INSTITUTO de ENSEÑANZAS a DISTANCIA de ANDALUCÍA

PAU

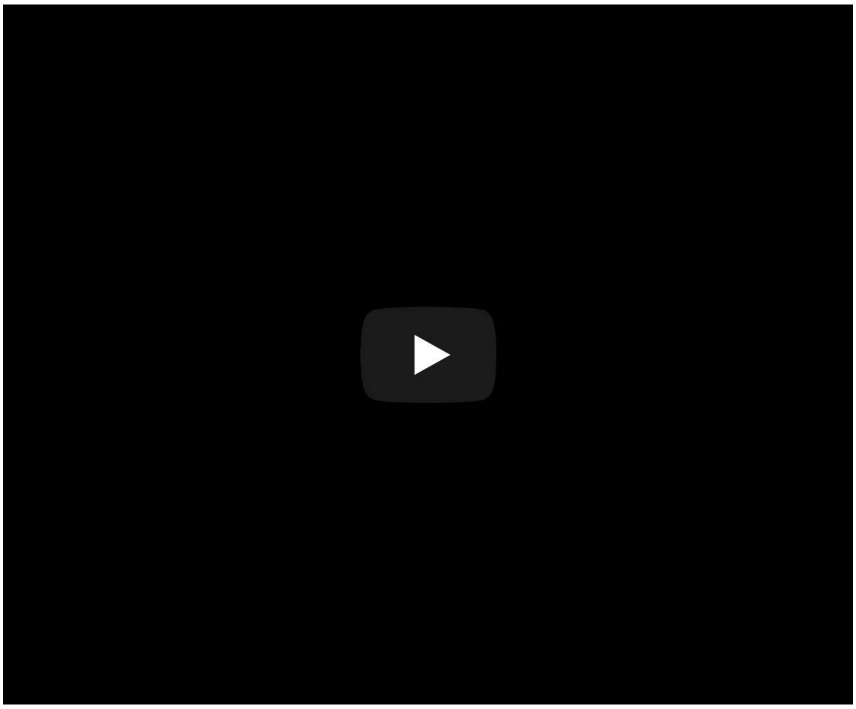
Mayores de 25 años

Contenidos

Matemáticas
Álgebra. El mundo de X: Ecuaciones

Algebrista y sangrador

Los barberos castellanos del siglo XVI se dedicaban, además de afeitar, a hacer sangrías y a restaurar huesos rotos. La palabra “restaurar” proviene del término árabe *al-jabr*, y es por ello que en la puerta de las barberías era habitual encontrar la inscripción de ALGEBRISTA Y SANGRADOR, siendo hoy día el término de algebrista el que utilizamos para denominar al matemático que se ocupa de polinomios y ecuaciones.



Una ecuación se llama de primer grado si se puede expresar como una igualdad entre polinomios de grado 1:

$$ax+b=0;\ a\neq 0 \Rightarrow\ x=\frac{-b}{a}$$

Primero vamos resolver una ecuación de primer grado sencilla por ejemplo:

$$4x-3=7+2x$$

Lo primero que tenemos que conseguir es una ecuación equivalente que tenga agrupados todos los términos con x a un lado de la igualdad y al otro solo las constantes.

Para agruparlos hay que cambiar términos de posición, para ello hay que tener en cuenta que los términos que estén sumando a un lado de la igualdad pasan al otro lado restando, y al revés, aquellos que estén restado pasan al lado opuesto sumando. A este proceso se le llama aplicar la **regla de la suma**.

$$4x-2x=7+3$$

Operamos para que nos quede una ecuación mas sencilla:

$$2x=10$$

Y por último, como para resolver la ecuación tenemos que dejar la incógnita despejada, el 2 que multiplica a la x a la izquierda pasa a la derecha dividiendo. A este proceso se le llama aplicar la **regla del producto**.

$$x=\frac{10}{2}$$

De forma que la solución de la ecuación queda:

$$x=5$$

Ahora resolvamos una ecuación de primer grado un poco más difícil, con paréntesis y denominadores:

$$\frac{2(x-3)}{4}-\frac{x+5}{3}=\frac{2+x}{6}-\frac{5(x+1)}{12}$$

En primer lugar calculamos el m.c.m (4, 3, 6, 12)=12 y multiplicamos cada una de las fracciones por este número:

$$12\cdot\frac{2(x-3)}{4}-12\cdot\frac{x+5}{3}=12\cdot\frac{2+x}{6}-12\cdot\frac{5(x+1)}{12}$$

De esta forma quedaría:

$$3\cdot 2\cdot(x-3)-4\cdot(x+5)=2\cdot(2+x)-5\cdot(x+1)$$

Multiplicamos y quitamos los parétesis:

$$6x-18-4x-20=4+2x-5x-5$$

Agrupamos a un lado todos los términos que tengan x y al otro el resto de términos, teniendo en cuenta que los términos que cambian de lugar respecto al igual cambian de signo:

$$6x-4x-2x+5x=4-5+18+20$$

Por último operamos y despejamos la x:

$$5x=37 \Rightarrow x=\frac{37}{5}$$

Reflexiona

Tu turno. Resuelve la siguiente ecuación:

$$x-1+\frac{x-2}{2}-\frac{x-3}{3}=0$$

Mostrar retroalimentación

$$6\cdot(x-1)+6\cdot\frac{x-2}{2}-6\cdot\frac{x-3}{3}=0$$

$$6\cdot(x-1)+3\cdot(x-2)-2\cdot(x-3)=6\cdot 0$$

$$6x-6+3x-6-2x+6=0$$

$$6x+3x-2x=6+6-6$$

$$7x=6 \ \Rightarrow \ x=\frac{6}{7}$$

Comprueba lo aprendido

Resuelve

Sugerencia

- x=2
- x=3
- x=-3
- x=156

Revisa el proceso.

