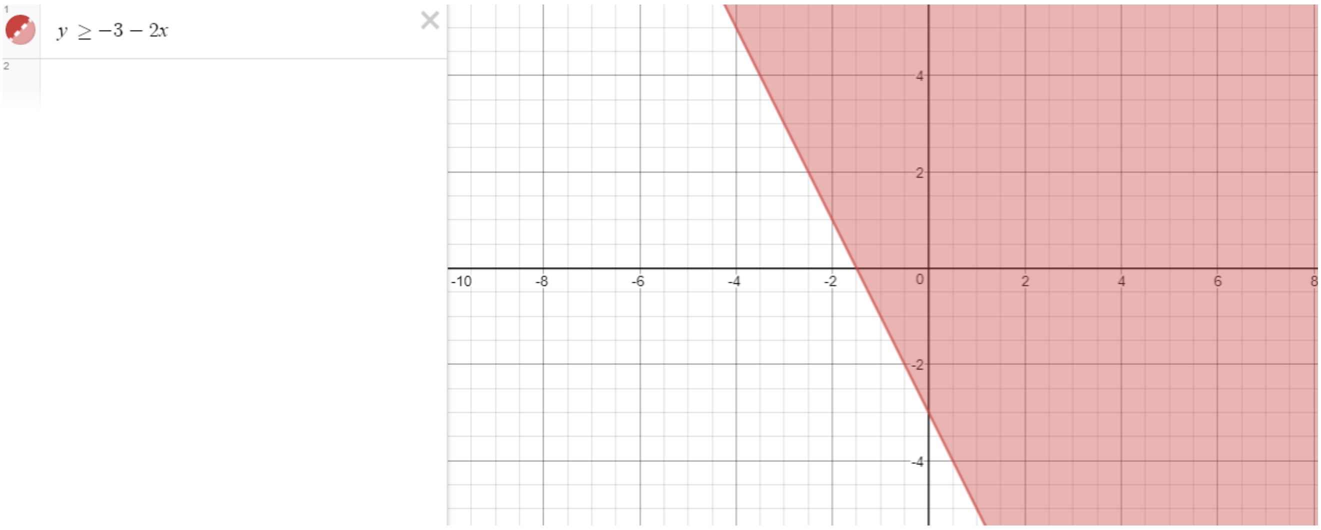
Resuelve gráficamente la inecuación ***2x+y≥-3***

Si vamos a proceder a realizarlo manualmente, "sobre el papel", convertimos la inecuación ***2x+y≥-3*** en ecuación ***2x+y=-3***

Despejamos la variable ***y*** y representamos la recta ***y=-3-2x***.
Buscamos la zona correspondiente a la solución probando con un punto.
El más fácil es el (0,0), sustituimos en la inecuación, resultando: 2·0+0=2 ≥ -3
Por tanto la zona es "la que contiene al (0,0)".

Puedes utiiizar el siguiente enlace para trabajar la representación gráfica directamente con Desmos.

La solución gráfica sería:



Observa que en este caso también se incluye la propia recta, ya que los puntos sobre la recta son los que verfican la igualdad ***2x+y=-3*** y por tanto, cumplen con la condición de la inecuación. Cuando la desigualdad sea estricta, es decir, "<" o ">", los puntos sobre la recta no serán solución y dibujaremos ésta con trazo más fino o discontinuo.

Ejercicio resuelto

Resuelve las siguientes inecuaciones:

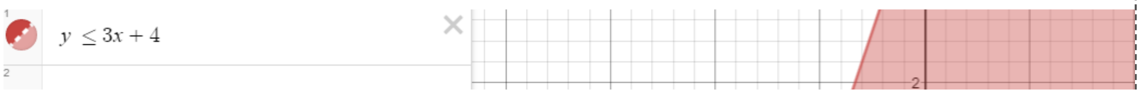
a) ***3x+4≥y***

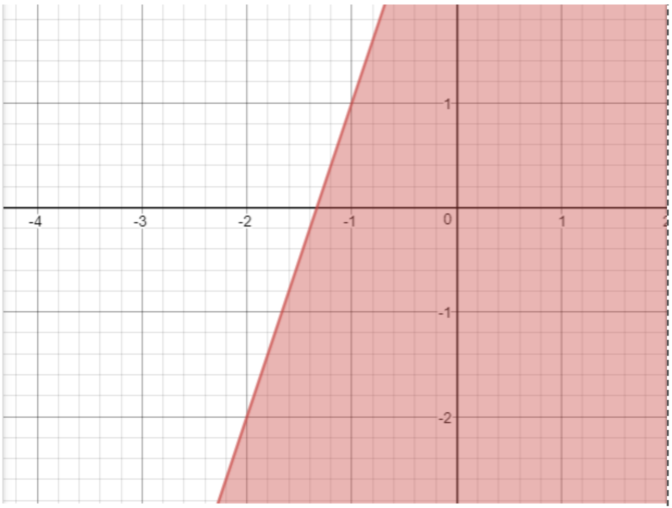
b) ***x-y<5***

c) ***-2x+3y>0***

Mostrar retroalimentación

a)

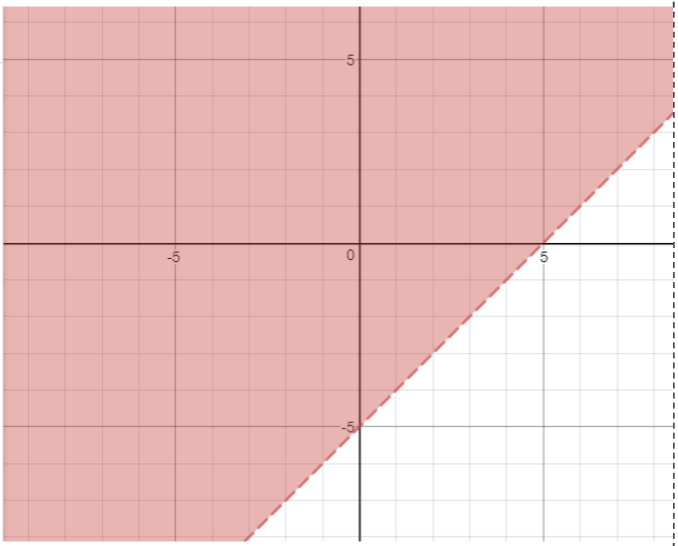




impulsado por

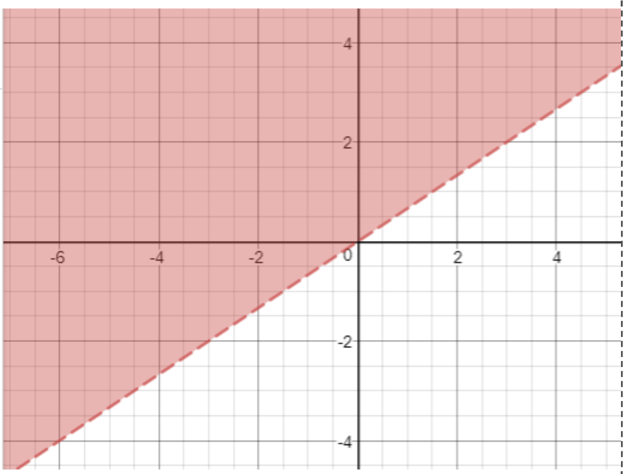
b)

$y > x - 5$



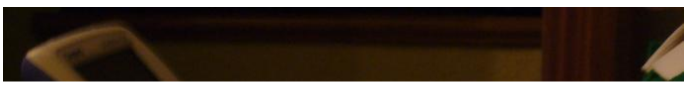
c)

