INSTITUTO de ENSEÑANZAS a DISTANCIA de ANDALUCÍA

PAU

Mayores de 25 años

Contenidos

Matemáticas

Álgebra. El mundo de X: Resumen unidades 1 y 2.

1. Números enteros y racionales

En este punto repasamos los distintos conjuntos de números. Los naturales, los enteros y los racionales.

Importante

El conjunto de los números naturales, que lo representaremos por $\mathbb{N}$, está formado por los números:

$$\boxed{\mathbb{N} = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots\}}$$

Importante

Los números enteros

El conjunto formado por los números naturales y los negativos es el conjunto de los números enteros, que se designan o escriben con la letra $\mathbb{Z}$, de modo que se tiene:

$$\boxed{\mathbb{Z} = \{\cdots,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots\}}$$

Importante

A la hora de hacer operaciones combinadas, recuerda la prioridad de las operaciones, que es la siguiente, siempre de izquierda a derecha:

1. Operaciones con paréntesis.
2. Operaciones con corchetes.
3. Potencias y raíces (que las estudiarás en este mismo tema).
4. Multiplicación y división.
5. Sumas y restas.

Importante

Decimos que un número entero **a es múltiplo de b** (o que b es divisor de a) si al dividir a entre b la división es exacta.

Por ejemplo, 60 es múltiplo de 12 (o 12 es divisor de 60) ya que 60 : 12 = 5. También se dice que 60 es divisible por 12.

Se observa que 60 = 12 · 5. Cuando un número entero a se escribe como una multiplicación de otros enteros (a = b · c), se dice que los números b y c son **factores** del número a, que es un número **compuesto**.

Importante

Un número **primo** es aquel que sólo tiene como divisores al 1 y a él mismo

Los números que no son primos se les llama **compuestos**.

Se puede decir que todo número compuesto tiene más de dos divisores.

Importante

Todo número compuesto se descompone en producto de números primos de forma única (no teniendo en cuenta el orden de los factores, ni los signos, ni las unidades 1). A la descomposición de un número en factores primos también se le llama **factorización** o factorizar el número.

Importante

El máximo común divisor (m.c.d.) de varios números enteros es el mayor de los divisores comunes a todos ellos.

Se llama mínimo común múltiplo (m.c.m.) de varios números enteros al menor de los múltiplos comunes a todos ellos.

Los pasos a seguir en el cálculo del m.c.d. de varios números enteros son:

1. Se descompone cada uno en factores primos.
2. Cada número se expresa como producto de factores primos en forma exponencial.
3. El m.c.d. es el producto de aquellos factores primos comunes a todos ellos tomados con su menor exponente.

Los pasos a seguir en el cálculo del m.c.m. de varios números son:

1. Se descompone cada uno en factores primos.
2. Cada número se expresa como producto de factores primos en forma exponencial.
3. El m.c.m. es el producto de aquellos factores primos comunes y no comunes a todos ellos tomados con su mayor exponente.

Importante

En la actualidad, definimos fracción como el cociente entre dos números enteros $\frac{m}{n}$, en donde n nunca puede ser cero.

Los números racionales.
El conjunto de números formado por todos los números naturales, los enteros, y además, todas las fracciones que podemos hacer con ellos, recibe el nombre de conjunto de los números **racionales**, y se designa por $\mathbb{Q}$:

Y los números decimales.
Si hacemos la división de una fracción, puede que esta sea exacta o puede que nos de decimales. En tal caso, podemos obtener tres tipos de **números decimales**.

$\frac{13}{2}=6.5$; al que llamaremos número decimal exacto, porque tiene un número finito de decimales.

$\frac{13}{3}=4.333333...=4.\widehat{3}$; o sea, los decimales no acaban, son infinitos, pero se repiten sin cesar, esto es, siguen un periodo; este es un número decimal periódico puro, ya que su periodo empieza justo después de la coma decimal.

$\frac{13}{6}=2.16666...=2.1\widehat{6}$; o sea, igual que antes, solo que el periodo no empieza justo después de la coma; este es un número decimal periódico mixto.

Importante

Para comprobar si dos fracciones son **equivalentes**, se multiplican sus términos en cruz; cuando el producto de extremos es igual al producto de los medios, las fracciones son equivalentes y por tanto definen el mismo número racional.

$$\boxed{\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow a\cdot d=b\cdot c}$$

O lo que es lo mismo, si en una fracción se multiplica o se divide el numerador y el denominador por un mismo número distinto de cero, se obtiene una fracción equivalente a la original:

$$\boxed{\frac{a}{b}=\frac{a\cdot k}{b\cdot k}\wedge\frac{a}{b}=\frac{a:k}{b:k}\text{ donde }k\neq 0}$$

Simplificar una fracción es dividir el numerador y el denominador por un mismo número, de forma que se obtiene una fracción equivalente con números más pequeños. Una fracción es irreducible (no admite simplificación) cuando el numerador y el denominador son primos entre sí. Por ejemplo $\frac{3}{5}$ o $\frac{9}{4}$ son fracciones irreducibles.
Las fracciones en las que el numerador es un número menor que el denominador, se denominan fracciones propias.

Importante

Para sumar o restar fracciones lo primero es expresarlas con un denominador común, de manera que **la suma o resta de dos fracciones que tienen igual denominador** es otra fracción que tiene:

- por numerador, la suma o resta de los numeradores.
- por denominador, el común a ambas fracciones.

$$\boxed{\frac{a}{b}\pm\frac{c}{b}=\frac{a\pm c}{b}}$$

Si no tienen igual denominador, también puede optarse por la siguiente fórmula, que implícitamente las transforma en fracciones equivalentes como has visto en el punto anteriores.

$$\boxed{\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d\pm b\cdot c}{b\cdot d}}$$

Importante

El producto de dos fracciones es otra fracción que tiene por numerador el producto de los numeradores y por denominador el producto de los denominadores:

$$\boxed{\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}}$$

El cociente o división de dos fracciones es otra fracción que tiene por numerador el producto de los extremos, y por denominador el producto de los medios:
o equivalentemente

$$\boxed{\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}}$$

Importante

Dado un número a y un número natural n, llamamos **potencia de base a y exponente n**, al número

$$a^n = a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a\ldots\cdot a \text{ (n veces)}$$

que se consigue multiplicando la base a, por sí misma tantas veces como indique el exponente n.

Ejemplo

$$2^4 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = 16;\ 6^5 = 6\cdot 6\cdot 6\cdot 6\cdot 6 = 7776;\ 4^8 = 4\cdot 4\cdot 4\cdot 4\cdot 4\cdot 4\cdot 4\cdot 4 = 65536$$

La potencia x^2 se llama **cuadrado** y la potencia x^3 se llama **cubo**. Las siguientes se llaman potencia cuarta, quinta, sexta... En general, x^n se llama **enésima potencia** o **n-ésima potencia**.