Correcto.

Revisa tus cálculos y prueba de nuevo.

Te has alejado demasiado.

Solution

1. Incorrecto
2. Opción correcta
3. Incorrecto
4. Incorrecto

Indica la solución de la siguiente ecuación

$$\frac{1-3x}{2}+\frac{5x+2}{3}-\frac{3x+19}{2}+\frac{x+1}{6}-5=x$$

- $x=-\frac{79}{13}$
- $x=\frac{79}{13}$
- $x=-\frac{13}{79}$
- $x=13$

Correcto.

Revisa los signos del proceso que has seguido.

Cuidado al despejar la incógnita.

Te has alejado mucho de la solución.

Solution

1. Incorrecto
2. Opción correcta
3. Incorrecto
4. Incorrecto

Importante

- Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones formadas por letras, llamadas **incógnitas**, y números relacionados por operaciones aritméticas.

- Una ecuación polinómica es aquella en la que únicamente interviene polinomios. Su grado es el máximo grado de los polinómios que la determinan.

- El objetivo principal que nos planteamos cuando tenemos una ecuación es resolverla, es decir, encontrar la o las **soluciones.** La solución de una ecuación es cualquier conjunto de valores de las incógnitas que al sustituirlo en la ecuación hace que se convierta en una igualdad verdadera.

- Por último, indicar que dos ecuaciones son equivalentes si tienen la misma solución. A la hora de resolver distintos tipos de ecuaciones iremos consiguiendo ecuaciones equivalentes más sencillas hasta dejar totalmente despejada la incógnita que queremos averiguar.

- Las ecuaciones que presentaremos en este tema serán ecuaciones con una única incógnita.

2.1. Ecuaciones polinómicas de grado superior a dos

Importante

Antes de explicar como se resuelven ecuaciones de este tipo, recuerda que la división por el método de Ruffini ha sido explicada en el tema anterior.

Las ecuaciones polinómicas son de la forma P(x)=0 donde P(x) representa un polinomio de cualquier grado. Teniendo en cuenta esto, las soluciones de la ecuación coinciden con las raíces del polinomio. Por tanto, para resolver la ecuación se factoriza el polinomio y se calculan sus raíces.

Veamos, por ejemplo, la siguiente ecuación:

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$$

Las posibles raíces enteras del polinomio coincidían con los divisores del término independiente, por tanto aplicamos la regla de ruffini probando con los divisores del 2: 1, -1, 2 y -2

De esta forma las raíces que salen son 1, -1 y 2 que son las soluciones de la ecuación de partida.

	1	-2	-1	2
1		1	-1	-2
	1	-1	-2	0
-1		-1	2	
	1	-2	0	
2		2		
	1	0		

Importante

En ecuaciones como la anterior no es necesario aplicar Ruffini hasta encontrar las tres raíces.

Cuando aplicamos Ruffini y llegamos a un polinomio de 2.º grado como cociente, lo transformamos en ecuación de segundo grado que podemos resolver y obtener las dos soluciones restantes.

En el ejemplo anterior:

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$$

Aplicamos Ruffini y encontramos la primera solución que sería 1:

	1	-2	-1	2
1		1	-1	-2
	1	-1	-2	0

El cociente resultante de dicha división sería la ecuación de 2.º grado $x^2-x-2=0$, de manera que si resolvemos esta ecuación obtenemos de forma sencilla las otras dos soluciones:

$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot1\cdot(-2)}}{2\cdot1}=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{1\pm3}{2}\Rightarrow x_1=\frac{1+3}{2}=\frac{4}{2}=2;\ x_2=\frac{1-3}{2}=\frac{-2}{2}=-1$$

Reflexiona

Resuelve las siguientes ecuaciones:

1. $x^3+3x^2-4x-12=0$
2. $x^4-6x^3-11x^2+96x-80=0$

Mostrar retroalimentación

1. Aplicando Ruffini obtenemos que las soluciones son 2, -2 y -3

	1	3	-4	-12
2		2	10	12
	1	5	6	0
-2		-2	-6	
	1	3	0	
-3		-3		
	1	0		

2. Aplicando Ruffini las soluciones de la ecuación son 1, 4, -4 y 5

1		1	-5	-16	80
	1	-5	-16	80	0
4		4	-4	-80	
	1	-1	-20	0	
-4		-4	20		
	1	-5	0		
5		5			
	1	0			

Comprueba lo aprendido

Señala las soluciones de la siguiente ecuación: $6x^3+x^2-26x-21=0$

- [ ] $x=-1$
- [ ] $x=1$
- [ ] $x=\frac{7}{3}$
- [ ] $x=4$
- [ ] $x=-\frac{3}{2}$
- [ ] $x=-2$

Mostrar retroalimentación

Solution

1. Incorrecto
2. Correcto
3. Correcto
4. Incorrecto
5. Correcto
6. Incorrecto

- $x=3$
- $x=-1$
- $x=\frac{1}{2}$
- $x=1$
- $x=4$
- $x=-\frac{1}{2}$

Mostrar retroalimentación

Solution

1. Correcto
2. Incorrecto
3. Correcto
4. Correcto
5. Correcto
6. Incorrecto
7. Incorrecto

Si una ecuación polinómica se puede reducir a la forma $ax^2+bx+c=0$ se denomina de **segundo grado** o **cuadrática.**

Este tipo de ecuación puede tener dos, una o ninguna solución real y para resolverla se utiliza la fórmula:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}$$