$y > \frac{2x}{3}$

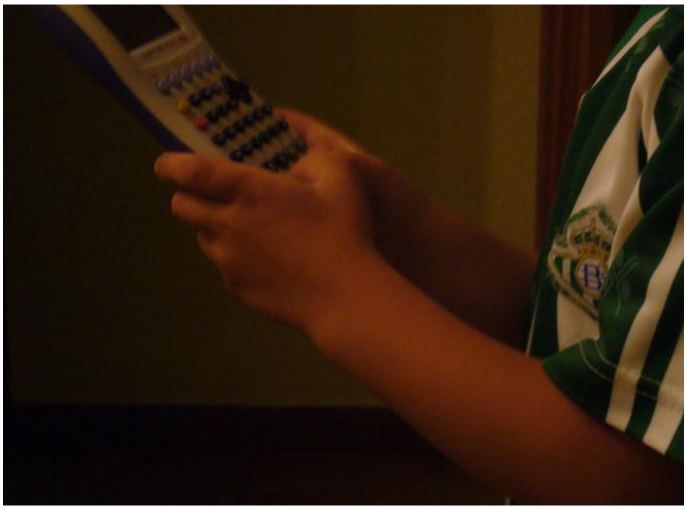


Comprueba lo aprendido

Dada la recta de ecuación ***9x+2y=4***, indica dónde están cada uno de los siguientes



cada uno de los siguientes puntos:



a) P=(2,3)

- [ ] P está en el semiplano inferior.
- [ ] P está en la recta r.
- [ ] P está en el semiplano superior.

Mostrar retroalimentación

Solution

1. Incorrecto
2. Incorrecto
3. Correcto

b) P=(1, -5/2)

- [ ] P está en el semiplano inferior.
- [ ] P está en la recta r.
- [ ] P está en el semiplano superior.