Importante

La radicación u obtención de raíces es la operación contraria a elevar un número a una potencia. Se expresan con el símbolo radical: $\sqrt[n]{a}$

El valor que aparece dentro del símbolo radical se llama **radicando**, y la cantidad que aparece encima del radical se llama índice de la raíz. Esta expresión nos indica el número que al elevarlo a n nos de el número a, es decir: $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow a = b^n$

Cuando en un radical no se expresa el índice, por convenio se establece que se está calculando una raíz cuadrada. Es decir, se escribe $\sqrt{4}$ en lugar de $\sqrt[2]{4}$.

Importante

Propiedades de las potencias de exponente natural

En la siguiente tabla están resumidas las propiedades de las potencias vistas anteriormente:

Producto de potencias de la misma base	$a^m \,.\, a^n = a^{m+n}$
Cociente de potencias de la misma base	$a^m / a^n = a^{m-n}$
Potencia de potencia	$(a^m)^n = a^{m\cdot n}$
Producto de potencias del mismo exponente	$a^m \cdot b^m = (a\cdot b)^m$
Cociente de potencias del mismo exponente	$a^m / b^m = (a / b)^m$

Importante

Propiedades de las potencias de exponente entero

Las potencias de exponente entero verifican las mismas propiedades que las potencias de exponente natural. Además de estas, también verifican la propiedad vista más arriba, que resumimos en la siguiente tabla, en la que aparece también la importante propiedad de una potencia con exponente cero:

Potencia con exponente cero	$a^0 = 1$
Potencia con exponente cero	$a^{-n} = \frac{1}{n}$

Otra propiedad de las potencias, aunque puede parecer obvia, hay que tenerla clara y es que $a^1 = a$

Importante

Propiedades de las potencias de exponente fraccionario

Las potencias de exponente fraccionario heredan las mismas propiedades que las vistas en los apartados anteriores. Además añaden la que acabamos de deducir:

Potencia de exponente fraccionario	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Importante

Las principales propiedades que verifican las raíces son las que se indican en la siguiente tabla, y se deducen al aplicar las propiedades de las potencias:

Producto de raíces del mismo índice	$\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a \cdot b}$
Cociente de raíces del mismo índice	$\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}}$
Raíz de una raíz	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$
Raíz de una potencia	$\sqrt[m]{a^n} = \left(\sqrt[m]{a}\right)^n$
Simplificación	$\sqrt[m \cdot h]{a^{n \cdot h}} = \sqrt[m]{a^n}$

De la propiedad de simplificación se deduce otra propiedad que aplicamos continuamente: $\sqrt[m]{a^m} = a$

Importante

Se llama racionalizar una fracción con radicales en el denominador, al proceso de convertirla en otra fracción equivalente sin radicales en el denominador.

2. Potenciación y radicación. Números reales.

En este punto los números iracionales, que junto los racionales forman el conjunto de los reales. Veremos los intervalos en la recta real y el valor absoluto.

Terminaremos con la expresión decimla y la notación científica.

Importante

Llamamos **números irracionales** a los números decimales infinitos no periódicos que no se pueden expresar como el cociente de dos números enteros.

Importante

Los números irracionales se clasifican en dos tipos:

- **Números algebraicos:** Resultan de la solución de alguna ecuación algebraica con coeficientes enteros. Todas las raíces no exactas de cualquier orden son irracionales algebraicos. Por ejemplo, el número áureo es una de las raíces de la ecuación algebraica, por lo que es un número irracional algebraico.
- **Números trascendentes:** No son solución de alguna ecuación algebraica con coeficientes enteros. Provienen de las llamadas funciones trascendentes (trigonométricas, logarítmicas y exponenciales, etc.). También surgen al escribir números decimales no periódicos al azar o con un patrón que no lleva periodo definido, respectivamente, como los dos siguientes: 0,19365027844375... o 0,10100100010000...

Los llamados números trascendentes tienen especial relevancia ya que no pueden ser solución de ninguna ecuación algebraica. Los números pi (π) y e son irracionales trascendentes, puesto que no pueden expresarse mediante radicales.

Fuente: Wikipedia

Importante

Repasando lo estudiado en el tema 1, los conjuntos numéricos que conocemos hasta ahora son los siguientes:

- El conjunto de los números naturales, que se designa por la letra N.
- El conjunto de los números enteros, formado por el conjunto de los números naturales o enteros positivos y los enteros negativos, que se designa por la letra Z.
- El conjunto de los números racionales, formado por el conjunto de los números enteros y las fracciones cuyo cociente no es un entero, que se designa con la letra Q.
- El conjunto de los números irracionales que hemos empezado a ver al principio de este tema, que se designa por la letra I .
- La unión del conjunto de los números racionales y el de los irracionales forma el conjunto de los números reales y se designa por la letra R.

En el siguiente gráfico vemos una representación de los distintos conjuntos de números que conocemos mediante diagramas de Venn.

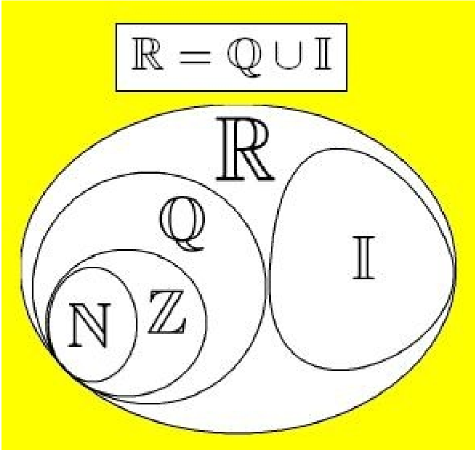


Imagen en diccio-mates.blogspot.com bajo CC

Importante

Intervalos y semirectas en la recta real

Utilizamos los intervalos para designar tramos de la recta real. Los intervalos reales pueden ser de diferentes tipos, según los extremos se incluyan o no en el intervalo:

Intervalo abierto

- $(a,b) = a<x<b$ Son todos los números reales comprendidos entre a y b sin incluir ni a ni b.

Intervalo cerrado

- $[a,b] = a \leq x \leq b$ Son todos los números reales comprendidos entre a y b ambos incluidos.

Intervalos semiabiertos:

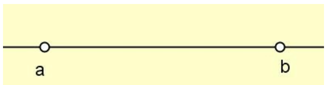
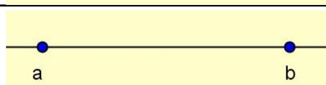
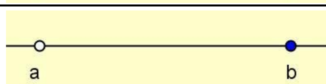
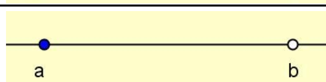
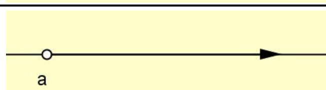
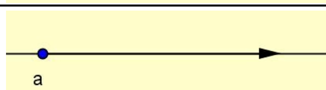
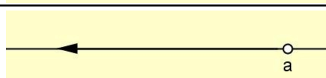
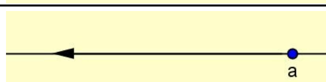
- $[a,b) = a \leq x < b$ Son todos los números reales comprendidos entre a y b incluido a pero no b.
- $(a,b] = a < x \leq b$ Son todos los números reales comprendidos entre a y b incluido b pero no a.

