



INSTITUTO de ENSEÑANZAS a DISTANCIA de ANDALUCÍA

2º de Bachillerato

**Matemáticas
II**

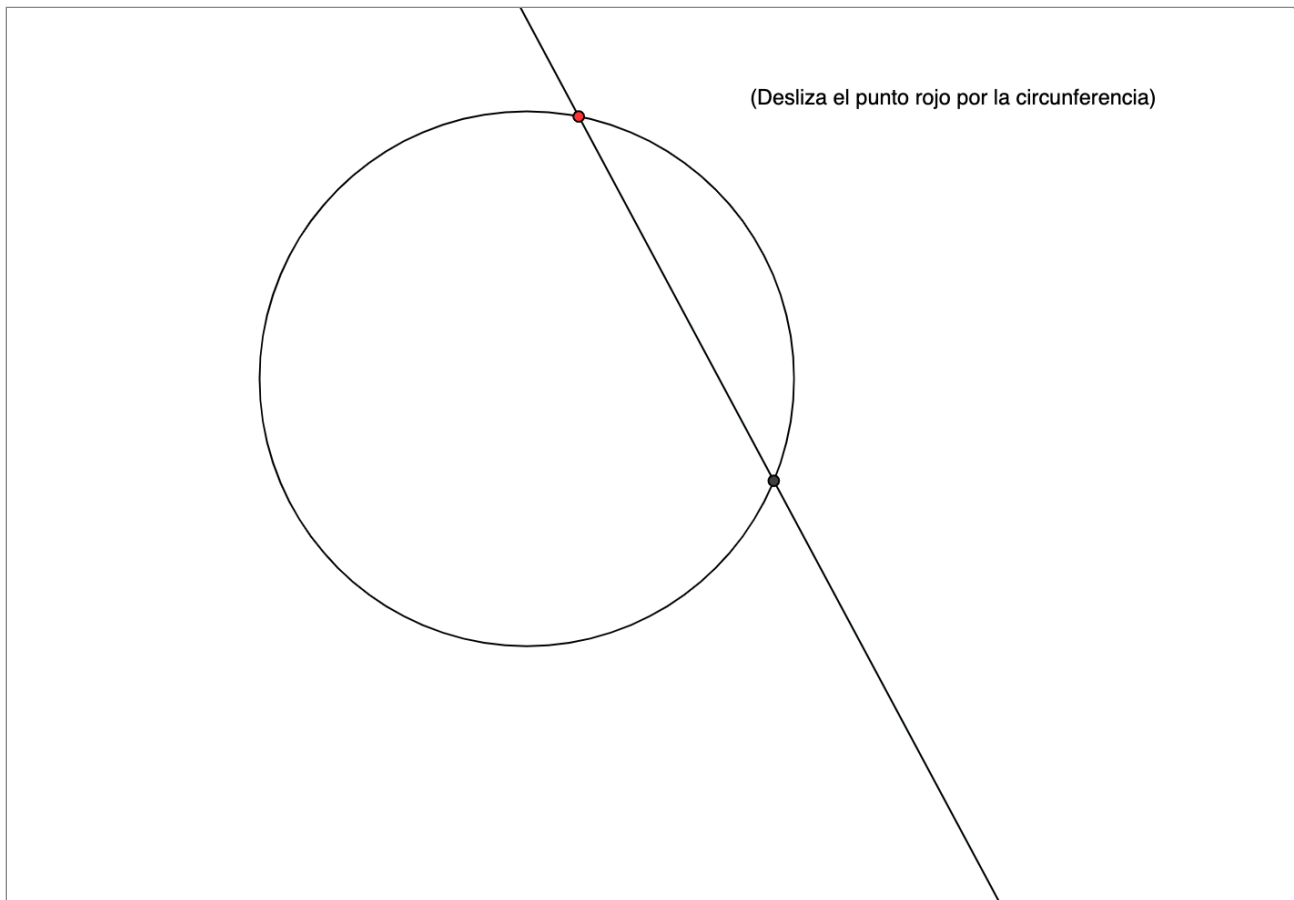
Contenidos

**Integrales:
Definición de primitiva**

1. El concepto de integral

Si tenemos una figura, uno de los procesos que podemos realizar es trazar las rectas tangentes a la misma en cada punto. Este sería un proceso hacia adelante. Pero también existe el proceso inverso, que es trazar una figura conociendo todas las rectas tangentes a la misma. Este proceso lo puedes ver en la ventana interactiva que aparece más abajo en la que se genera la figura Cardioide a partir de sus tangentes. Para ello solamente debes mover el punto rojo alrededor de la circunferencia.

Te recordamos que la interpretación geométrica de la derivada de una función es la pendiente de la recta tangente en cada punto. Conociendo estas rectas tangentes ¿podemos conocer la función a la que son tangentes? es decir, conociendo la derivada de una función, ¿podemos conocer la función de la que proviene?



1.1. Orígenes del cálculo integral

Históricamente, la noción de integral es anterior a la de derivada. Esta surge al intentar calcular el área de ciertas figuras.

Arquímedes fue el primero que da una cierta aproximación de como calcular el área que se encuentra bajo una cierta curva mediante su método de exhaución, método que consistía, básicamente, en inscribir y circunscribir poligonales en la curva o recinto en cuestión. Estas eran cada vez más cercanas y calculaba las áreas de estas poligonales como aproximación de la superficie inicial.

El cálculo integral toma un gran impulso con Newton y Leibniz en el siglo XVIII. Estos matemáticos geniales son considerados los padres del cálculo integral.