Por ejemplo si queremos resolver la ecuación $x^2-5x+6=0$, tenemos en cuenta que a=1, b=-5 y c=6, así aplicando la fórmula nos quedaría:

$$x=\frac{5\pm\sqrt{5^2-4\cdot 1\cdot 6}}{2\cdot 1}=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\frac{5\pm 1}{2}$$

De manera que las soluciones serían:

$$x_1=\frac{5+1}{2}=\frac{6}{2}=3;\ x_2=\frac{5-1}{2}=\frac{4}{2}=2$$

Importante

Si la expresión resultante es de la forma $ax^2+bx=0$ o $ax^2+c=0$ se les denomina ecuaciones de segundo grado **incompletas.**

Además las soluciones en cada uno de los casos son:

Ecuación imcompleta	Soluciones
$ax^2+bx=0$	$x_1=0,\ x_2=-\frac{b}{a}$
$ax^2+c=0$	$x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$

Ambas ecuaciones se pueden resolver aplicando la fórmula general, en el primer caso sustituyendo c=0 y en el segundo caso sustituyendo b=0.

Sin embargo, se pueden resolver de una forma más sencilla de la que obtenemos también las soluciones anteriores.

- Si tenemos la expresión $ax^2+bx=0$, como todos los términos de la izquierda contienen a la x se extrae esta como factor común: $x\cdot(ax+b)=0$, es decir, tenemos el producto de dos factores igualado a cero. Eso significa que uno de los dos debe valer cero.
  - Si es el primero obtenemos la primera solución x=0.
  - Si es el segundo, tendríamos que ax+b=0 que es una ecuación de primer grado bastante sencilla de resolver y queda $x=\frac{-b}{a}$.

  Conclusión las soluciones serían:

$$x_1=0,\ x_2=-\frac{b}{a}$$

- Si tenemos la expresión $ax^2+c=0$ en primer lugar despejamos la x^2:

$$ax^2=c\ \Rightarrow\ x^2=-\frac{c}{a}$$

A continuación aplicamos raíz cuadrada a ambos lados de la igualdad obteniendo las dos soluciones una positiva y la otra negativa:

$$x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Resolvamos una ecuación de cada uno de los tipos anteriore.

En primer lugar vamos a resolver una ecuación de segundo grado sin término independiente, por ejemplo:

$$3x^2-6x=0$$

Como indicabamos anteriormente lo primero que hacemos es sacar factor común x:

$$x\cdot(3x-6)=0$$

Tenemos pues el producto de dos términos igualado a cero, esto quiere decir que uno de los dos tiene que ser igual a cero. Si es el primero obtenemos la primera solución $x_1=0$ y si es el segundo obtenemos una ecuación de primer grado, al resolverla obtenemos la segunda solución:

$$3x-6=0\Rightarrow 3x=6\Rightarrow x=\frac{6}{3}\Rightarrow x_2=2$$

Resolvamos una ecuación de segundo grado incompleta sin el término lineal, por ejemplo:

$$4x^2-64=0$$

En primer lugar despejamos la x^2:

$$4x^2=64\Rightarrow x^2=\frac{64}{4}\Rightarrow x^2=16$$

Para despejar la x aplicamos la raiz cuadrada a los dos términos de la igualdad quedándonos:

$$x=\pm\sqrt{16}\Rightarrow x=\pm 4\quad x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Reflexiona

Resuelve las siguientes ecuaciones:

Mostrar retroalimentación

1.

$$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot1\cdot(-5)}}{2\cdot1}=\frac{4\pm\sqrt{16+20}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{36}}{2}=\frac{4\pm6}{2}\Rightarrow x_1=\frac{4+6}{2}=\frac{10}{2}=5;x_2=\frac{4-6}{2}=\frac{-2}{2}=-1$$

2.

$$6x^2-12x=0\Rightarrow x\cdot(6x-12)=0\Rightarrow\begin{Bmatrix} x_1=0 \\ 6x-12=0\Rightarrow 6x=12\Rightarrow x_2=\frac{12}{6}=2\end{Bmatrix}$$

3.

$$4x^2-9=0\Rightarrow 4x^2=9\Rightarrow x^2=\frac{9}{4}\Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{9}{4}}=\pm\frac{3}{2}$$

Comprueba lo aprendido

$$-7x^2-28x=0$$

- [ ] $x=1$
- [ ] $x=0$
- [ ] $x=2$
- [ ] $x=-4$

Mostrar retroalimentación

Solution

1. Incorrecto
2. Correcto
3. Incorrecto
4. Correcto

$$80=20x^2$$

- [ ] $x=2$

- [ ] $x = -4$

Mostrar retroalimentación

Solution

1. Correcto
2. Correcto
3. Incorrecto
4. Incorrecto

$$(x-3)\cdot(x+3)+(x+2)^2 = x\cdot(x-4)+15$$

- [ ] $x = 10$
- [ ] $x = -10$
- [ ] $x = 2$
- [ ] $x = -2$

Mostrar retroalimentación

Solution

1. Incorrecto
2. Correcto
3. Correcto
4. Incorrecto

Las ecuaciones bicuadradas son de la forma:

$$ax^4+bx^2+c=0$$

El método de resolución de este tipo de ecuaciones se fundamenta en el de la ecuación de segundo grado.

Veamos un ejemplo. Resolvamos la ecuación:

$$x^4-10x^2+9=0$$

En primer lugar aplicamos lo que se llama "cambio de variable", utilizando el cambio $t=x^2$ quedaría la expresión:

$$t^2-10t+9=0$$

ya que $x^4=(x^2)^2=t^2$, esta ecuación ya es de segundo grado y la resolvemos como tal:

$$t=\frac{10\pm\sqrt{100-36}}{2}=\frac{10\pm\sqrt{64}}{2}=\frac{10\pm8}{2}=\begin{Bmatrix} t_1=9 \\ t_2=1 \end{Bmatrix}$$

A continuación deshacemos el cambio quedando:

$$t=9 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x=\pm\sqrt{9}=\pm3;\ t=1 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm\sqrt{1}=\pm1$$

Por tanto las soluciones son 4: x=-3, -1, 1 y 3.