Semirrectas:

- $(-\infty,a) = x<a$ Son todos los números reales menores que a.
- $(-\infty,a] = x \leq a$ Son todos los números reales menores o iguales que a.
- $(a,\infty) = x>a$ Son todos los números reales mayores que a
- $[a,\infty) = x \geq a$ Son todos los números reales mayores o iguales que a.

En ocasiones queremos representar varios intervalos, para ello utilizamos el símbolo "$\cup$" que significa "unión de conjuntos". Por ejemplo, queremos representar el conjunto numérico representado por los intervalos (0,2) y (2,10) y sin incluir el 2, esto se puede representar de esta forma: $(0,2)\cup(2,10)$.

Importante

Nombre	Intervalo	Desigualdad	Representación Gráfica
Intervalo abierto	(a,b)	a<x<b	
Intervalo cerrado	[a,b]	$a \leq x \leq b$	
Intervalos semiabiertos	(a,b]	$a<x \leq b$	
	[a,b)	$a \leq x<b$	
Semirrectas	$(a,+\infty)$	$a<x$	
	$[a,+\infty)$	$a \leq x$	
	$(-\infty,a)$	$a>x$	
	$(-\infty,a]$	$a \geq x$	

Importante

El valor absoluto de un número x se representa por |x| y es:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Importante

Error absoluto

Cuando aproximamos estamos cometiendo un error, siendo este la diferencia entre el valor exacto y el aproximado. Este error se llama absoluto y lo denotaremos por E_a , y como hemos explicado su valor es:

$$\boxed{E_a = x - x^*}$$

Según el signo de podemos distinguir entre error por exceso o por defecto:

- Si E_a error por defecto; la aproximación es más pequeña que el valor real.
- Si E_a error por exceso; la aproximación es mayor que el valor real.

Importante

Error relativo

El error relativo en la aproximación es el cociente entre el error absoluto y el valor exacto, se denota como E_r .

$$\boxed{E_r = \frac{E_a}{x}}$$

Lo mas frecuente es denotarlo en tanto por ciento, es decir, multiplicando por cien el resultado obtenido en la división $E_r \cdot 100$

Importante

Truncamiento

El truncamiento consiste en cortar el número exacto sin preocuparnos de cómo continúa la expresión decimal después.

Ejemplo:

Jesús tiene en realidad 43,5265658 años pero el solo responde 43 . Lo que acaba de hacer es un truncamiento.

Importante

Redondeo

En el redondeo la aproximación puede ser por defecto o por exceso, depende del valor de la cifra siguiente a la que aproximamos.

De esta forma:

- Si la cifra siguiente al orden de aproximación es menor que 5 la aproximación por redondeo es la misma que la de truncamiento y por tanto la aproximación es por defecto.
- Si la cifra siguiente al orden de aproximación es mayor o igual que 5 la aproximación por redondeo es por exceso, con lo que sumamos una unidad a la última cifra decimal que ponemos.

Importante

Una cantidad se expresa en notación científica como un número por una potencia de 10 (de exponente positivo o negativo). Dicho número tiene que cumplir unas condiciones:

1. Si es entero tiene que tener una sola cifra, por ejemplo: .
2. Si es decimal, la parte entera tiene que tener una sola cifra del 1 al 9, es decir, la parte entera no puede ser cero.

Por ejemplo la cantidad $0.75·10^9$ no está expresada en notación científica pues la parte entera del número es un cero. Sin embargo la cantidad $7.5·10^8$ sí está bien expresada en notación científica pues la parte entera del número es una cifra comprendida entre 1 y 9.

Importante

Vamos a explicar las operaciones con notación científica

Producto

$(2,35·10^{23}) ·(6,43·10^{26})=(2,35·6,43)·(10^{23}·10^{26})= 15.1105·10^{49}=1,51105·10^{50}$

Cociente

$(2,35·10^{23}) :(6,43·10^{26})=(2,35:6,43)·(10^{23}:10^{26})= 0,36547·10^{-3} =3,6547·10^{-4}$

Suma y Resta

$(2,35·10^{23}) + (6,43·10^{26})=(2,35+6,43·10^{3})·10^{23}= (2,35+6430)·10^{23} = 6432,35 ·10^{23}=6,43235·10^{26}$

$(2,35·10^{23}) - (6,43·10^{26})=(2,35-6,43·10^{3})·10^{23}= (2,35-6430)·10^{23} = -6427,65 ·10^{23}=-6.42765·10^{26}$

3. Logaritmos y exponenciales. Triángulo de Tartaglia.

En este punto repasamos los logaritmos junto a los números combinatorios.

Importante

Se llama **logaritmo en base 10 del número x** al exponente al que hay que elevar 10 para obtener dicho número.

Importante

Se llama **logaritmo en base a del número x** al exponente b al que hay que elevar la base para obtener dicho número.

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$
$$\text{con } a>0 \text{ y } a\neq 1$$

Si no se indica ninguna base, hacermos referencias a logaritmos en base 10.

Importante

Se llama **logaritmo neperiano** o **logaritmo en base e** al logaritmo cuya base es el número e = 2,718281. Lo representamos por L o Ln.

Importante

Propiedades

Propiedades
$\log_a 1=0$
$\log_a a=1$
$\log_a a^n=n$

Estas propiedades son muy fáciles de recordar, tan solo debes pensar en la definición de logaritmos.

Veamos la primera propiedad $\log_a 1$ ¿Cuál es el exponente al que debemos elevar a un número para que el resultado sea 0? Recuerda las propiedades de los número exponenciales. Cualquier número elevado a 0 es 1, por lo que $\log_a 1 = 0$. Puedes razonar igual con el resto de las propiedades.

Importante

Operaciones
El logaritmo de un producto es la suma de los logaritmos $\log_a(p\cdot q) = \log_a p+\log_a q$

El logaritmo de un cociente es la diferencia de los logaritmos $log_a \frac{p}{q} = log_a p - log_a q$
El logaritmo de una potencia es el exponente multiplicado por el logaritmo de la base $log_a p^n = n \cdot log_a p$
El logaritmo de una raíz es el logaritmo del radicando dividido por el índice $log_a \sqrt[n]{p} = \frac{log_a p}{n}$

Importante

El factorial de un número entero positivo n, denotado por n!, es el resueltado de multiplicar el todos los números enteros positivos desde 1 hasta el propio número. Es decir:

$$\boxed{n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

Importante

Propiedades

1. $(n-1)! = \frac{n!}{n}$
2. Si m>n entonces $\frac{m!}{n!} = m \cdot (m-1) \cdot \ldots \cdot (n+1)$

Importante

El valor de 0! es 1

Importante

El número combinatorio $\binom{a}{b}$ con $a \geq b$ representa el número de subconjutos de b elementos diferentes seleccionados de un total de a elementos.

El número combinatorio $\binom{a}{b}$ viene dado por $\binom{a}{b} = \frac{a!}{b! \cdot (a-b)!}$

Importante

El **triángulo de Tartaglia** cumple una serie de propiedades

1. Si observamos cada fila, los valores en posiciones equidistantes de los extremos son iguales.
2. La primera yúltima posición de cada fila, toma el valor 1
3. Para obtener un valor de cada fila, salvo el primero y el último, tan solo tenemos que sumar los dos terminos que tiene sobre él en el triángulo.
4. Si sumamos los terminos de la fila n, obtenemos 2^n , tomando la primera fila, como la fila 0.

