MA1 - Tema 1.3: Aritmética: Operaciones con capitales financieros

Aritmética: Capitales financieros

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I

1º Bachillerato

Contenidos

Aritmética

Operaciones con capitales financieros

1. Introducción

Seguro que estás harto de escuchar y de ver en las noticias "el petróleo sube un 10 %, el Euríbor sube hasta el 4,3 %, la venta de casas ha bajado un 10 % respecto al año pasado..."

Y es que el dinero está presente en nuestra vida de manera continua, y asociado al dinero, mas allá de las compras habituales, están los intereses, los impuestos, las multas, los recargos...

En este tema vamos a repasar conceptos tan fáciles como los cálculos de porcentajes, de aumentos y de descuentos.

Además, vamos a ver operaciones financieras que continuamente nos aplican los bancos y cajas en nuestra cuentas de ahorro y en nuestras operaciones habituales con ellos.

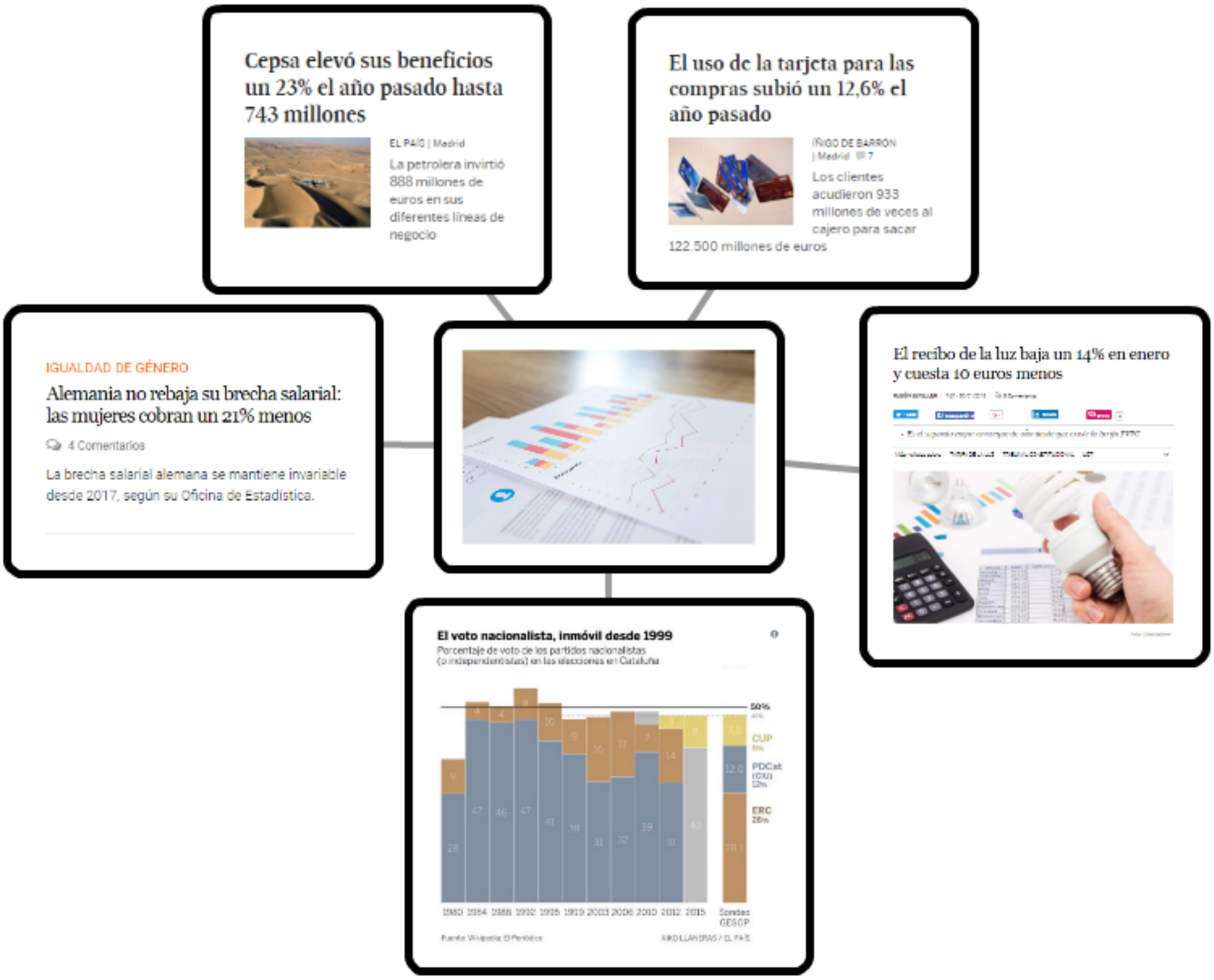

Imagen de elaboración propia con capturas de pantalla del periódico [elpais]() y [el economista]()

2. Tantos por ciento