Reflexiona

Intentalo tú ahora:

$$x^4-13x^2+36=0$$

Mostrar retroalimentación

Si hacemos el el cambio de variable $t=x^2$

$$t=\frac{13\pm\sqrt{169-144}}{2}=\frac{13\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{13\pm5}{2}=\begin{Bmatrix} t_1=9 \\ t_2=4 \end{Bmatrix}$$

Si lo deshacemos ahora,

Comprueba lo aprendido

¿Cuáles son las raices de este polinomio?

$$x^4 - 3x^2 - 4 = 0$$

- $x = \pm 1;\ x = \pm 2$
- $x = 2$
- $x = \pm 2$
- $x = \pm 1;\ x = \pm 4$

Recuerda que las raíces de números negativos no existen en los números reales.

Falta alguna solución.

correcto

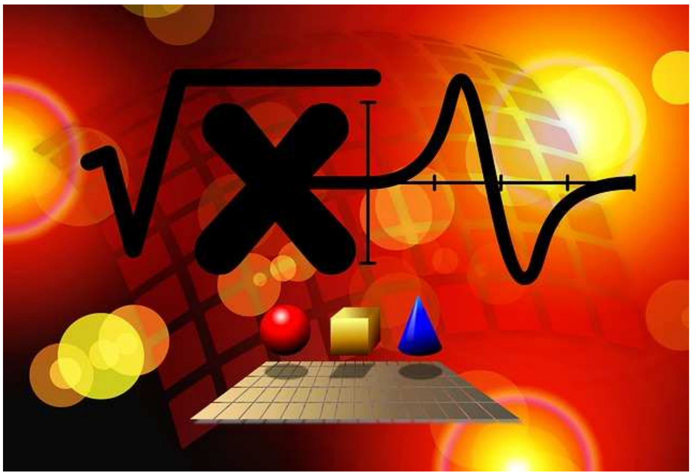
Repasa tus cálculos.

Solution

1. Incorrecto
2. Incorrecto
3. Opción correcta
4. Incorrecto

3. Ecuaciones irracionales

En el tema anterior se han visto ecuaciones cuyos términos estaban relacionados entre si por alguna de las cuatro operaciones aritméticas básicas (suma, resta, multiplicación y división). En este apartado vamos a ver aquellas ecuaciones que presentan, aparte de las operaciones mencionadas anteriormente, la incógnita elevada a un exponente fraccionario.



Fotografía de geralt en Pixabay. Licencia, CC0

Importante

Se dice que una ecuación es irracional cuando la incógnita figura dentro de algún radical.

En este apartado solo veremos casos en que los radicales son cuadráticos. Este tipo de ecuaciones se resuelven de la siguiente forma:

1. Se despeja una de las raíces.
2. Se eleva al cuadrado ambos miembros.

Los pasos 1. y 2. se repiten tantas veces como haga falta, hasta obtener una ecuación que no sea irracional. Resuelta ésta, **es imprescindible comprobar los resultados obtenidos**, pues al elevar al cuadrado los miembros de una ecuacion, pueden introducirse soluciones extrañas.

Como muestra de lo que puede suceder si los dos miembros de una ecuación son elevados al cuadrado, veamos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1

x-1=2

Esta ecuación tiene una única solución: x=3.
Elevando al cuadrado sus miembros:

$$(x-1)^2=2^2$$
$$x^2-2x+1=4$$
$$x^2-2x-3=0$$
$$x=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2}\rightarrow \begin{array}{l} x_1=3 \\ x_2=-1 \end{array}$$

Hemos introducido la solución extraña x=-1. La razón estriba en que también al elevar al cuadrado los miembros de la ecuación x-1=-2 (cuya única solución es x=-1) se obtiene, después de simplificar, $x^2-2x-3=0$.

Ejemplo 2

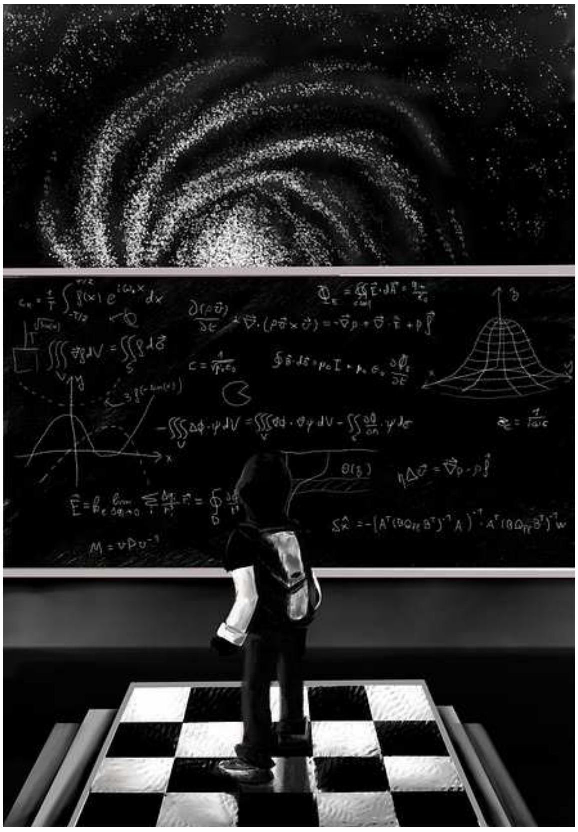
x-3=0

Esta ecuación tiene una única solución: x=3. Elevando al cuadrado sus miembros:

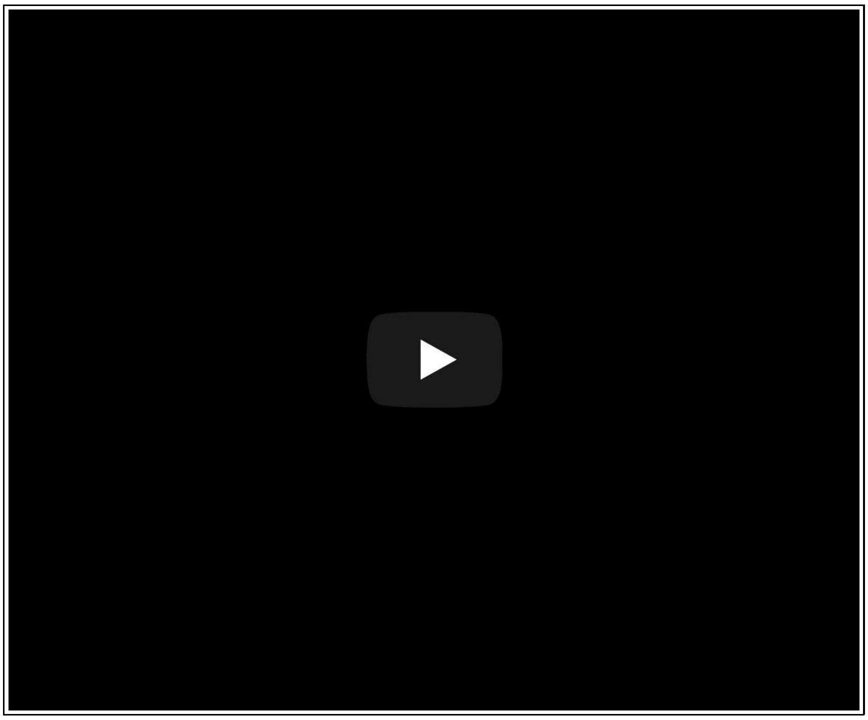
$$(x-3)^2=0$$
$$x^2-6x+9=0$$
$$x=\frac{6\pm\sqrt{36-36}}{2}=3$$

Esta vez no se ha introducido ninguna solución extraña.

En el siguiente vídeo puedes ver la forma de resolver una ecuación irracional.



Fotografía de laurentvalentinjospi0 en Pixabay. Licencia, CC0



Ejercicio resuelto

Resolver la ecuación $x+\sqrt{x}-6=0$.

$x+\sqrt{x}-6=0$

Despejamos $\sqrt{x}$ y a continuación elevamos ambos miembros al cuadrado.

$\sqrt{x}=6-x$

$(\sqrt{x})^2=(6-x)^2$

$x=36-12x+x^2$

Simplificando la última ecuación, resulta: $x^2-13x+36=0$ cuyas raíces son $x_1=9$ y $x_2=4$.

Comprobemos los resultados:

$x_1=9$

$9+\sqrt{9}-6=6$

Luego $x_1=9$ no es solución de la ecuación.

$x_2=4$

$4+\sqrt{4}-6=0$

Luego $x_1=4$ es solución de la ecuación.

Ejercicio resuelto

Resuelve la ecuación y comprueba las soluciones: $x+\sqrt{x-4}=24$.

Nota: En este ejercicio se utilizarán conocimientos básicos relacionados con la resolución de ecuaciones.

Mostrar retroalimentación

$x+\sqrt{x-4}=24$

$(\sqrt{x-4})^2=(24-x)^2$

$x-4=x^2-48x+576$

$x^2-49x+580=0$

Las soluciones de la ecuación de segundo grado de arriba son:

$x_1=29,\ x_2=20$

Comprobamos ambas soluciones:

$x_1=29$

$29+\sqrt{29-4}\neq 24$

$x_2=20$

$20+\sqrt{20-4}=24$

Solución $x_2=20$

Ejercicio resuelto

Resolver la ecuación: $\sqrt{2x+3}-\sqrt{x-2}=2$.

Mostrar retroalimentación

$\sqrt{2x+3}-\sqrt{x-2}=2$

Despejamos $\sqrt{2x+3}$ y a continuación elevamos ambos miembros al cuadrado.

$\sqrt{2x+3}=2+\sqrt{x-2}$

$(\sqrt{2x+3})^2=(2+\sqrt{x-2})^2$

$2x+3=4+4\sqrt{x-2}+x-2$

$x+1=4\sqrt{x-2}$

Volvemos a elevar al cuadrado los dos miembros de la igualdad de arriba.

$4\sqrt{x-2}=x+1$

$(4\sqrt{x-2})^2=(x+1)^2$

$16(x-2)=x^2+2x+1$

Simplifacando la última ecuación resulta: $x^2-14x+33=0$ cuyas raíces son $x_1=11$ y $x_2=3$.

Comprobemos los resultados.

$x_1=11$

$\sqrt{2\cdot 11+3}-\sqrt{11-2}=2$

Luego $x_1=11$ es solución de la ecuación.

$x_2=3$

$\sqrt{2\cdot 3+3}-\sqrt{3-2}=2$

Luego x_2 es solución de la ecuación.

Esta ecuación tiene dos soluciones: $x_1=11$ y $x_2=3$.

En este enlace puedes encontrar más ejercicios resueltos con los que puedes practicar.

Para la resolución de las ecuaciones tanto exponenciales como logarítmicas es básico recordar las propiedades de las potencias y de los logaritmos.