Importante

Binomio de Newton

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{(n-1)}a^1 b^{(n-1)} + \binom{n}{n}a^0 b^n$$

Importante

Para obtener la expresión $(a-b)^n$, simplemente desarrollamos $(a+(-b))^n$

$$(a-b)^n = \binom{n}{0}a^n(-b)^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}(-b)^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}(-b)^2 + \ldots + \binom{n}{(n-1)}a^1(-b)^{(n-1)} + \binom{n}{n}a^0(-b)^n$$

4. Expresiones algebraicas

En este apartado repasaremos los polinomios y su factorización, el valor numérico de un polinomio y peraciones. Calcularemos sus raices enteras ayudados del teorema del resto.

Se finalizará con el binomio de Newton y algunas nociones de fracciones algebraicas.

Importante

El valor numérico de un polinomio P(x) para el valor x = a es el resultado de sustituir la variable x por el valor a y efectuar las operaciones. Se representa por P(a).

Una vez que ya conoces el valor numérico de un polinomio, veremos las operaciones con polinomios. Al igual que operas con números naturales, enteros o reales, podemos trabajar con polinomios, sumando, restado, multiplicando y dividiendo estos.

Importante

- **Suma y Resta de Polinomios**

Para sumar o restar polinomios, tan solo debemos operar con los monomios que tengan la misma parte literal, recordando que la parte literal es la variable con su exponente.

Si pretendemos calcular la suma de los polinomios $P(x) = x^2-4x+4$ y $Q(x) = 3x^2+5x-3$, simplemente sumamos los coeficientes de las partes literales $P(x)+Q(x) = (1+3)x^2+(-4+5)x+(4-3) = 4x^2+x+1$.

También podemos colocar en vertical los sumandos y realizar la operación

$$\begin{array}{r} x^2-4x+4 \\ + \quad \\ 3x^2+5x-3 \\ \hline 4x^2+x+1 \end{array}$$

Para restar polinomios, actuamos de forma análoga, podemos restar los coeficientes de las partes literales o simplemente colocarlos de forma vertical y operar.

Si $M(x) = x^3-3x+5$ y $N(x) = 2x^3-x^2+4x-2$, el resultado de la resta es $M(x)-N(x) = (1-2)x^3+(0-(-1))x^2+(-3-4)x+(5-(-2))=-x^3+x^2-7x+7$. También podemos operar de forma vertical

$$\begin{array}{r} x^3 \qquad -3x+5 \\ - \quad \\ 2x^3-x^2+4x-2 \\ \hline -x^3+x^2-7x+7 \end{array}$$

Importante

- **Multiplicación de polinomios**

Al multiplicar un monomio por un polinomio, tan solo debemos aplicar la propiedad distributiva.

Para multiplicar un monomio por un polinomio:

$$3x^2 \cdot (x^2 - 2x + 5) = 3x^4 - 6x^3 + 15x^2$$

Si queremnos multiplicar dos polinomios, aplicaremos reiteradamente la propiedad distribuitiva.

$$(3x^2+2x+1)\cdot(x^2-3) = 3x^2\cdot(x^2-3)+2x\cdot(x^2-3)+1\cdot(x^2-3) = 3x^4-9x^2+2x^3-6x+x^2-3 = 3x^4+2x^3-8x^2-3$$

Importante

- **División de monomios**

Dividimos los coeficientes y las partes literales.

- **División de un polinomio entre un monomio**

Dividimos cada término del polinomio entre el monomio.

Ejemplo:

- División de monomios

$$3x^5 \div 2x^2 = \frac{3x^5}{2x^2} = \frac{3}{2}x^3$$

- División de un polinomio entre un monomio

$$(3x4 - 2x3 + 3x) \div 3x = \frac{3x4 - 2x3 + 3x}{3x} = x^3 - \frac{2}{3}x^2 + 1$$

Importante

- **División de un polinomio entre un polinomio**
  - Ordenamos los polinomios según las potencias y de mayor a menor
  - Se dividen los primeros términos del dividendo y del divisor
  - El resultado obtenido se multiplica por el divisor y se resta al dividendo
  - Seguimos este procedimiento hasta que el resto sea de un grado menor que el divisor.

Ejemplo:

$$(3x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 2x - 2) \div (x^2 - 2x - 1)$$

$$\begin{array}{rrrrr|rrr}
3x^4 & -2x^3 & +4x^2 & +2x & -3 & x^2 & -2x & -1 \\ \cline{6-8}
-3x^4 & +6x^3 & +3x^2 & & & 3x^2 & +4x & +15 \\ \cline{1-5}
0 & 4x^3 & +7x^2 & +2x & -3 & & & \\
 & -4x^3 & +8x^2 & +4x & & & & \\ \cline{1-5}
 & 0 & 15x^2 & +6x & -3 & & & \\
 & & -15x^2 & +30x & +15 & & & \\ \cline{1-5}
 & & & +36x & +12 & & &
\end{array}$$

Imagen en Wikimedia Commons bajo Dominio Público

Importante

El resto de la divisíon del polinomio P(x) y el binomio (x-a) es el valor numérico del polinomio P(x) para x=a. Es decir: P(a)

Importante

Teorema del Resto

El polinomio P(x) es divisible por x=a, si x=a es una solución de P(x)= 0

Importante

Para realizar divisiones entre un polinomio P(x) y un binomio (x-a), podemos utilizar la regla de Ruffini en lugar de utilizar el métido clásico de división de polinomios.

Veamos la división de los polinomios $(x^3-2x^2+4):(x-1)$

1. Si el polinomio a dividir, no es completo, añadimos los términos con coeficientes .Pasamos de x^3-2x^2+4 a $x^3-2x^2+0 \cdot x+4$
2. Indicamos los coeficientes del polinomio P(x) y en un nivel inferior el opuesto del término independiente del divisor.

	1	-2	0	4
1				

3. Bajamos a la zona inferior el primer coeficiente.

	1	-2	0	4
1				
	1			

4. Multiplicamos el coeficiente bajado por el divisor y lo colocamos bajo el segundo coeficiente

	1	-2	0	4
1		1		
	1			

5. Sumamos los términos de la segunda columna obteniendo

	1	-2	0	4
1		1		
	1	-1		

6. Repetimos el procedimiento

	1	-2	0	4
1		1	-1	
	1	-1	-1	

7. Volvemos a aplicar el mismo proceso y llegamos al siguiente esquema

	1	-2	0	4
1		1	-1	-1
	1	-1	-1	3

El cociente es el polinomio de un grado inferior al dividendo y cuyos coeficientes están en la última fila del esquema mostrado, es decir el cociente es $1 \cdot x^2 - 1 \cdot x - 1$, siendo el último número, el resto de la división.

Importante

La factorización de un polinomio es la descomposición de un polinomio en polinomios irreducibles. Se entiende por polinomio irreducible aquel que no se puede expresar como producto de polinomios de menor grado.