Ya hace tiempo que los porcentajes invaden nuestras vidas, y no solo cuando hablamos de las rebajas en tiendas o grandes almacenes. Si observas tu móvil, podrás ver qué porcentaje de batería queda, e incluso saber qué porcentaje de esa batería han consumido determinadas aplicaciones.

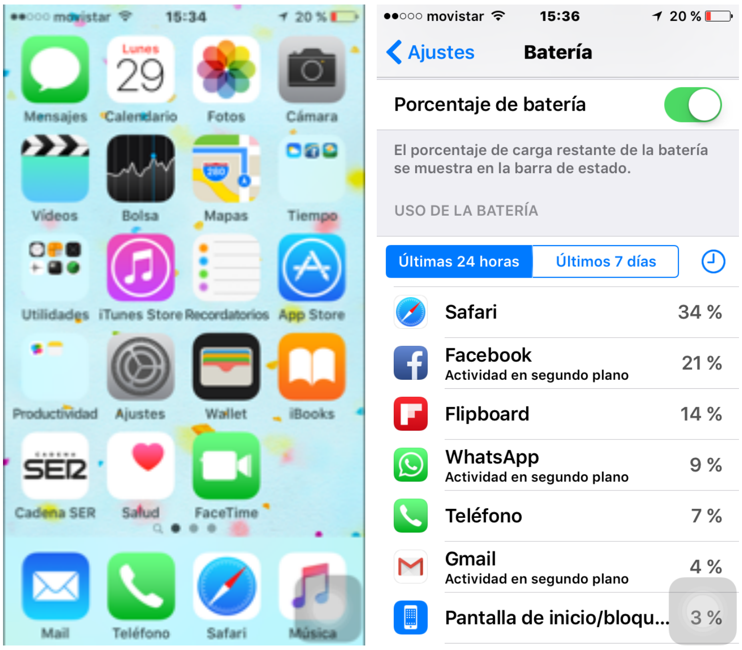

Imagen de elaboración propia.

Esto significa que si dividimos la batería en 100 partes, nos quedan 20 de ellas para usar antes de que el móvil se apague. Esto mismo podríamos expresarlo en forma de fracción, diciendo que nos queda un quinto de batería: $\frac{1}{5}$.

2.1 Concepto. Aumentos y disminuciones porcentuales

Hallar el **tanto por ciento** de una cantidad es dividir esa cantidad en cien partes y tomar tantas partes como indica el tanto.

El tanto por ciento o porcentaje, cuyo símbolo es %, se puede escribir en forma de fracción y tiene un valor decimal.

Veamos un ejemplo:

Expresión	%	Significado	Fracción	Valor
Rebajas del 40%	40%	De cada 100€ nos descuentan 40€	$\frac{40}{100}$	0,4
Ha encestado el 63% de los tiros	63%	De cada 100 tiros a canasta, se han encestado 63	$\frac{63}{100}$	0,63

Si recordamos cómo se calculaba la fracción de una cantidad, el tanto por ciento de una cantidad se puede calcular multiplicando la cantidad por el tanto por ciento y dividiendo entre 100.

