



Análisis II: Límites y continuidad

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I	
1.º Bachillerato	Contenidos
Análisis II: Límites y continuidad	

1. Introducción



Imagen de Fotoworkshop4You en [Pixabay](#), [Dominio Público](#)

Una imagen bonita, ¿verdad? Pero te has preguntado alguna vez qué pasa con estas vías fuera del alcance de nuestra vista. Aunque la lógica nos señala que el camino tiene un punto final, la ilusión óptica nos hace pensar que se prolongan hasta el infinito. No sabemos si siguen en línea recta o se curvan, o si en algún momento nos podemos encontrar con una zona en la que falta un trozo de vía, o si se cruzan. Como podemos ver, hay varias opciones sobre la tendencia que seguirán a lo largo del trayecto.

Pues bien, con las funciones también podemos plantearnos cómo se comportan cuando nos acercamos a determinados valores o cuando las variables crecen o disminuyen indefinidamente (es decir, su comportamiento en el "infinito").

En este tema nos centraremos en dos conceptos fundamentales para el estudio de las funciones: **límite** y **continuidad**.

¡Adelante, acompáñanos! solo tienes que seguir la vía del tren.

2. Límite de una función en un punto

Nos plantearemos la siguiente pregunta: ¿Qué ocurre con una función $f(x)$ cuando x se aproxima a un punto determinado?

En el golf, a la zona donde se sitúa la bandera que señala el hoyo, se le denomina con la palabra inglesa "green". Cuando una bola está en el "green" quiere decir que está en las proximidades del hoyo. A partir de ese momento quedan pocos golpes, y estos deben ser suaves y precisos. De esta forma, el jugador conseguirá que la bola se acerque lentamente pero con decisión hasta el hoyo.

Cuando estudiamos el límite de una función $f(x)$ en un punto $x=a$, solo nos interesan los puntos muy cercanos a él, los que están situados en el "green" que lo rodean.

En este apartado profundizaremos en los distintos comportamientos que puede tener una función cuando centramos nuestra atención en cómo cambia $f(x)$ cuando x está muy próxima a dicho punto.



Fotografía de chispita en [Flickr](#), Licencia [CC](#)

2.1. Definición

Observemos la función $f(x)= x^2+1$.Para ello, vemos los valores que toma la imagen de la variable independiente cuando x se acerca a 3, por la izquierda y por la derecha.

x	2,9	2,99	2,999	2,9999	→...3...←	3,00001	3,0001	3,001	3,01
f(x)	9,4100	9,9401	9,9940	9,9994	→...10...←	10,0006	10,0060	10,060	10,6100

Cuando la variable independiente se aproxima a 3, la variable independiente se acerca a 10. En este caso diremos que el límite de f(x) cuando "x" se acerca a 3 es el valor 10.
Si disponemos de la gráfica de la función podemos apreciar más claramente la afirmación anterior. Vemos que cuando la variable "x" se va acercando al valor 3, entonces las correspondientes imágenes (valores la variable "y") se van acercando a 10.