Debemos calcular en primer lugar una raiz entera del polinomio para convertir el polinomio $P(x)$ en $Q(x) \cdot (x-b)$. Realizando el mismo procedimiento con $Q(x)$ y reiterando el procedimiento, llegaremos a una expresión del tipo $P(x) = a(x-b)(x-c)\cdots(x-d)$

Para buscar soluciones enteras debemos buscar en los divisores del termino independiente entre el coeficiente lider.

Factoricemos el polinomio $P(x) = x^3-7x+6$.

En primer lugar buscamos los divisores del término independiente, en este caso $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$. Buscamos con la regla de Ruffini, algunas soluciones del polinomio.

	1	0	-7	6
1		1	1	-6
	1	1	-6	0

Así $P(x) = x^3-7x+6 = (x-1) \cdot (x^2+x-6)$

Actuamos ahora de modo análogo con el polinomio(x^2+x-6)

	1	1	-6
2		2	6
	1	3	0

Así $(x^2+x-6) = (x-2)\cdot(x+3)$, por lo que $P(x) = (x-1)\cdot(x-2)\cdot(x+3)$

Observacion: Si buscamos una raiz mediante Ruffini y el resto no es cero, probaremos con otra.

Importante

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} x y^{n-1} + \binom{n}{n}$$

Imagen en Wikimedia Commons bajo Dominio Público

Importante

Una fracción algebraica está formada por el cociente de dos polinomios $\frac{A(x)}{B(x)}$

Dos ejemplos de fracciones algebraicas son

$$\frac{x+1}{x^2-3x-5} \qquad \frac{x^2+3x}{6x-1}$$

La elegancia es fundamental dentro del mundo matemático por lo que las fracciones algebraicas se presentan simplificadas. Para ello, descomponemos el numerador y el denominador en factores irreducibles, eliminando los factores que coinciden.

Veamos un ejemplo, en el que simplificamos la expresión

$$\frac{x^3+2x^2-5x-6}{x^3-4x^2+x+6}$$

Factorizamos $x^3+2x^2-5x-6=(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x+3)$ y $x^3-4x^2+x+6=(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)$ para obtener

$$\frac{(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x+3)}{(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)}=\frac{x+3}{x-3}$$

Ejercicio resuelto

Simplifica la expresión algebraica

$$\frac{x^3-3x^2+2x}{x^3+2x^2-3x}$$

Factorizamos el numerador $(x^3-3x^2+2x)=x\cdot(x^2-3x+2)=x\cdot(x-1)\cdot(x-2)$ y el denominador $(x^3+2x^2-3x)=x\cdot(x^2+2x-3)=x\cdot(x-1)\cdot(x+3)$. Por lo que obtenemos la expresión

$$\frac{x^3-3x^2+2x}{x^3+2x^2-3x}=\frac{x\cdot(x-1)\cdot(x-3)}{x\cdot(x-1)\cdot(x+3)}=\frac{x-3}{x+3}$$

Ejercicio resuelto

Simplifica esta otra expresión algebraica

$$\frac{x-1}{x^2-1}$$

El resultado es $\frac{1}{x+1}$

Importante

Suma y resta de fracciones

- Fraciones con igual denominador.

La suma o resta de fracciones con idéntico denominador, es una fracción cuyo numerador es la suma o resta de los numeradores y cuyo denominador es el mismo denominador de las fracciones. Es decir:

$$\boxed{\frac{P(x)}{R(x)} \pm \frac{Q(x)}{R(x)} = \frac{P(x) \pm Q(x)}{R(x)}}$$

- Fracciones con distinto denominador.

Si las fracciones algebraicas tienen diferente denominador, construiremos nuevas fracciones equivalentes con identicos denominador, siendo este el m.c.m. de los denominadores. Los numeradores correspondientes a los resultado de dividir el m.c.m por el denominador, multiplicado por el numerador previo. Es decir:

$$\boxed{\frac{P(x)}{R(x)} + \frac{Q(x)}{S(x)}}$$

y sea $M(x)$ el m.c.m. de $R(x)$ y $S(x)$

El resultado obtenido es

$$\boxed{\frac{\frac{M(x)}{R(x)} \cdot P(x) + \frac{M(x)}{S(x)} \cdot Q(x)}{M(x)}}$$

Análogamente se opera con la resta.

Importante

- Multiplicación de fracciones algebraicas

Al multiplicar dos fracciones algebraicas, obtenemos una nueva fracción algebraica cuyo numerador es el producto de los dos numeradores y el denominador el producto de los denominadores.

$$\boxed{\frac{P(x)}{R(x)} \cdot \frac{Q(x)}{S(x)} = \frac{P(x) \cdot Q(x)}{R(x) \cdot S(x)}}$$

Importante

Para dividir dos fracciones algebraicas, multiplicamos la primera fracción algebraica por la inversa de la segunda.

$$\boxed{\frac{P(x)}{R(x)} : \frac{Q(x)}{S(x)} = \frac{P(x)}{R(x)} \cdot \frac{S(x)}{Q(x)}}$$

5. Ecuaciones

En este punto repaseremos las ecuaciones de primer y segundo grado. También veremos las ecuaciones bicuadradas. Terminaremos con las ecuaciones exponenciales y logarítmicas.

Una ecuación se llama de primer grado si se puede expresar como una igualdad entre polinomios de grado 1:

$$ax+b=0; a\neq 0 \Rightarrow x=-\frac{b}{a}$$

Primero vamos resolver una ecuación de primer grado sencilla por ejemplo:

$$4x-3=7+2x$$

Lo primero que tenemos que conseguir es una ecuación equivalente que tenga agrupados todos los términos con x a un lado de la igualdad y al otro sólo las constantes.

Para agruparlos hay que cambiar términos de posición, para ello hay que tener en cuenta que los términos que estén sumando a un lado de la igualdad pasan al otro lado restando, y al revés, aquellos que estén restado pasan al lado opuesto sumando. A este proceso se le llama aplicar la *"regla de la suma"*

$$4x-2x=7-3$$

Operamos para que nos quede una ecuación mas sencilla:

$$2x=4$$

Y por último como para resolver la ecuación tenemos que dejar la incógnita despejada, el 2 que multiplica a la x a la izquierda pasa a la derecha dividiendo. A este proceso se le llama aplicar la *"regla del producto"*

$$x=\frac{4}{2}$$

De forma que la solución de la ecuación queda:

$$x=2$$

Ahora resolvamos una ecuación de primer grado un poco más difícil, con paréntesis y denominadores:

$$\frac{2(x-3)}{4}-\frac{x+5}{3}=\frac{2+x}{6}-\frac{5(x+1)}{12}$$

En primer lugar calculamos el m.c.m (4, 3, 6, 12)=12 y multiplicamos cada una de las fracciones por este número:

$$12\cdot\frac{2(x-3)}{4}-12\cdot\frac{x+5}{3}=12\cdot\frac{2+x}{6}-12\cdot\frac{5(x+1)}{12}$$

De esta forma quedaría:

$$3\cdot 2\cdot(x-3)-4\cdot(x+5)=2\cdot(2+x)-5\cdot(x+1)$$

Multiplicamos y quitamos los parétesis:

$$6x-18-4x-20=4+2x-5x-5$$

Agrupamos a un lado todos los términos que tengan x y al otro el resto de términos, teniendo en cuenta que los términos que cambian de lugar respecto al igual cambian de signo:

$$6x-4x-2x+5x=4-5+18+20$$

Por último operamos y despejamos la x:

$$5x=37 \Rightarrow x=\frac{37}{5}$$

Importante

Si una ecuación polinómica se puede reducir a la forma $ax^2+bx+c=0$ se denomina de segundo grado o cuadrática.
Este tipo de ecuación puede tener dos, una o ninguna solución real y para resolverla se utiliza la fórmula:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Importante

Si la expresión resultante es de la forma $ax^2+bx=0$ ó $ax^2+c=0$ se les denomina ecuaciones de segundo grado incompletas.