A pesar de este gran impulso que recibe el cálculo integral no se resuelve totalmente el problema hasta un siglo más tarde con Cauchy y Riemann.

um.7 Sobre hombros de gigantes; Newton y Leibnitz



Vídeo de EduMates alojado en [YouTube](#)

Para acercarnos a la idea que expone el método de exhaución te proponemos el siguiente applet de Geogebra.

A través de la siguiente imagen puedes acceder a una simulación en la que ver cómo se utiliza el método de exhaución y cómo se puede aproximar por defecto y por exceso el área delimitada por una función, el eje de abscisas y dos ordenadas a y b .

Suma superior = 17 52

Suma inferior = 14 73

Integral = 16 07



2. Primitiva de una función



Comenzamos esta parte recordando un poco las derivadas. Para ello, más abajo, hemos incluido una ventana interactiva con la que puedes recordar las derivadas de las funciones más comunes. Además, debes tener en cuenta que si tenemos una función $f(x)$, su derivada es $f'(x)$, pero si tenemos otra función $h(x) = f(x) + C$, siendo C un número cualquiera, su derivada es $h'(x) = f'(x) + 0 = f'(x)$.

Así, la derivada de una función va a ser la misma si a esa función le sumamos un número cualquiera.



Presentación propia [en PDF](#)

La pregunta que nos hacemos ahora es: si conocemos la función derivada de otra, ¿podemos conocer la función de la que es derivada?. En algunos casos es bastante sencillo de resolver. Por ejemplo, si tenemos la función $f(x) = 1$ y sabemos que esta función es derivada de otra, la función de la que es derivada es $F(x) = x$. Ya que sabemos que

$$F'(x) = 1 = f(x)$$

Pero teniendo en cuenta lo que hemos indicado más arriba, $f(x)$ también es la función derivada de la función $F(x) = x + C$, siendo C un número cualquiera.