Mostrar retroalimentación

Solution

1. Incorrecto
2. Correcto
3. Incorrecto

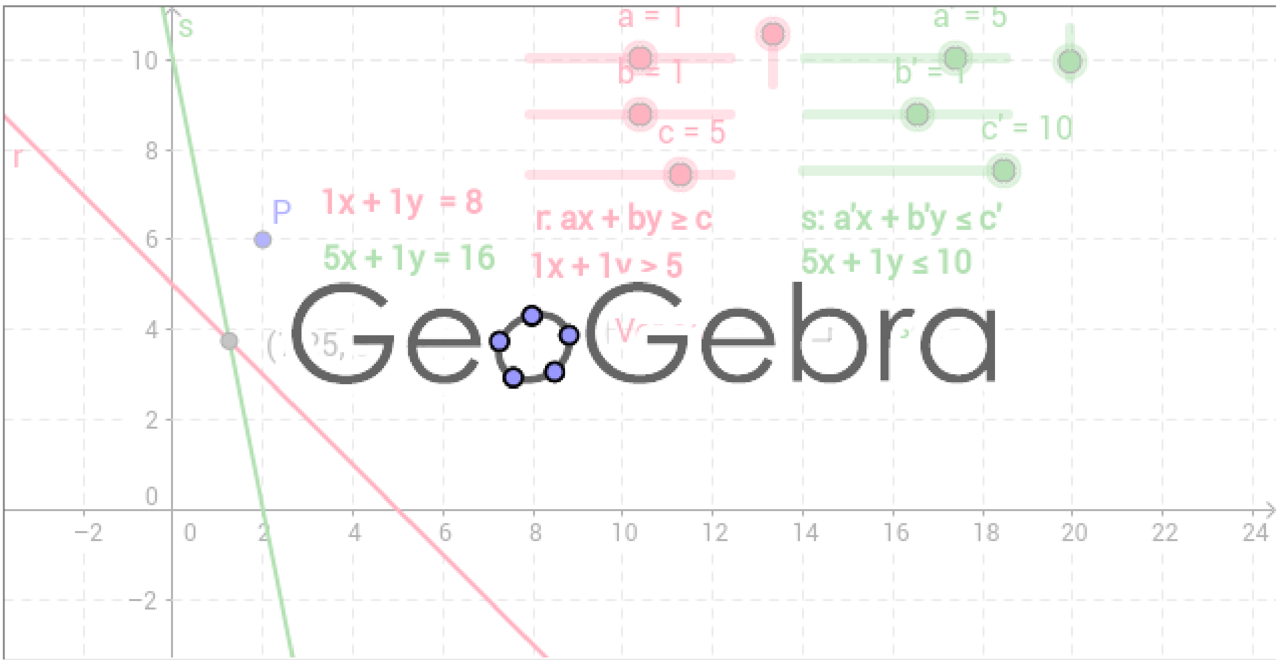
Importante

El **conjunto solución** de un sistema de inecuaciones lineales se obtiene como intersección de las soluciones obtenidas para cada una de las inecuaciones que lo forman.

Al conjunto solución también se le llama **región factible**.

En la siguiente escena basada en una creada con Geogebra por Ignacio Larrosa, puedes practicar la resolución de un sistema de inecuaciones con dos incógnitas.

Moviendo los deslizadores horizontales, puedes cambiar los coeficientes de las inecuaciones y con los deslizadores verticales, puedes cambiar el signo de la desigualdad.



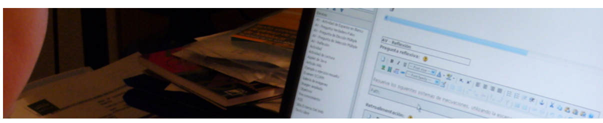
Reflexiona

Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones, utilizando la escena anterior:

a) $\begin{cases} 2x+y>5 \\ 3x-y\geq 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x-2y-3>0 \\ 2x-y-10\leq 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -x+4y<3 \\ 2x-3y\leq -1 \end{cases}$

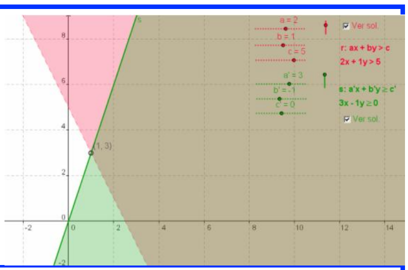


d) $\begin{cases} 3x-2y\leq 10 \\ x-5y\geq 0 \end{cases}$

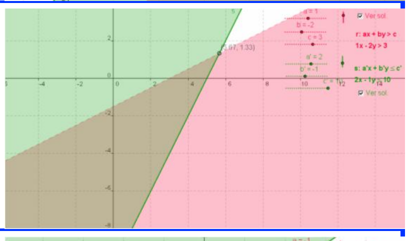
Mostrar retroalimentación

Las soluciones son las zonas de color marrón:

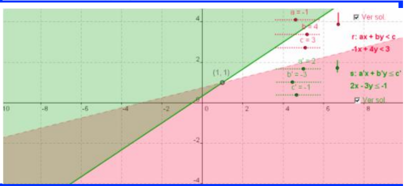
a)



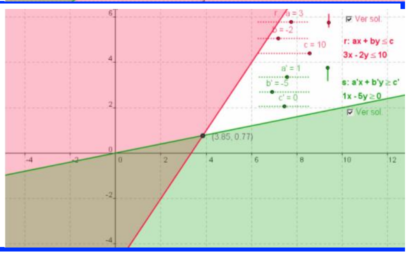
b)

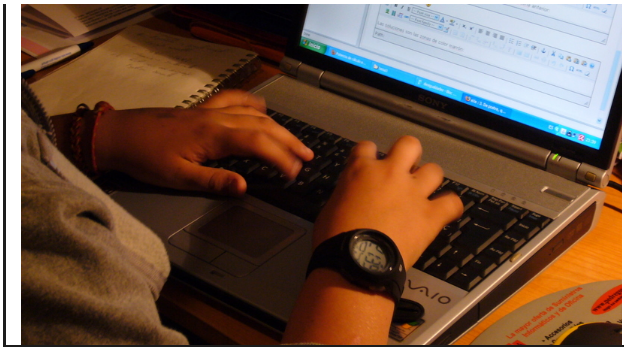


c)