Ambas ecuaciones se pueden resolver aplicando la fórmula general, en el primer caso sustituyendo c=0 y en el segundo caso sustituyendo b=0.

Sin embargo, ambas se pueden resolver de una forma más sencilla:

- Si tenemos la expresión $ax^2+bx=0$, como todos los términos de la izquierda contienen a la x se extrae esta como factor común: x·(ax+b)=0, es decir, tenemos el producto de dos factores igualado a cero. Eso significa que uno de los dos debe valer cero, si es el primero obtenemos la primera solución x=0. Si es el segundo tendríamos que ax+b=0 que es una ecuación de primer grado bastante sencilla de resolver y queda $x=-\frac{b}{a}$. Conclusión las soluciones serían:

$$x_1=0.x_2=-\frac{b}{a}$$

- Si tenemos la expresión $ax^2+c=0$ en primer lugar despejamos la x^2:

ax2=-c ; $x^2=-\frac{c}{a}$

A continuación aplicamos raíz cuadrada a ambos lados de la igualdad obteniendo las dos soluciones una positiva y la otra negativa:

$$x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

5.3. Ecuaciones bicuadradas

Las ecuaciones bicuadradas son de la forma:

$$ax^4+bx^2+c=0$$

El método de resolución de este tipo de ecuaciones se fundamenta en el de la ecuación de segundo grado.

Veamos un ejemplo, resolvamos la ecuación:

$$x^4-10x^2+9=0$$

En primer lugar aplicamos lo que se llama *"cambio de variable"*, utilizando el cambio $t=x^2$ quedaría la expresión:

$$t^2-10t+9=0$$

ya que $x^4=(x^2)^2=t^2$, esta ecuación ya es de segundo grado y la resolvemos como tal:

$$t=\frac{10\pm\sqrt{100-36}}{2}=\frac{10\pm\sqrt{64}}{2}=\frac{10\pm 8}{2}=\begin{Bmatrix} t_1=9 \\ t_2=1 \end{Bmatrix}$$

A continuación deshacemos el cambio quedando:

$$t=9\Rightarrow x^2=9\Rightarrow x=\pm\sqrt{9}=\pm 3; t=1\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\pm\sqrt{1}=\pm 1$$

Por tanto las soluciones son 4: x=-3, -1, 1 y 3.

Las ecuaciones exponenciales son aquellas en las que la incógnita aparece en el exponente, para resolverlas se aplican las propiedades de las potencias o un cambio de variable hasta llegar a una ecuación de la forma $a^x=b$. Esta se resolverá bien directamente (si b se puede poner como una potencia de base a, igualando los exponentes), bien tomando logaritmos.

Veamos distintos tipos de ecuaciones exponenciales y ejmplos de como resolverlas:

- El tipo más sencillo es de la forma $a^x=b$ donde a y b se pueden poner como potencias con la misma base, por ejemplo:

$$2^x=512 \Rightarrow 2^x=2^9 \Rightarrow x=9$$

- No tan evidente resulta cuando en la ecuación $a^x=b$ a y b no se pueden poner como potencias de la misma base. En este caso aplicamos la definición de logaritmo como mostramos en el ejemplo siguiente:

$3^x=25$, aplicando la definición de logaritmo quedaría: $x=\log_3 25$

- Si la expresión exponencial va acompañada de un factor de la forma: $c\cdot a^x=b$ despejamos $a^x=b/c$ y resolvemos la ecuación resultante como alguno de los casos anteriores. Por ejemplo:

$$5\cdot 4^x=80 \Rightarrow 4^x=\frac{80}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4^x=16 \Rightarrow 4^x=4^2 \Rightarrow x=2$$

Por último veamos una un poco más compleja:

$$\left(2^{x+5}\right)^x=\frac{1}{2^6} \Rightarrow 2^{(x+5)\cdot x}=2^{-6} \Rightarrow 2^{x^2+5x}=2^{-6} \Rightarrow x^2+5x=-6 \Rightarrow x^2+5x+6=0 \Rightarrow x_1=-2; x_2=-3$$

Cuando en la ecuación aparecen varios términos exponenciales sumando o restando tenemos que recurrir al cambio de variable. Para ver más claro este tipo de ecuación resolvamos algunos ejemplos:

$$3^{x+2}+5\cdot 3^{x+1}=9\cdot 3^{x-1}+7$$

Primero trabajamos con las propiedades de las potencias para que la única expresión exponencial que aparezca sea 3^x :

$$3^x\cdot 3^2+5\cdot 3^x\cdot 3=9\cdot\frac{3^x}{3^1}+7 \Rightarrow 9\cdot 3^x+15\cdot 3^x=3\cdot 3^x+7$$

Para que resulte más sencillo trabajar con la anterior expresión hacemos el cambio de variable $t=3^x$, de manera que la expresión quedaría:

$$9t+15t=3t+7$$

Que no es más que una ecuación polinómica de primer grado muy sencilla de resolver:

$$21t=7 \Rightarrow t=\frac{7}{21} \Rightarrow t=\frac{1}{3} \Rightarrow t=3^{-1}$$

Una vez resuelta, se deshace el cambio de variable y calculamos el valor de x:

$$3^x=3^{-1} \Rightarrow x=-1$$

Veamos otro ejemplo:

$$25^x+5=30\cdot 5^{x-1}$$

Trabajamos igual que con la ecuación anterior, aunque en este caso hay que tener en cuenta que las exponenciales no tienen la misma base. Lo que hacemos es sustituir 25 por 5^2 y dejar todo en función de 5^x :

$$\left(5^2\right)^x + 5 = 30 \cdot \frac{5^x}{5} \Rightarrow \left(5^x\right)^2 + 5 = 6 \cdot 5^x$$

Hacemos el cambio de variable $t=5^x$ y resolvemos la ecuación de segundo grado resultante:

$$t^2 + 5 = 6t \Rightarrow t^2 - 6t + 5 = 0 \Rightarrow t_1 = 1; t_2 = 5$$

Deshaciendo el cambio quedaría:

$$5^x = 1 \Rightarrow 5^x = 5^0 \Rightarrow x = 0; 5^x = 5 \Rightarrow 5^x = 5^1 \Rightarrow x = 1$$

5.5. Ecuaciones logarítmicas

Las ecuaciones logarítmicas son aquellas en las que la incógnita aparece en el argumento o en la base del logaritmo. Para resolverlas habrá que aplicar la definición y las propiedades de los logarítmos y pasarla a una expresión algebraica.