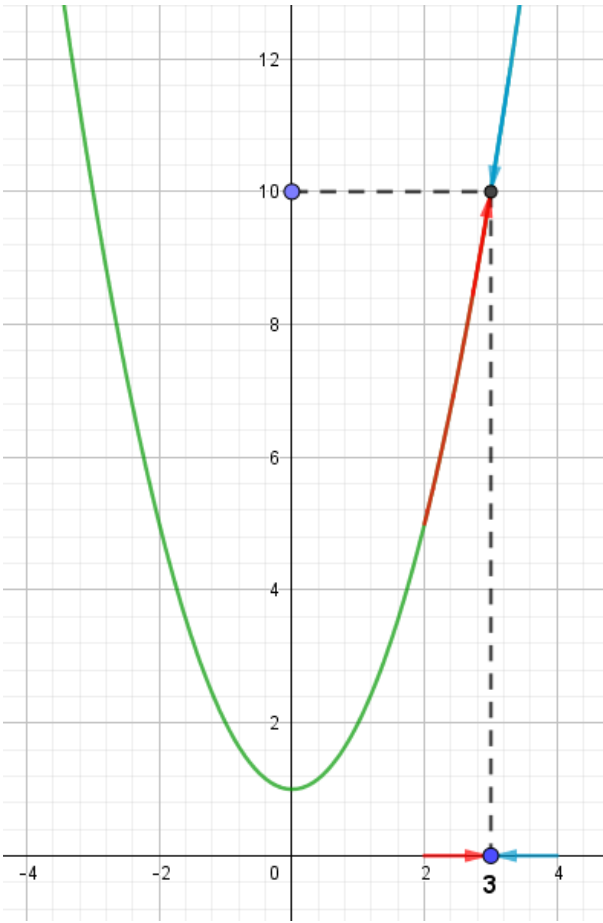


Imagen de elaboración propia



Importante

Si $f(x)$ se acerca a l cuando x se aproxima al punto a , diremos que l es el límite de $f(x)$ en el punto a .
Lo anterior se expresa de la siguiente forma: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$

En el ejemplo anterior se expresaría: $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 10$



Comprueba lo aprendido

El límite de la función $f(x) = 3^x$ cuando x tiene a 0 es 1

☐ Verdadero ☐ Falso

Verdadero

Veamos que efectivamente $\lim_{x \rightarrow 0} 3^x$ es 1

x	-0,1000	-0,0100	-0,0010	-0,0001	→...0...←	0,0001	0,0010	0,0100	0,1000
f(x)	0,8960	0,9891	0,9989	0,9999	→...1...←	1,0001	1,0011	1,0110	1,1161

2.2. Límites laterales

En general es corriente que tengamos que desplazarnos dentro de nuestra ciudad para ir de compras, al trabajo, a recoger a los niños al colegio, a ver algún amigo o familiar, etc. Esos desplazamientos pueden hacerse de distinta forma: andando, en coche propio, en autobús, en metro, en tranvía o en cualquier otro medio que nos ofrezca nuestra ciudad y que nos enlace con nuestro destino.

En los límites pasa algo parecido. Nosotros nos hemos podido acercar por la izquierda o derecha del punto. Incluso en las tablas de valores que usamos en el ejercicio resuelto anterior, verías que en un lado íbamos dando valores cercanos al 3 pero siempre menores y por el otro eran valores mayores acercándonos siempre al 3. Esto nos va a servir para definir los límites laterales.



Imagen de elaboración propia



Importante

Llamaremos **límite por la derecha** de la función $f(x)$ al valor que se obtiene en la función cuando x se acerca al valor a por la derecha, es decir siempre por valores mayores que a . Se representa por:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

Hablaremos del **límite** de la función $f(x)$ cuando x tiende al valor a **por la izquierda** a lo que se obtiene cuando a x le vamos dando valores cercanos al valor a por la izquierda, es decir, siempre con valores más pequeños. Se representa por:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$$



Caso práctico

Quemos hallar los límites cuando x tiende por la izquierda y por la derecha del valor 0 para la función $f(x) = \frac{|x^2 - x|}{x}$, donde " $||$ " representa el valor absoluto de la expresión que hay dentro.

Debemos hacer una tabla de valores cercanos a 0 pero todos menores y otra con valores cada vez más cercanos pero mayores.

Para el estudio por la izquierda partimos del valor -1 y nos vamos acercando poco a poco hasta cero.

x	f(x)
-1	-2
-0,5	-1,5
-0,25	-1,25
-0,1	-1,1
-0,01	-1,01
-0,001	-1,001
-0,0001	-1,0001

Es evidente que en este caso $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x^2 - x|}{x} = -1$.

Hacemos ahora lo mismo pero dando valores, cada vez más cerca a cero, pero por la derecha, es decir, por valores mayores que cero.

x	f(x)
1	0
0,5	0,5
0,25	0,75
0,1	0,9
0,01	0,99
0,001	0,999

Por tanto, en este caso tendremos $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x^2 - x|}{x} = 1$.

Hay veces que los límites por la derecha y la izquierda de una función en un punto se acercan al mismo valor, lo vimos en el apartado anterior. Pero otras veces, como ocurre en el ejercicio resuelto anterior, los límites laterales no son iguales. Por ello debemos saber lo siguiente.