Importante

Las principales propiedades de las potencias son:

1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
2. $a^n \div a^m = a^{n-m}$
3. $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
4. $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
5. $a^n \div b^n = (a \div b)^n$

Importante

Recuerda la definición de logaritmo

$$\boxed{\log_a N = b \Leftrightarrow a^b = N;\ \text{siendo } a>0,\ a \neq 1 \text{ y } N>0}$$

y sus principales propiedades

1. $\log_a (M \cdot N) = \log_a M + \log_a N$
2. $\log_a (M \div N) = \log_a M - \log_a N$
3. $\log_a M^n = n \cdot \log_a M$

Para resolver las ecuaciones logarítmicas también hay que tener en cuenta:

$$\boxed{\log_a N = \log_a M \Leftrightarrow N = M}$$

4.1. Ecuaciones exponenciales

Las ecuaciones exponenciales son aquellas en las que la incógnita aparece en el exponente, para resolverlas se aplican las propiedades de las potencias o un cambio de variable hasta llegar a una ecuación de la forma $a^x=b$. Esta se resolverá bien directamente (si b se puede poner como una potencia de base a, igualando los exponentes), bien tomando logaritmos.

Veamos distintos tipos de ecuaciones exponenciales y ejmplos de como resolverlas:

- El tipo más sencillo es de la forma $a^x=b$ donde a y b se pueden poner como potencias con la misma base, por ejemplo:

$$2^x=512 \Rightarrow 2^x=2^9 \Rightarrow x=9$$

- No tan evidente resulta cuando en la ecuación $a^x=b$ a y b no se pueden poner como potencias de la misma base. En este caso aplicamos la definición de logaritmo como mostramos en el ejemplo siguiente:

$3^x=25$ Aplicando la definición de logaritmo quedaría que $x=\log_3 25$

- Si la expresión exponencial va acompañada de un factor de la forma: $c\cdot a^x=b$ despejamos $a^x=b/c$ y resolvemos la ecuación resultante como alguno de los casos anteriores. Por ejemplo:

$$5\cdot 4^x=80 \;\Rightarrow\; 4^x=\frac{80}{5} \;\Rightarrow\; 4^x=16 \;\Rightarrow\; 4^x=4^2 \;\Rightarrow\; x=2$$

Por último veamos una un poco más compleja:

$$\left(2^{x+5}\right)^x=\frac{1}{2^6} \Rightarrow 2^{(x+5)\cdot x}=2^{-6} \Rightarrow 2^{x^2+5x}=2^{-6} \Rightarrow x^2+5x=-6 \Rightarrow x^2+5x+6=0 \Rightarrow x_1=-2;\ x_2=-3$$

Reflexiona

Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $4\cdot 3^{7x-12}=36$

b) $\left(\frac{4}{5}\right)^{3x-9}=\left(\frac{5}{4}\right)^{2x-1}$

c) $\frac{3^{x^3+16}}{81^{x^2+x}}=1$

Mostrar retroalimentación

a)

b)
$$\left(\frac{4}{5}\right)^{3x-9}=\left(\frac{5}{4}\right)^{2x-1}\Rightarrow\left(\frac{4}{5}\right)^{3x-9}=\left[\left(\frac{4}{5}\right)^{-1}\right]^{2x-1}\Rightarrow\left(\frac{4}{5}\right)^{3x-9}=\left(\frac{4}{5}\right)^{-2x+1}\Rightarrow 3x-9=-2x+1\Rightarrow 5x=10\Rightarrow x=2$$

c)
$$\frac{3^{x^3+16}}{81^{x^2+x}}=1\Rightarrow\frac{3^{x^3+16}}{(3^4)^{x^2+x}}=3^0\Rightarrow\frac{3^{x^3+16}}{3^{4x^2+4x}}=3^0\Rightarrow 3^{x^3-4x^2-4x+16}=3^0\Rightarrow x^3-4x^2-4x+16=0$$

Por tanto, la ecuación resultante es una ecuación polinómica de tercer grado que se resuelve aplicando la regla de Ruffini y da como soluciones $x_1=2$, $x_2=-2$ y $x_3=4$

Cuando en la ecuación aparecen varios términos exponenciales sumando o restando tenemos que recurrir al cambio de variable. Para ver más claro este tipo de ecuación resolvamos algunos ejemplos:

$$3^{x+2}+5\cdot 3^{x+1}=9\cdot 3^{x-1}+7$$

Primero trabajamos con las propiedades de las potencias para que la única expresión exponencial que aparezca sea 3^x :

$$3^x\cdot 3^2+5\cdot 3^x\cdot 3=9\cdot\frac{3^x}{3^1}+7 \;\Rightarrow\; 9\cdot 3^x+15\cdot 3^x=3\cdot 3^x+7$$

Para que resulte más sencillo trabajar con la anterior expresión hacemos el cambio de variable $t=3^x$, de manera que la expresión quedaría:

$$9t+15t=3t+7$$

Que no es más que una ecuación polinómica de primer grado muy sencilla de resolver:

$$21t=7 \;\Rightarrow\; t=\frac{7}{21} \;\Rightarrow\; t=\frac{1}{3} \;\Rightarrow\; t=3^{-1}$$

Una vez resuelta, se deshace el cambio de variable y calculamos el valor de x:

$$3^x=3^{-1} \;\Rightarrow\; x=-1$$

Veamos otro ejemplo:

$$25^x+5=30\cdot 5^{x-1}$$

Trabajamos igual que con la ecuación anterior, aunque en este caso hay que tener en cuenta que las exponenciales no tienen la misma base. Lo que hacemos es sustituir 25 por 5^2 y dejar todo en función de 5^x :

$$(5^2)^x+5=30\cdot\frac{5^x}{5}\Rightarrow(5^x)^2+5=6\cdot 5^x$$

Hacemos el cambio de variable $t=5^x$ y resolvemos la ecuación de segundo grado resultante:

$$t^2+5=6t\Rightarrow t^2-6t+5=0\Rightarrow t_1=1;\ t_2=5$$

Deshaciendo el cambio quedaría:

$$5^x=1\Rightarrow 5^x=5^0\Rightarrow x=0;\ 5^x=5\Rightarrow 5^x=5^1\Rightarrow x=1$$