Cuando resolvemos esta ecuación hay que comprobar si las soluciones obtenidas sirven en la ecuación logarítmica ya que la base de un logaritmo puede ser cualquier número positivo menos el 1 y el argumeto tiene que ser un número positivo.

Veamos algunos ejemplos:

- $\log_x 16=4$, para resolver esta ecuación tan sólo hay que aplicar la definición de logaritmo y nos queda: $x^4=16 \Rightarrow x=\sqrt[4]{16}=2$. En realidad -2 también sería solución de la ecuación algebraica pero por definición la base de un logaritmo no puede ser un número negativo.

- $2log(x-1)-log(2x-3)=log(\frac{2x-1}{3})$

Primero aplicamos las propiedades de los logaritmos hasta quedarnos a ambos lados de la igualdad con un sólo logaritmo:

$$log[(x-1)^2]-log(2x-3)=log(\frac{2x-1}{3}) \Rightarrow log[\frac{(x-1)^2}{2x-3}]=log(\frac{2x-1}{3})$$

De esta forma los argumentos son iguales por lo que queda la ecuación:

$$\frac{(x-1)^2}{2x-3}=\frac{2x-1}{3} \Rightarrow (x-1)^2 \cdot 3=(2x-1)\cdot(2x-3) \Rightarrow (x^2-2x+1)\cdot 3=4x^2-2x-6x+3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x^2-6x+3=4x^2-8x+3 \Rightarrow -x^2+2x=0$$

Las soluciones de esta ecuación son x=0 y x=2. x=0 no puede ser solución de la ecuación logarítmica porque cuando sustituimos en la expresión log(x-1) el argumento saldría negativo, x=2 no da problemas en ninguno de los tres logarítmos, por tanto la solución de la ecuación es x=2.

- $ln(x+2)+ln(x-2)=2ln2+ln3+ln(x-3)$

Primero hay que indicar que la base del logaritmo no influye en la resolución de la ecuación, por tanto comenzamos aplicando las propiedades de los logaritmos para agruparlos a ambos lados de la igualdad:

$$ln[(x+2)\cdot(x-2)]=ln(2^2)+ln(3\cdot(x-3)) \Rightarrow ln(x^2-4)=ln[4\cdot(3x-9)] \Rightarrow ln(x^2-4)=ln(12x-36)$$

Igualamos los argumentos y resolvelmos la ecuación resultante:

$$x^2-4=12x-36 \Rightarrow x^2-12x+32=0$$

Las soluciones de esta ecuación son $x_1=4$ y $x_2=8$. Ambas soluciones son válidas para la ecuación logarítmica de partida.

6. El mundo de x: sistemas de ecuaciones. Inecuaciones

En este punto repasaremos los sistemas de ecuaciones de dos y tres incógnitas. Terminaremos con las inecuaciones y sistemas de inecuaciones.

Importante

Llamamos ecuación lineal con dos incógnitas a una ecuación del tipo: $a_1x+b_1y=c_1$, donde y son números reales cualesquiera, este tipo de ecuaciones tienen infinitas soluciones con a_1 y b_1 distintos de 0

Importante

Un sistema de ecuaciones se resuelve por el método de sustitución a través de los siguientes pasos:

1. En una de las ecuaciones se despeja una de las incógnitas en función de la otra.
2. La incógnita despejada se sustituye en la otra ecuación, con lo que obtenemos una ecuación donde solo hay una incógnita.
3. Se resuelve esta ecuación obteniendo el valor de una de las incógnitas.
4. Se sustituye en la expresión hallada en el paso 1 la incógnita cuyo valor hemos obtenido en el paso 3 por este y se obtiene la otra incógnita.

Importante

Los pasos a seguir en el método de igualación son los siguientes:

1. Despejamos en las dos ecuaciones la misma incógnita.
2. Igualamos entre sí las dos incógnitas despejadas. De esa manera obtenemos una ecuación donde sólo aparece la otra incógnita.
3. Se resuelve la ecuación obtenida. Así tenemos el valor de una de las incógnitas.
4. Se sustituye la incógnita cuyo valor hemos encontrado en el paso 3. por este en cualquiera de las dos expresiones despejadas en el paso 1 y se halla el valor de la otra incógnita

Importante

El método de reducción para resolver sistema de ecuaciones se compone de los siguientes pasos:

1. Se multiplican una o las dos ecuaciones por números convenientes (que debes elegir tú) para que nos queden dos ecuaciones en las que una de las incógnitas vaya multiplicada por el mismo número cambiado de signo.
2. Se suman las dos ecuaciones término a término (ya sabes, los términos semejantes entre sí).
3. Tras el paso anterior nos queda una ecuación con una sola incógnita. La resuelves como hiciste en el tema 2.
4. El valor de la incógnita resuelta se sustituye en cualquiera de las dos ecuaciones primeras y nos queda una ecuación con una sola incógnita, la que aún no sabemos. Se resuelve y ya tienes la solución completa del sistema.

Importante

Estrategia para resolver problemas:

1. **Entender el problema**: es fundamental que leamos el enunciado del problema detenidamente para entender bien, tanto lo que en él se describe como la pregunta que se nos plantea. ¿De qué datos disponemos? ¿Cómo podemos

relacionarlos? ¿Qué matemáticas podemos aplicar? ¿Hemos resuelto algún problema similar anteriormente?

2. **Configurar un plan**: debemos buscar las variables adecuadas, relacionarlas entre ellas y con los datos conocidos. A continuación, planteamos la ecuación o ecuaciones.

3. **Ejecutar el plan**: resolvemos la ecuación o el sistema planteado utilizando el método más adecuado.

4. **Mirar hacia atrás**: comprobamos que la solución obtenida es correcta y conforme al enunciado y la situación del problema planteado. Revisamos todo el proceso.

Importante

Se llama ecuación lineal con tres incógnitas a la suma de las tres incógnitas, multiplicadas por números, e igualada la suma a otro número. Por ejemplo, 6·x-2·y+9·z=24.

Esta definición puede ampliarse a cualquier número de incógnitas. La única exigencia es que las mismas vayan multiplicadas por números y sumadas. Puede darse el caso de que las incógnitas aparezcan en distinto miembro, en ese caso basta agrupar todas en uno y en el otro el término independiente. Por ejemplo, la ecuación 6x+9z=24+2y es equivalente a la anterior.

Se llama solución de la ecuación lineal a un conjunto de valores que al sustituirlos en las incógnitas hacen que se verifique la igualdad. Por ejemplo, los valores x=2, y=3, z=2 son solución de la ecuación anterior ya que se verifica que 6·2-2·3+9·2 = 12-6+18 = 24.

Importante

Llamamos sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas a un sistema que adopta la siguiente forma:

$$\boxed{\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}}$$

Donde x,y,z son las incógnitas a resolver y los coeficientes que multiplican a las mismas números reales cualesquiera.Como en el caso de los sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas resolver un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas consiste en hallar los valores de x,y,z, en el caso de que existan, que cumplen las igualdades anteriores, por ejemplo la solución del siguiente sistema.