Importante

La condición para que exista el límite de una función en un punto es que existan los dos límites laterales y que coincidan. Si los límites laterales no coinciden entonces no existe el límite de la función en el punto. Se tiene por tanto:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$



Comprueba lo aprendido

Consideremos la función $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{|x^2 - 3x + 2|}$, calcula los límites siguientes.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \boxed{} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \boxed{}$$

Basta que hagas una tabla con tres o cuatro valores por cada lado para ver a lo que tiende.



Para saber más

En el siguiente applet de Geogebra realizado por [Jesús Plaza M.](#) puedes observar con más detalle la idea de límite lateral. Mueve el cursor rojo para seleccionar el valor al que nos queremos aproximar. A continuación, desliza los cursores azul y verde y podrás ver cómo se comporta la función cuando nos acercamos por la derecha e izquierda (límites laterales).

<https://www.geogebra.org/material/iframe/id/ReJdYYJs/width/1250/height/1280/border/888888/sfsb/true/smb/false/stb/false/stbh/false/ai/false/asb/false/sri/true/rc/false/ld/false>

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}, \quad (-4 \leq x \leq 5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = ?$$

x tiende a

$$x \rightarrow c$$

$$x \rightarrow c^+$$

$$f(1) = ?$$

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \frac{2.997}{0.003}$$

$$= 999$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = ?$$



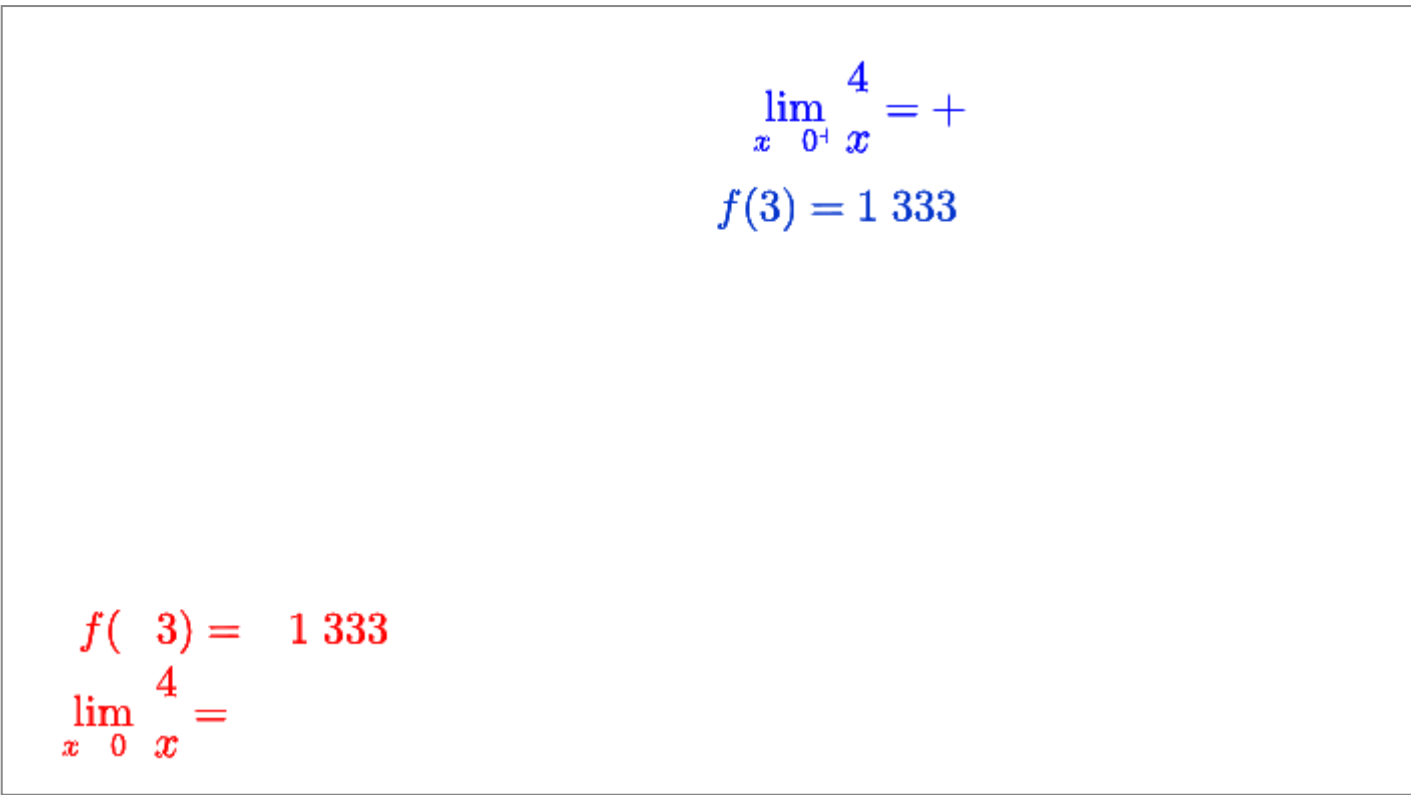
2.3. Límites infinitos y en el infinito

Hay veces que se pueden o deben tener controlados aspectos cotidianos. Nuestro peso, el número de personas en lista de espera para una operación, o los gastos de electricidad de nuestra casa. Pero otras veces hay cosas que se desbordan y no hay forma de contenerlas como el exceso de comidas cuando nos encontramos en Navidad, las obras en la ciudad cuando se acercan elecciones municipales o el número que se adscriben a la página de Facebook de un programa de éxito. En este apartado vamos a hablar de esos casos en que una función no se puede controlar.