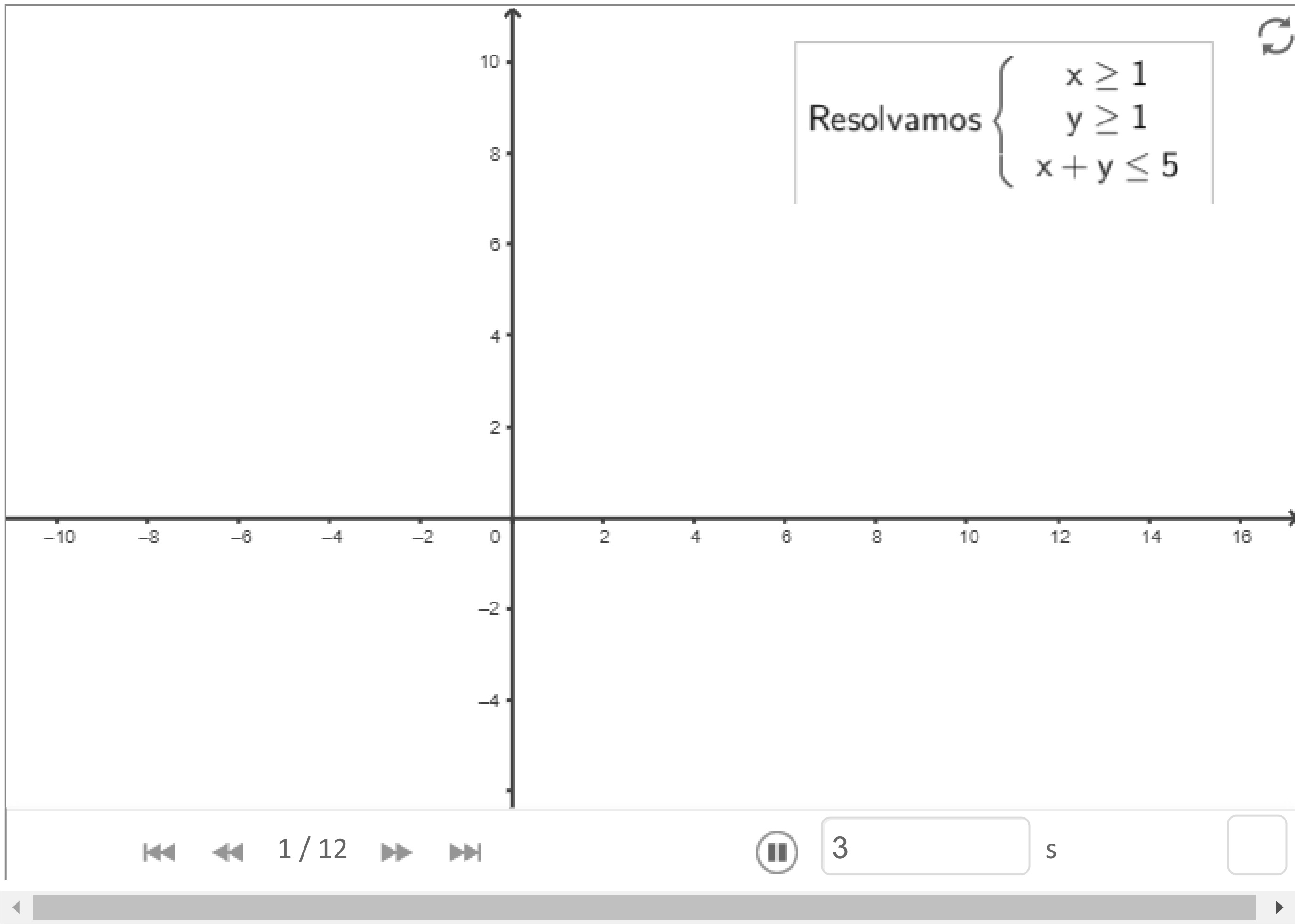


d)





En la siguiente escena creada con Geogebra por José Álvarez, puedes ver cómo se resuelven sistemas con más de dos inecuaciones, con dos incógnitas.