Reflexiona

Hemos comprado dos objetos, uno de ellos valía 20 € y nos han rebajado 10 €, y el otro valía 100 € y nos han hecho un descuento de 25 €. ¿En cuál de ellos era mayor el porcentaje de rebaja?

Era mayor en el objeto de menor valor, ya que el descuento era del 50% (nos han rebajado 10 de 20), mientras que en el otro el descuento era del 25%. Como ves la cantidad de dinero, no está ligada solo al porcentaje sino también al total.

Importante

Vamos a manejar cuatro conceptos Cantidad Inicial (C_{ini}) tanto por ciento (r), porcentaje o cantidad porcentual (C_{por}) y cantidad final (C_{fin})

Es decir, para nuestros dos casos:

$$C_{por} = \frac{C_{ini} \cdot r}{100}$$

y para calcular el precio final:

$$C_{fin} = C_{ini} \pm C_{por}$$

Usaremos el + en el caso en el que el porcentaje suponga un aumento en el precio, y el menos en el que suponga una disminución.

Importante

- Un **incremento** se produce cuando a una cantidad se le suma un porcentaje de la misma para obtener una cantidad mayor.
- Un **descuento** se produce cuando a una cantidad se le resta un porcentaje de la misma para obtener otra cantidad menor.

https://docs.google.com/presentation/d/e/2PACX-1vQ6JZzVNXWFFs328jaa2p133fuFb6NuDhkmbSAzAaY_dVXjc4pOKYtl1aeH_v5NW9uS48PYRniwQWd0/embed?start=false&loop=false&delayms=3000

Presentación de elaboración propia.

Estudiemos estos conceptos en el siguiente vídeo con varios ejemplos:

[Enlace a recurso reproducible >> https://www.youtube.com/embed/B_Uva-ngS4o](https://www.youtube.com/embed/B_Uva-ngS4o)

Vídeo de Tuto Mate alojado en [Youtube](https://www.youtube.com)

Comprueba lo aprendido

Las venta de automóviles, de cierta marca, en España en los meses de Noviembre y Diciembre fueron de 15.000 y 12.000 respectivamente.

¿Qué porcentaje de vehículos se vendieron menos en diciembre?

- 25 %
- 20%
- 3.000 menos

No es correcto

Corecto, $\frac{12000}{15000}=0{,}8$
$1-0{,}8=0{,}20$
$0{,}20 \bullet 100=20\%$

No es correcto, te pedía del porcentaje.

Solución

1. Incorrecto
2. Opción correcta
3. Incorrecto

¿Qué porcentaje se vendió mas en noviembre respecto a diciembre?

- 25 %
- 20%

○ 3000 más

Correcto, $\frac{15000}{12000} = 1.25$
$1.25 - 1 = 0.25$
$0.25 \bullet 100 = 25\%$

No es correcto

No es un porcentaje

Solución

1. Opción correcta
2. Incorrecto
3. Incorrecto

Si se sabe que en el año anterior, en diciembre, se había vendido un 18% más que en diciembre de este año, ¿cuántos vehículos se vendieron en diciembre del pasado año?

○ 14.160

○ 16.461

Correcto, $12000 \bullet 1{,}18 = 14160$

No es correcto

Solución

1. Opción correcta
2. Incorrecto

Caso práctico

¿Cuánto pagaremos de IVA en una operación de 7350 € si este asciende al 21%?

Tenemos que calcular el 21% de 7350 €.

$$\frac{21 \cdot 7350}{100} = 1543{,}5$$

El IVA en esta operación asciende a 1543,5 €.

Para saber más

¿Qué es el IVA?