Comprueba lo aprendido

Indica la solución de la siguiente ecuación: $2^{x+1}+5\cdot 2^{x+2}=2^{x-1}+43$

- [ ] x=1
- [ ] x=2
- [ ] x=0
- [ ] x=-1

Mostrar retroalimentación

Solution

1. Correcto
2. Incorrecto
3. Incorrecto
4. Incorrecto

Señala las soluciones de la siguiente ecuación: $3^{x+1}+9^x-12=2\cdot 3^{2x}-3^{x+2}+15$

- [ ] x=0
- [ ] x=1
- [ ] x=2
- [ ] x=3

Mostrar retroalimentación

Solution

1. Incorrecto
2. Correcto

Reflexiona

Intenta resolver esta ecuación que te proponemos:

$$27^{x}-13\cdot 9^{x}=-13\cdot 3^{x+1}+27$$

Mostrar retroalimentación

Pasamos todas las expresiones exponenciales a base 3:

$$(3^3)^{x}-13\cdot(3^2)^{x}=-13\cdot 3^{x+1}+27\Rightarrow(3^{x})^3-13\cdot(3^{x})^2=-13\cdot 3\cdot 3^{x}+27\Rightarrow(3^{x})^3-13\cdot(3^{x})^2=-39\cdot 3^{x}+27$$

Cambiamos 3^x por t y obtenemos una ecuación de tercer grado:

$$t^3-13t^2=-39t+27\Rightarrow t^3-13t^2+39t-27=0$$

Aplicamos Ruffini a la nueva ecuación:

Por tanto las soluciones para t serían: $t_1=1$, $t_2=3$ y $t_3=9$. Deshaciendo el cambio obtenemos:

$$\begin{array}{l} 3^{x}=1 \Rightarrow 3^{x}=3^0 \Rightarrow x=0 \\ 3^{x}=3 \Rightarrow 3^{x}=3^1 \Rightarrow x=1 \\ 3^{x}=9 \Rightarrow 3^{x}=3^2 \Rightarrow x=2 \end{array}$$

Las ecuaciones logarítmicas son aquellas en las que la incógnita aparece en el argumento o en la base del logaritmo. Para resolverlas habrá que aplicar la definición y las propiedades de los logarítmos y pasarla a una expresión algebraica.

Cuando resolvemos esta ecuación hay que comprobar si las soluciones obtenidas sirven en la ecuación logarítmica ya que la base de un logaritmo puede ser cualquier número positivo menos el 1 y el argumeto tiene que ser un número positivo.

Veamos algunos ejemplos:

- $\log_x 16 = 4$, para resolver esta ecuación tan sólo hay que aplicar la definición de logaritmo y nos queda: $x^4 = 16 \Rightarrow x = \sqrt[4]{16} = 2$. En realidad -2 también sería solución de la ecuación algebraica pero por definición la base de un logaritmo no puede ser un número negativo.

- $2\log(x-1) - \log(2x-3) = \log\left(\frac{2x-1}{3}\right)$

Primero aplicamos las propiedades de los logaritmos hasta quedarnos a ambos lados de la igualdad con un sólo logaritmo:

$$\log\left[(x-1)^2\right] - \log(2x-3) = \log\left(\frac{2x-1}{3}\right) \Rightarrow \log\left[\frac{(x-1)^2}{2x-3}\right] = \log\left(\frac{2x-1}{3}\right)$$

De esta forma, los argumentos son iguales por lo que queda la ecuación:

$$\frac{(x-1)^2}{2x-3} = \frac{2x-1}{3} \Rightarrow (x-1)^2 \cdot 3 = (2x-1)\cdot(2x-3) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x^2-2x+1)\cdot 3 = 4x^2-2x-6x+3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3x^2-6x+3 = 4x^2-8x+3 \Rightarrow -x^2+2x = 0$$

Las soluciones de esta ecuación son x=0 y x=2. x=0 no puede ser solución de la ecuación logarítmica porque cuando sustituimos en la expresión log(x-1) el argumento saldría negativo, x=2 no da problemas en ninguno de los tres logarítmos, por tanto la solución de la ecuación es x=2.

- $\ln(x+2) + \ln(x-2) = 2\ln 2 + \ln 3 + \ln(x-3)$

Primero hay que indicar que la base del logaritmo no influye en la resolución de la ecuación, por tanto comenzamos aplicando las propiedades de los logaritmos para agruparlos a ambos lados de la igualdad:

$$\ln\left[(x+2)\cdot(x-2)\right] = \ln(2^2) + \ln(3\cdot(x-3)) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ln(x^2-4) = \ln\left[4\cdot(3x-9)\right] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ln(x^2-4) = \ln(12x-36)$$

Igualamos los argumentos y resolvelmos la ecuación resultante:

$$x^2-4 = 12x-36 \Rightarrow x^2-12x+32 = 0$$

Las soluciones de esta ecuación son x_1=4 y x_2=8. Ambas soluciones son válidas para la ecuación logarítmica de partida.

Comprueba lo aprendido

Resuelve e indica la solución de la siguiente ecuación: 2logx=log(-12x-16)-log2

- x=-2
- No tiene solución
- x=-4
- x=3

Comprueba en la ecuación de partida.

Correcto. Tanto -2 como -4 son soluciones de la ecuación algebraica pero al sustituirlas en logx dejan el argumento negativo.