Importante

Para que un sistema de ecuaciones tenga una **única solución** deberemos tener al menos tantas ecuaciones como incógnitas. Por tanto si planteamos problemas con **tres incógnitas**, deberemos obtener **tres ecuaciones** para encontrar su única solución.

Importante

Decimos que dos sistemas de ecuaciones son equivalentes cuando ambos tienen la misma solución.

Importante

Propiedades de los sitemas de ecuaciones

1. Si en un sistema de ecuaciones se cambia el orden de las ecuaciones o el orden de las incógnitas el sistema resultante es equivalente al primero.
2. Si la ecuación ax+by=c se multiplica o divide por un número distinto de cero, la ecuación resultante es equivalente a la

anterior.Por ejemplo la ecuación 10x+5y=25 es equivalente a la ecuación 2x+y=5 que se ha obtenido dividiendo todos los coeficientes entre 5.
3. en un sistema a una ecuación se le suma o resta otra ecuación distinta (las cuales pueden estar multiplicadas por distintos números), el sistema resultante es equivalente al primero.

Importante

Método de Gauss

Este método consiste en transformar el sistema que queremos resolver en otro escalonado equivalente.

Para conseguirlo podemos usar las siguientes transformaciones ya vistas en el apartado anterior:

- Cambiar de orden dos ecuaciones.
- Multiplicar o dividir los dos miembros de una ecuación por un mismo número.
- Cambiar una ecuación por la suma de ésta más otra ecuación.

Si te fijas, estas transformaciones son las mismas que se aplicaban en el apartado 1.3 cuando resolvíamos un sistema por el método de reducción. Había que multiplicar las ecuaciones por números para que cuando las sumaras una de las incógnitas se fueran.

Vamos a ver con un ejemplo cómo se resuelve un sistema utilizando este método.

Importante

Un sistema de ecuaciones lineales se dice que es Compatible si tiene solución y en caso contrario se llama Incompatible.

Si el sistema tiene una única solución recibe el nombre de Compatible Determinado. Si tiene infinitas soluciones se llama Compatible Indeterminado.

Para saber el número de soluciones de un sistema lo haremos a partir de los coeficientes de las incógnitas.

$$\boxed{\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}}$$

Si $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$ El sistema tiene una única solución y se llama sistema compatible determinado (SCD).

Si $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$ El sistema no tiene solución y se llama sistema incompatible (SI).

Si $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$ El sistema tiene infinitas soluciones y se llama sistema compatible indeterminado (SCI).

Importante

Si resolvemos gráficamente un sistema de ecuaciones, es decir, si representamos gráficamente las rectas que lo forman pueden ocurrir los siguientes casos:

1. Las dos rectas se cortan en un punto, entonces, ese punto es la solución del sistema y el sistema es compatible determinado.
2. Las dos rectas son paralelas, entonces, no se cortan en ningún punto, por tanto, el sistema no tiene solución, es incompatible.
3. Las dos rectas resultan ser la misma recta, es decir, se cortan en infinitos puntos, por tanto el sistema tiene infinitas soluciones, es compatible indeterminado

Importante

Dados dos números reales cualesquiera, a y b, se pueden dar estas tres situaciones:

- $a < b$; a menor que b. A la expresión la llamamos **desigualdad**
- $a = b$; a igual que b. A la expresión la llamamos **igualdad**
- $a > b$; a mayor que b. A la expresión la llamamos **desigualdad**

Esta propiedad que cumplen todos los números reales, hace que su conjunto, el conjunto de los números reales, sea **totalmente ordenado**. Hablamos entonces, del **orden de los números reales**.

Importante

Propiedades

Sean a, b y c tres números reales.

1. Si $a<b$, entonces $a+c < b+c$ para cualquier c.
2. Si $a<b$. entonces $a \cdot c<b \cdot c$ para cualquier número $c > 0$.
3. Si $a<b$, entonces $a \cdot c>b \cdot c$ para cualquier número $c < 0$.

Las desigualdades **no** se comportan igual que las igualdades cuando multiplicamos ambos términos por un mismo número.

Importante

- Una inecuación es una desigualdad entre letras y números, relacionados mediante operaciones aritméticas. A las letras las llamaremos **incógnitas**.

Recordemos que las operaciones aritméticas son las siguiente: suma, resta, producto, división y potenciación.

- Una inecuación de primer grado con una incógnita es una inecuación con una sola incógnita, y cuyo exponente es necesariamente 1.

Importante

Llamaremos **soluciones** de una inecuación a todos los números reales que verifican la inecuación cuando sustituimos su valor en la incógnita de la misma.

Ejemplo

En la inecuación $2x-5 < 7$, el número 3 verifica la inecuación, ya que: $2 \cdot 3-5 = 1$ que es menor que 7.

También el 2 lo verifica, ya que $2 \cdot 2-5 = -1$, que también es menor que 7. Y el 1, y el 0, y el -7, y muchos más. La solución de una inecuación es, generalmente, un conjunto de infinitos números reales.

Importante

Para resolver sistemas de dos inecuaciones lineales con una incógnita seguimos los pasos siguientes:

1. Resolvemos cada inecuación por separado.
2. La solución del sistema es la intersección de las soluciones de cada una de las inecuaciones por separado.

Ejemplo

$$\begin{cases} 2x-5 < 7 \\ 3-x > 2x-5 \end{cases}$$

Aviso legal

El presente texto (en adelante, el "**Aviso Legal**") regula el acceso y el uso de los contenidos desde los que se enlaza. La utilización de estos contenidos atribuye la condición de usuario del mismo (en adelante, el "**Usuario**") e implica la aceptación plena y sin reservas de todas y cada una de las disposiciones incluidas en este Aviso Legal publicado en el momento de acceso al sitio web. Tal y como se explica más adelante, la autoría de estos materiales corresponde a un trabajo de la **Comunidad Autónoma Andaluza, Consejería de Educación (en adelante Consejería de Educación**).

Con el fin de mejorar las prestaciones de los contenidos ofrecidos, la Consejería de Educación se reservan el derecho, en cualquier momento, de forma unilateral y sin previa notificación al usuario, a modificar, ampliar o suspender temporalmente la presentación, configuración, especificaciones técnicas y servicios del sitio web que da soporte a los contenidos educativos objeto del presente Aviso Legal. En consecuencia, se recomienda al Usuario que lea atentamente el presente Aviso Legal en el momento que acceda al referido sitio web, ya que dicho Aviso puede ser modificado en cualquier momento, de conformidad con lo expuesto anteriormente.

1. Régimen de Propiedad Intelectual e Industrial sobre los contenidos del sitio web

1.1. Imagen corporativa

Todas las marcas, logotipos o signos distintivos de cualquier clase, relacionados con la imagen corporativa de la Consejería de Educación que ofrece el contenido, son propiedad de la misma y se distribuyen de forma particular según las especificaciones propias establecidas por la normativa existente al efecto.

1.2. Contenidos de producción propia

En esta obra colectiva (adecuada a lo establecido en el artículo 8 de la Ley de Propiedad Intelectual) los contenidos, tanto

Descargar PDF