En el applet siguiente tienes representada la función $f(x) = \frac{4}{x}$. Ve cambiando los valores de la variable x y observa hacia que valores tiende la función cuando la variable x tiende a 0 por la izquierda (rojo) y por la derecha (azul).

Utiliza el deslizador "a" ("b") para hacer tender x a 0 por derecha (por izquierda).

<https://www.geogebra.org/material/iframe/id/qYMSDbCf/width/706/height/395/border/888888/smb/false/stb/false/stbh/false/ai/false/asb/false/sri/false/rc/false/ld/false/sdz/false/ctl/fi>



Applet de [Hugo A. Chamorro](#) en Geogebra, compartido por [IEDAmatemáticas](#).

Habrás observado que a medida que se acerca a 0 por la izquierda la función va tomando valores cada vez más negativos, mientras que si se acerca por la derecha la función se va haciendo cada vez más grande. Como sabrás esta función nunca puede tomar el valor 0, puesto que es una función racional y el denominador no puede valer 0.



Importante

Diremos que la función **f(x) tiende a infinito** cuando la variable tiende hacia un valor a, y el valor de la función se hace cada vez más grande o más pequeño a medida que nos acercamos al valor a. Se escribe como

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

Como es evidente la función tiende a $+\infty$ ó $-\infty$ según las situaciones.

Por ejemplo, en la función anterior tendríamos

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{4}{x} = -\infty \qquad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4}{x} = +\infty$$



Caso práctico

Construye una tabla de valores cercanos al valor 1 y halla los límites laterales de la función $f(x) = \frac{x}{1-x}$ cuando x tiende a 1.

Demos valores por la izquierda y por la derecha.