Te planteamos a continuación un ejercicio que apareció en el examen de selectividad de junio del 2010 donde solicitan hallar el recinto definido por un conjunto de inecuaciones (más de dos).

Ejercicio resuelto

Sea el recinto definido por las inecuaciones siguientes

$$x + y \leq 15;\ x \leq 2y;\ 0 \leq y \leq 6;\ x \geq 0$$

Represente gráficamente dicho recinto.

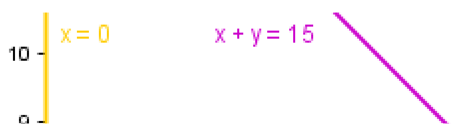
Mostrar retroalimentación

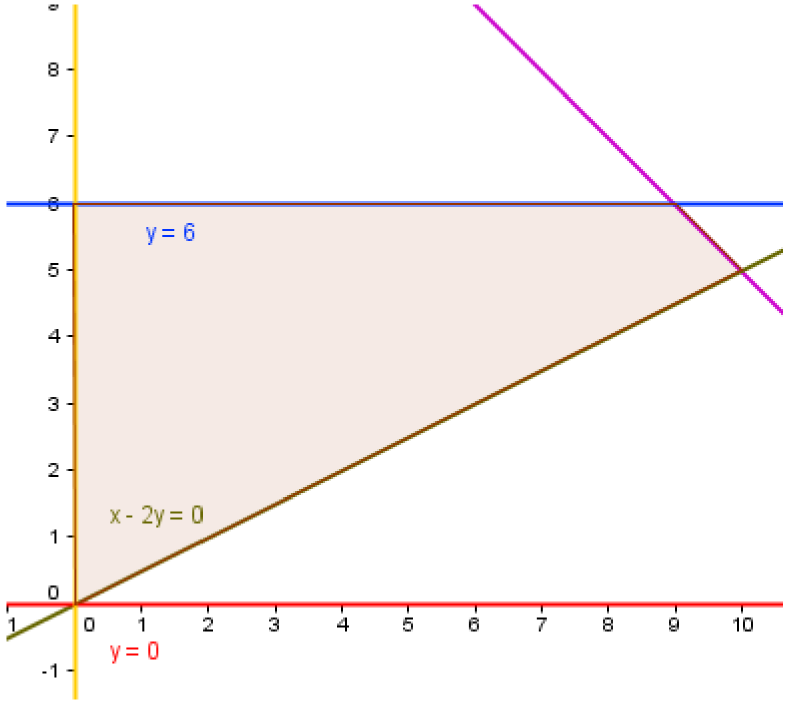
Las inecuaciones :

$x \geq 0$

$y \geq 0$

Nos indican que la región se encuentra en el primer cuadrante. Observa que para representar las inecuaciones, primero hay que representar la ecuación y luego elegir la región del plano adecuada.





y = 6
x - 2y = 0
y = 0

Importante

Resolver una inecuación con dos incógnitas consiste en hallar todos los puntos del plano que verifican dicha inecuación. Para ello, procederemos de la siguiente forma:

1º) Convertimos la inecuación en ecuación.

2º) Podemos despejar la variable **y** y representar la recta obtenida mediante una tabla de valores. Dicha recta divide al plano en dos zonas (semiplanos).

3º) Elegimos un punto de cualquiera de estos semiplanos y sustituimos en la inecuación de partida.

4º) Si el punto verifica la inecuación, el semiplano solución será la zona donde se encuentra dicho punto. En caso contrario,será la otra.

5º) Los puntos sobre la recta forman parte de la solución siempre y cuando en la inecuación de partida tengamos los símbolos $\geq$ **o** $\leq$

Importante

El **conjunto solución** de un sistema de inecuaciones lineales se obtiene como intersección de las soluciones obtenidas para cada una de las inecuaciones que lo forman.

Al conjunto solución también se le llama **región factible**.