Hemos visto que el caso más frecuente de aumentos porcentuales, es la inclusión del IVA en el precio de un producto. Pero, ¿qué es el IVA? ¿cómo funciona? ¿qué tipos de IVA se aplican? Veamos el siguiente vídeo:

[Enlace a recurso reproducible >> https://www.youtube.com/embed/ucTLcummmUA](https://www.youtube.com/embed/ucTLcummmUA)

Vídeo de RTVE alojado en [Youtube]()

Para saber más

Una hoja de cálculo es un programa o aplicación informática que permite la manipulación sobre datos números dispuestos en tablas para la operación sobre cálculos complejos de contabilidad, finanzas y negocios. Por supuesto, nos sirve para calcular porcentajes, como puedes ver en el siguiente vídeo sobre la hoja de cálculo que ofrece Windows:

[Enlace a recurso reproducible >> https://www.youtube.com/embed/5ZUghG5UDlI](https://www.youtube.com/embed/5ZUghG5UDlI)

Vídeo de Indigorafa alojado en [Youtube]()

3. Intereses bancarios

Cuando nosotros confiamos nuestro dinero al banco, no es solo por tenerlo a salvo. A cambio el banco nos ofrece una compensación para que nos decidamos por su entidad, en forma de interés que será abonado cada cierto tiempo, y que por supuesto dependerá de la cantidad que hayamos depositado.

Imagen de nattanan23 en Pixabay. Licencia CC

Importante

Definiciones:

- **Capital (C o c):** Cantidad depositada o prestada. Con mayúscula la utilizaremos para el capital final y minúscula para el capital inicial.
- **Interés (I):** Beneficio que produce el capital prestado o depositado.
- **Rédito o tanto por ciento o tipo de interés (r):** Beneficio que producen 100 € en un año.
- **Tiempo (t):** Duración del préstamo solicitado o depósito.
- **Año comercial:** Se considera 12 meses de 30 días, es decir, los años se consideran de 360 días.

3.1. Interés simple

Hay dos tipos de intereses: el que se recoge año a año, que recibe el nombre de **interés simple**, y otro que se va incorporando a la cantidad inicial y sólo se recoge al final (por lo que esa cantidad también incrementa, cada año, la cantidad inicial). Este segundo tipo recibe el nombre de **interés compuesto**.

Interés simple

Veamos gráficamente en qué consiste una operación financiera en la que interviene el interés simple:

https://docs.google.com/presentation/d/e/2PACX-1vTT1ZpJCCKgGf-XO09XGkfKBZ70aHwytfve6pu1qpitBYWQjgqOBLJ8EqiZzOrX7HnIC1A5g3yuzzlt/embed?start=false&loop=false&delayms=3000

Presentación de elaboración propia alojada en **Drive**

Importante

Para calcular el interés que produce un capital al cabo de un tiempo determinado y con un rendimiento conocido, utilizamos las fórmulas de **interés simple**. Estas fórmulas dependerán de la unidad de tiempo.

Si el tiempo es en:

- **Años:** $I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100}$
- **Meses:** $I = \frac{C \cdot r \cdot t}{1.200}$
- **Días:** $I = \frac{C \cdot r \cdot t}{36.000}$

Importante

El interés sumado al capital inicial da lugar al capital final $C_{fin} = C_{ini} + I$

Caso práctico

Tres casos útiles

¿Qué beneficio obtendríamos con un capital de 50.000 € en una semana al 5%?

Para una semana (7 días) emplearemos $I=\frac{C\cdot r\cdot t}{36000}$ donde C=50.000 r=5% t=7; por tanto:

$$I=\frac{50.000\bullet 5\bullet 7}{36.000}=48{,}6$$

¿Y en un mes?

Para un mes $I=\frac{C\cdot r\cdot t}{1200}$ donde C=50.000 r=5% t=1 obtendríamos:

$$I=\frac{50.000\bullet 5\bullet 1}{1.200}=208{,}33$$

Por último, ¿cuántos años necesitamos para obtener de beneficio 50.000€?

En el tercer caso lo que tenemos que calcular es *t,* ya que C=50.000 r=5% I=50.000, es decir:

$$50000=\frac{50.000\bullet 5\bullet t}{100}$$
$$t=\frac{50.000\bullet 100}{5\bullet 50.000}=20$$

Solución: 20 años

Comprueba lo aprendido

Puedes practicar con la siguiente escena del Proyecto Descartes:

http://recursostic.educacion.es/secundaria/edad/4esomatematicasA/4quincena3/4q3_ejercicios_resueltos_3a.htm

A continuación, puedes ver una lista de reproducción formada por 7 vídeos con problemas relacionados con el interés simple:

Enlace a recurso reproducible >> https://www.youtube.com/embed/0pa1TYI3x3w

Lista de reproducción de lasmatemáticas.es alojada en **Youtube**

3.2. Interés compuesto

Interés compuesto

Cuando los intereses producidos por un capital se van acumulando al capital para producir nuevos intereses también va cambiando.