Importante

Si tenemos una función $f(x)$ llamamos **primitiva** de $f(x)$ respecto a la variable x a la función $F(x)$ que cumple que:

$$F'(x) = f(x)$$

Tal como hemos visto, si $F(x)$ es una primitiva de la función $f(x)$, también lo es

$F(x)+C$, siendo C un número cualquiera. Por eso llamamos **integral indefinida** de $f(x)$ al conjunto de todas las primitivas de dicha función. Se representa de la siguiente forma:

$$\int f(x)dx = F(x)+C$$

Al símbolo \int se le llama integral, a la función $f(x)$ integrando y dx es la diferencial y nos indica respecto a qué variable se está hallando la integral.

Tal como hemos visto anteriormente, si tenemos la función $f(x)=1$ sabemos que:

$$\int f(x)dx = \int 1dx = x+C$$

Ejercicio resuelto

Calcula la integral de la función $f(x) = x^2$

Mostrar retroalimentación

Según sabemos, la derivada de una función del tipo $g(x) = x^n$ es $g'(x) = nx^{n-1}$

Estamos buscando una función $F(x)$ de forma que $F'(x) = f(x) = x^2$. Según lo que conocemos, $F(x)$ será parecida a la función $g(x) = x^3$ ya que $g'(x) = 3x^2$ que es parecida a $f(x)$. Solamente nos sobra el número 3. Para quitarlo, podemos hacer $F(x) = \frac{x^3}{3}$. En este caso tenemos que $F'(x) = \frac{3x^2}{3} = x^2 = f(x)$. ¡Ya lo tenemos!

Pero, recordando lo que aparece al principio $F(x) = \frac{x^3}{3} + C$ donde C es un número cualquiera. Por tanto:

$$F(x) = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$$

Reflexiona

Calcula la integral de la función

$$f(x) = x^3$$

Mostrar retroalimentación

$$F(x) = \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$$

Reflexiona

Calcula la integral de la función

$$f(x) = x^3 + x^2$$

Mostrar retroalimentación

$$F(x) = \int x^3 + x^2 dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + C$$

2.1. Nociones básicas sobre el cálculo de primitivas



Ya sabemos que la integración es el proceso inverso de la diferenciación o derivada. Por este motivo, conociendo las propiedades de las derivadas y la tabla de derivadas de las funciones, conocemos también la función integral de algunas funciones específicas sencillas.



Vídeo de Mariano Real Pérez alojado en [YouTube](#)

Ejemplo:

Una rápida lectura de la definición de primitiva nos lleva a pensar que integrar una función es el proceso inverso de derivar. Al integrar una función $f(x)$ obtenemos una nueva función $F(x)$, a la que llamaremos primitiva de la anterior, y que, al derivarla, se obtiene la función de partida. Veamos esto con un ejemplo:

Sabemos que $(x^3)' = 3x^2$, así pues:

$$\int 3x^2 dx = x^3 + C$$

donde C es una constante cualquiera.

Podemos observar que, si $f(x) = 3x^2$, tendremos que su primitiva es $F(x) = x^3 + C$, cumpliéndose que $F'(x) = f(x)$.

Comprueba lo aprendido

Dadas las siguientes integrales, seguro que ya eres capaz de asociarlas con sus respectivas primitivas a partir de la definición:

a) $\int \cos(x) dx$

b) $\int e^x dx$

c) $\int \text{sen}(x) dx$

Identifica la solución de cada una de ellas por su letra.

La solución del apartado ☐ es: $e^x + C$.

La solución del apartado ☐ es $-\cos(x) + C$.

La solución del apartado ☐ es $\text{sen}(x) + C$.

Importante

Recuerda que siempre puedes comprobar si el resultado obtenido es correcto derivando la función primitiva. Si obtienes el integrando la solución es correcta.

Te recordamos que en esta calculadora para comprobar tus cálculos. En la pestaña Derivar puedes seleccionar también integrar.

Si no te funciona correctamente pincha en [este enlace](#).

BETA

Calculadora de Derivadas e Integrales

Selecciona: Derivar o Integrar	Derivar ▼
Escribe la función	<input type="text" value="x^2"/>
<input type="button" value="Calcular"/>	



Computing...