Comprueba en la ecuación de partida

Revisa tus cálculos.

Solution

1. Incorrecto
2. Incorrecto
3. Opción correcta
4. Incorrecto

Señala la solución de la siguiente ecuación: 2ln(x-3)=lnx+ln(4x-20)-2ln2

- x=-9
- x=4
- x=9
- No tiene solución.

Revisa los signos.

Repasa los cálculos

Correcto

Vuelve a comprobarlo.

Solution

1. Incorrecto
2. Incorrecto
3. Opción correcta
4. Incorrecto

Reflexiona

$$\frac{1}{2}\log(x-1)=\log(x-3)$$

Mostrar retroalimentación

Si empezamos a aplicar las propiedades de los logaritmos tendríamos que introducir la fracción como exponente en el primer logaritmo y después resolver una ecuación con radicales, es más sencillo si multiplicamos a ambos lados de la igualdad por 2 y desaparece el problema de la fracción:

$$\log(x-1)=2\log(x-3) \Rightarrow \log(x-1)=\log\left[(x-3)^2\right] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x-1=(x-3)^2 \Rightarrow x-1=x^2-6x+9 \Rightarrow 0=x^2-7x+10$$

Ecuación de segundo grado cuyas soluciones son: $x_1=2$, $x_2=5$.

En este caso, solo una de las soluciones ($x_2=5$) es también solución de la ecuación logarítmica porque al sustituirla en los logaritmos sus argumento quedan positivos.

La solución $x_1=2$ debemos desecharla por que al sustituirla en log(x-3), el argumento sale negativo.

5. Ejercicios resueltos de pruebas de acceso anteriores

Para finalizar este tema, vamos a resolver los ejercicios que se han preguntado sobre el mismo en exámenes de la PAU en cursos anteriores.

Es recomendable que antes de mirar la solución, los intentes previamente, por si no hubieran salido del todo correctos, aprender del error y coger práctica.

Ejercicio resuelto

Prueba de Acceso a Grados para Mayores de 25 años - Año 2011

Resuelva la ecuación, donde ln indica el logarimto neperiano $ln x - \frac{1}{2} ln(3-x) = ln 2$.

Nota: En este ejercicio se utilizarán conocimientos básicos relacionados con la resolución de ecuaciones logarítmicas.

Mostrar retroalimentación

$$\ln x - \tfrac{1}{2}\ln(3-x) = \ln 2; \quad \ln\left(\frac{x}{\sqrt[2]{3-x}}\right) = \ln 2$$

$$\frac{x}{\sqrt[2]{3-x}} = 2; \quad x = 2\sqrt[2]{3-x}$$

$$x = 2\sqrt[2]{3-x}; \quad x^2 = \left(2\sqrt[2]{3-x}\right)^2$$

$x^2 = 4(3-x); \quad x^2 + 4x - 12 = 0$, La solución es: $2, -6$

Comprobamos las dos soluciones en la ecuación original.

$\ln 2 - \frac{1}{2}\ln(3-2) = \ln 2 < --$Para x=2 se cumple la igualdad.

$\ln(-6) - \frac{1}{2}\ln(3+6) = \ln(-6) < --$En este caso la igualdad no puede cumplirse ya que no existe el logaritmo de un número negativo. De ahí que la solución sea x=2.

Ejercicio resuelto

Prueba de Acceso a Grados para Mayores de 25 años - Año 2007

Calcule el valor de x sabiendo que_ $log_x 32 = -\frac{5}{3}$

Nota: En este ejercicio se utilizarán conocimientos básicos relacionados con la resolución de ecuaciones logarítmicas.

Mostrar retroalimentación

$$\log_x 32 = -\frac{5}{3},$$

$$x^{-\frac{5}{3}} = 32$$

$$x^{-\frac{5}{3}} = 2^5$$

$$\left(x^{-\frac{1}{3}}\right)^5 = 2^5$$

$$x^{-\frac{1}{3}} = 2$$

$$x^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

$$\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$x = \frac{1}{8}$$

Ejercicio resuelto

Prueba de Acceso a Grados para Mayores de 25 años - Año 2014

resolución de ecuaciones.

Mostrar retroalimentación

$$x + \sqrt[2]{x-4} = 24$$

$$\sqrt[2]{x-4} = 24 - x$$

$$\left(\sqrt[2]{x-4}\right)^2 = (24-x)^2$$

$$x - 4 = x^2 - 48x + 576$$

$x^2 - 49x + 580 = 0$, posibles soluciones: $29, 20$

Comprobamos ambas soluciones:

$$x_1 = 29$$

$$29 + \sqrt[2]{29-4} \neq 24$$

$$x_2 = 20$$

$$20 + \sqrt[2]{20-4} = 24$$

Solución: x=20

Ejercicio resuelto

Prueba de Acceso a Grados para Mayores de 25 años - Año 2008

Calcule todas las soluciones de la ecuación $2logx - log(x-16) = 2$ donde $logx$ representa el logaritmo en base 10 de x

Nota: En este ejercicio se utilizarán conocimientos básicos relacionados con la resolución de ecuaciones logarítmicas.

Mostrar retroalimentación

$$\log_{10} x^2 - \log_{10}(x - 16) = 2$$

$$\log_{10} \frac{x^2}{x - 16} = 2$$

$$\frac{x^2}{x - 16} = 10^2$$

$x^2 - 100x + 1600 = 0$, Soluciones: $80, 20$

Comprobamos ambas soluciones:

$x_1 = 80$

$$2 \log_{10} 80 - \log_{10}(80 - 16) = 2$$

$x_2 = 20$

$$2 \log_{10} 20 - \log_{10}(20 - 16) = 2$$

Las soluciones $80, 20$ son válidas.