Esta nueva forma para calcular el interés se llama compuesta.

https://docs.google.com/presentation/d/e/2PACX-1vTmnd6k323aQ7SYaZ26FH9MTpKEajb2aVJbxZlxPzEE2r4K6g-Ta8wWkuWiVNZvutEQCS5rYC7JqX0d/embed?start=false&loop=false&delayms=3000

Presentación de elaboración propia alojada en **Drive**

Importante

El **interés compuesto** es el que se obtiene cuando al capital se le suman periódicamente los intereses producidos. Así, al final de cada periodo, el capital que se tiene es el capital anterior más los intereses producidos por ese capital en dicho periodo.

Las fórmulas para calcular el capital final usando un sistema de capitalización compuesta (es decir, usando el interés compuesto) en función del tiempo en años, meses y días son las siguientes:

$$C = c(1+\frac{r}{100})^t$$
$$C = c(1+\frac{r}{1.200})^t$$
$$C = c(1+\frac{r}{36.000})^t$$

¡Importante! t representa el número de años, meses o días respectivamente que se va a tener invertido el dinero.

En la siguiente escena de Geogebra, puedes ver cómo siempre un interés compuesto es más rentable que un interés simple:

https://www.geogebra.org/material/iframe/id/nJUaErp8/width/1022/height/650/border/888888/smb/false/stb/false/stb

Escena de Jorge alojada en **Geogebra.org**

Caso práctico

Con un capital inicial de 30.000 € a un 4,5%, ¿con qué capital nos encontraremos si transcurren...

a) 5 años
b) 125 meses
c) 2.200 días?

a) Aplicamos la fórmula para el interés compuesto para años.

$$c = 30.000, r = 4{,}5\%, t = 5$$
$$C = c\left(1+\frac{r}{100}\right)^t$$
$$C = 30.000\left(1+\frac{4{,}5}{100}\right)^5 = 37385{,}45$$

b) De igual forma para meses.

$$c = 30.000, r = 4{,}5\%, t = 125$$
$$C = c\left(1+\frac{r}{1200}\right)^t$$
$$C = 30.000\left(1+\frac{4{,}5}{1200}\right)^{125} = 47897{,}85$$

c) Para días:

$$c = 30.000, r = 4{,}5\%, t = 2.200$$
$$C = c\left(1+\frac{r}{36.000}\right)^t$$
$$C = 30.000\left(1+\frac{4{,}5}{36.000}\right)^{2.200} = 39495{,}24$$

Comprueba lo aprendido

En la siguiente escena del proyecto Edad puedes practicar lo aprendido sobre el interés compuesto.

http://recursostic.educacion.es/secundaria/edad/4esomatematicasA/4quincena3/4q3_ejercicios_resueltos_3b.htm

En la siguiente lista de reproducción formada por 5 vídeos, puedes ver cómo se resuelven problemas relacionados con el interés compuesto:

[Enlace a recurso reproducible >> https://www.youtube.com/embed/CYNMP2VabIM](https://www.youtube.com/embed/CYNMP2VabIM)

Lista de reproducción de lasmatematicas.es alojada en Youtube

Caso práctico

Hace cuatro años se depositó una cantidad de dinero en una cuenta de ahorro, a un interés compuesto, con un rédito del 4 % anual. Si el capital obtenido finalmente es de 6.424,22 euros, calcule el capital inicial que se depositó y los intereses totales que ha producido en los 4 años.

Situemos el problema planteado.

Nos piden el capital inicial, es decir C_i.

El periodo de tiempo es 4 años, por tanto $t=4$.

El interés compuesto es del 4 %, por lo que $i=0{,}04$.