Get this widget



BETA

Calculadora de Derivadas e Integrales

Selecciona: Derivar o Integrar

Derivar ▼

Escribe la funcion

x^2

Calcular



Computing...



Get this widget



Applet alojado en [Wolfram Alpha](#).

En este apartado vas a encontrar ejercicios propios de selectividad relacionados con los contenidos del tema.

Ejercicio resuelto

Determina la función $f(x)$ sabiendo que:

$$f'' = 6x$$

$$f'(0) = 1$$

y que

$$f(2) = 5$$

Mostrar retroalimentación

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = \int 6x \, dx = 3x^2 + c \\ f'(0) = c = 1 \end{array} \right\} f'(x) = 3x^2 + 1$$

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \int (3x^2 + 1) \, dx = x^3 + x + k \\ f(2) = 10 + k = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow k = -5$$

Por tanto: $f(x) = x^3 + x - 5$

Ejercicio resuelto

De una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se sabe que $f(0) = 2$ y que $f'(x) = 2x$. Determina f .

Mostrar retroalimentación

Calculamos todas las primitivas de $f'(x)$:

$$f(x) = \int f'(x) \, dx = \int 2x \, dx = x^2 + C$$

De todas ellas, nos interesa la que cumple que $f(0) = 2$. Luego:

De todas ellas, nos interesa la que cumple que $f(0) = 2$, luego:

$$f(0) = 0^2 + C = 2 \Rightarrow C = 2 \Rightarrow f(x) = x^2 + 2$$

Importante

Si tenemos una función $f(x)$ llamamos **primitiva** de $f(x)$ respecto a la variable x a la función $F(x)$ que cumple que:

$$F'(x) = f(x)$$

Tal como hemos visto, si $F(x)$ es una primitiva de la función $f(x)$, también lo es $F(x) + C$, siendo C un número cualquiera. Por eso llamamos **integral indefinida** de $f(x)$ al conjunto de todas las primitivas de dicha función. Se representa de la siguiente forma:

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

Al símbolo \int se le llama integral, a la función $f(x)$ integrando y dx es la diferencial y nos indica respecto a qué variable se está hallando la integral.

Importante

Recuerda que siempre puedes comprobar si el resultado obtenido es correcto derivando la función primitiva. Si obtienes el integrando la solución es correcta.

Te recordamos que en esta calculadora para comprobar tus cálculos. En la pestaña Derivar puedes seleccionar también integrar.

Si no te funciona correctamente pincha en [este enlace](#).

Applet alojado en [Wolfram Alpha](#).

Aviso Legal

El presente texto (en adelante, el "**Aviso Legal**") regula el acceso y el uso de los contenidos desde los que se enlaza. La utilización de estos contenidos atribuye la condición de usuario del mismo (en adelante, el "**Usuario**") e implica la aceptación plena y sin reservas de todas y cada una de las disposiciones incluidas en este Aviso Legal publicado en el momento de acceso al sitio web. Tal y como se explica más adelante, la autoría de estos materiales corresponde a un trabajo de la **Comunidad Autónoma Andaluza, Consejería de Educación y Deporte (en adelante Consejería de Educación y Deporte)**.

Con el fin de mejorar las prestaciones de los contenidos ofrecidos, la Consejería de Educación y Deporte se reserva el derecho, en cualquier momento, de forma unilateral y sin previa notificación al usuario, a modificar, ampliar o suspender temporalmente la presentación, configuración, especificaciones técnicas y servicios del sitio web que da soporte a los contenidos educativos objeto del presente Aviso Legal. En consecuencia, se recomienda al Usuario que lea atentamente el presente Aviso Legal en el momento que acceda al referido sitio web, ya que dicho Aviso puede ser modificado en cualquier momento, de conformidad con lo expuesto anteriormente.

Régimen de Propiedad Intelectual e Industrial sobre los contenidos del sitio