El capital final es de 6.424,22 euros, es decir $C_4=6.424{,}22$.

Sabemos que $C_4=C_i\cdot 1{,}04^4=C_i\cdot 1{,}16985$. Despejando tenemos que $C_i=\dfrac{6.424{,}22}{1{,}16985}=5.491{,}49$ euros.

Los intereses son el resultado de restar el dinero depositado y el capital obtenido: $C_4-C_i=6.424{,}22-5.491{,}49=932{,}73$ euros.

Caso práctico

Una persona coloca 20.000 € en un producto de inversión que ofrece una rentabilidad anual del 2 % de interés compuesto durante 3 años. Determina los intereses producidos cada año y el capital final obtenido al acabar el plazo previsto.

En primer lugar, dejaremos claro los datos de que disponemos.

El capital inicial, $C_i = 20.000 \text{ euros}$.

El interés es compuesto del 2 %, por tanto $i = 0{,}02$.

Y el periodo es anual de 3 años, luego $t = 3$.

Nos piden, el capital final al cabo de 3 años, C_3 y los intereses obtenidos cada año.

Empezemos por el capital final, $C_3 = C_1 \cdot (1+i)^3 = 20.000 \cdot 1{,}02^3 = 21.224{,}16 \text{ euros}$.

Veamos cuáles son los intereses anuales.

El primer año $20.000 \cdot 0{,}02 = 400 \text{ euros}$.

El segundo año habrá que aplicar dicho $0{,}02$ a $20.000 + 400 = 20.400 \text{ euros}$, por tanto tendremos $20.400 \cdot 0{,}02 = 408 \text{ euros}$.

El tercer año se aplicará el $0{,}02$ a $20.400 + 408 = 20.808 \text{ euros}$, lo que dará $20.808 \cdot 0{,}02 = 416{,}16 \text{ euros}$.

Por último, y sólo como observación, si sumamos 400 + 408 + 416,16 obtendremos 1.224,16 euros, que son los intereses totales de los tres años, que al sumarlos a 20.000 nos dará los 21.224,16 euros de capital final que ya habíamos obtenido.

4. La Tasa Anual Equivalente (TAE)

¿Qué significa TAE? ¿Por qué, desde el 1990, los bancos están obligados a incluir en cualquier anuncio la TAE?

En el siguiente vídeo puedes ver en qué consiste y qué objetivo se perseguía con su creación:

[Enlace a recurso reproducible >> https://www.youtube.com/embed/xglIAb3tMVA](https://www.youtube.com/embed/xglIAb3tMVA)

Vídeo de ING España alojado en [Youtube](https://www.youtube.com)

Imaginemos que una persona dispone de una cuenta de inversión con 60.000 € al 8% anual. ¿Qué le interesa más, cobrar mes a mes o cada año los intereses?

Imagina que quiere cobrar los intereses que le produce los 60.000 €, cada mes.

Aplicando la fórmula del interés compuesto para meses:

$$C = c(1+\frac{r}{1.200})^t$$
$$c = 60.000; r = 8; t = 12$$
$$C = 60.000(1+\frac{8}{1200})^{12} = 60.000(1+0.0066667)^{12} = 60.000 \bullet 1{,}0829 = 64.974$$

¡Pero recuerda!

Para un aumento, si un capital se multiplica por 1,25 se le aumenta el 25%, para nuestro caso el capital ha **aumentado en un año un 8,3%. (60.000x1.083)**

La **T**asa **A**nual **E**quivalente (TAE) es de 8,3%. (mayor que el tipo de interés)

Imagina ahora que opta por cobrar los intereses que le produce los 60.000 €, cada año.

Aplicando la fórmula del interés compuesto para años:

$$C = c(1+\frac{r}{100})^t$$
$$c = 60.000 \ ; \ r = 8 \ ; \ t = 1$$
$$C = 60.000 \bullet (1+\frac{8}{100})^1 = 60.000 \bullet (1+0{,}08)^1 = 60.000 \bullet 1{,}08 = 64.800$$

Es decir el capital aumenta un 8% cada año

La **T**asa **A**nual **E**quivalente (TAE), en este caso, es del 8%. (Igual que el tipo de interés)

Importante

La TAE es el tanto por ciento de **crecimiento total del capital durante un año.** Como habrás observado es mayor o igual que el rédito declarado.

En los préstamos en la TAE se incluyen también los gastos, comisiones, etc.

Importante

Fórmula para el cálculo del TAE

$$TAE = \left(1+\frac{i}{k}\right)^k - 1$$
$$i = \frac{r}{100}$$
$$k = 12(meses)$$
$$k = 4(trimestres)$$
$$k = 2(semestres)$$

Observa que k es el número de períodos en el año (k=1 si es a un año, 6 cada 2 meses, etc.)

Comprueba lo aprendido

En la siguiente escena, puedes practicar el cálculo del TAE:

http://recursostic.educacion.es/secundaria/edad/4esomatematicasA/4quincena3/4q3_ejercicios_resueltos_3c.htm

Comprueba lo aprendido

Contratamos un depósito con pagos mensuales a un interés compuesto anual del 3%, y vamos a hacer un depósito de 10000 €.La TAE es:

- ○ 3%
- ○ 3,3%
- ○ 3,04%
- ○ 1,0304%

Ese es el interés anual

Falso

Muy bien: $TAE = (1 + \frac{0,03}{12})^{12} - 1 = 3,04$

Ese es el porcentaje aumentado respecto al inicial

Solución

1. Incorrecto
2. Incorrecto
3. Opción correcta
4. Incorrecto

Resumen

Importante

Un **porcentaje** es la proporción de una cantidad respecto a otra y representa el número de partes que nos interesan de un total de 100. Se puede definir el **tanto por ciento** como una fracción que tiene denominador 100.

Existen dos formas para hallar un porcentaje o tanto por ciento:

- Multiplicamos la cantidad por el número que indica el porcentaje y dividimos el resultado entre 100.
- Multiplicamos la cantidad por la expresión decimal de dicho porcentaje

Un **aumento** se produce cuando a una cantidad se le suma un porcentaje de la misma para obtener una cantidad mayor.

Una **disminución** se produce cuando a una cantidad se le resta un porcentaje de la misma para obtener otra cantidad menor.

Importante

Para calcular el **interés simple** que produce un capital al cabo de un tiempo determinado y con un rendimiento conocido, utilizamos las fórmulas de **interés simple**. Estas fórmulas dependerán de la unidad de tiempo.

Si el tiempo es en:

- **Años:** $I=\frac{C \cdot r \cdot t}{100}$
- **Meses:** $I=\frac{C \cdot r \cdot t}{1.200}$
- **Días:** $I=\frac{C \cdot r \cdot t}{36.000}$

El interés sumado al capital inicial da lugar al capital final $C_{fin}=C_{ini}+I$

Importante

El **interés compuesto** es el que se obtiene cuando al capital se le suman periódicamente los intereses producidos. Así, al final de cada periodo, el capital que se tiene es el capital anterior más los intereses producidos por ese capital en dicho periodo.

Las fórmulas para calcular el capital final usando un sistema de capitalización compuesta (es decir, usando el interés compuesto) en función del tiempo en años, meses y días son las siguientes:

$$C = c(1+\frac{r}{100})^t$$
$$C = c(1+\frac{r}{1.200})^t$$
$$C = c(1+\frac{r}{36.000})^t$$

¡Importante! t representa el número de años, meses o días respectivamente que se va a tener invertido el dinero.

Importante

Fórmula para el cálculo del **TAE**

$$TAE = (1+\frac{i}{k})^k - 1$$
$$i = \frac{r}{100}$$
$$k = 12(meses)$$
$$k = 4(trimestres)$$
$$k = 2(semestres)$$

Observa que k es el número de períodos en el año (k=1 si es a un año, 6 cada 2 meses, etc.)

Aviso Legal

Las páginas externas no se muestran en la versión imprimible

http://www.juntadeandalucia.es/educacion/permanente/materiales/index.php?aviso#space