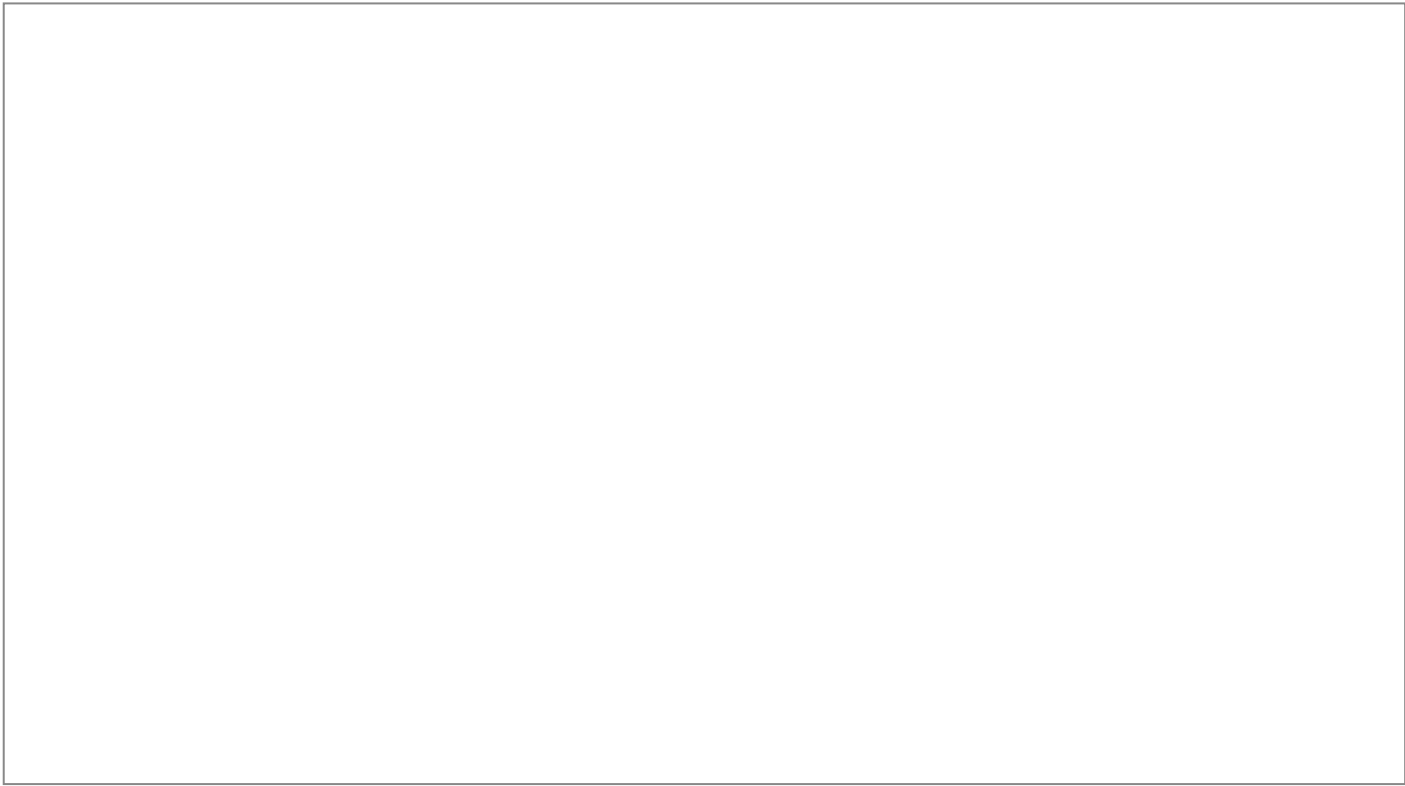
Izquierda		Derecha	
0,5	1	1,5	-3
0,75	3	1,25	-5
0,9	9	1,1	-11
0,99	99	1,01	-101
0,999	999	1,001	-1001
0,9999	9999	1,0001	-10001

Como vemos por la izquierda cada vez se va haciendo más grande y por tanto $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{1-x} = +\infty$. Por la derecha cada vez se hace más grande en valor absoluto y por tanto se hace cada vez más pequeña la función y $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{1-x} = -\infty$.

Hemos visto que ocurre en el caso en que la función se hace infinito cuando la variable se acerca a un valor, ¿pero qué pasa si es la variable la que tiende a infinito? Por supuesto puede darse el caso de que la función también se haga infinito. Por ejemplo, la función $f(x) = 2x + 1$ es evidente que mientras más grande se haga x más se hará la función y mientras más pequeña x más pequeña $f(x)$. Sin embargo hay veces que no ocurre eso. Observa el siguiente applet donde aparece representada la función $f(x) = \frac{1}{x}$ y fíjate hacia qué valores tiende la función cuando la x tiende a $+\infty$ y $-\infty$.

Utiliza el deslizador "a" ("b") para hacer crecer x (decrecer x).

<https://www.geogebra.org/material/iframe/id/GPJY4rF4/width/701/height/391/border/888888/smb/false/stb/false/stbh/false/ai/false/asb/false/sri/false/rc/false/ld/false/sdz/false/ctl/false>



Applet de [Hugo A. Chamorro](#) en Geogebra, compartido por [IEDA matemáticas](#).



Importante

Si a medida que el valor de la variables se hace muy grande o muy pequeño la función también se hace cada vez más pequeña o más grande diremos que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

Si mientras más grande o más pequeña se hace la variable la función tiende a estabilizarse en un valor fijo b diremos entonces que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$$

Evidentemente habrá que estudiar cuando la variable tiende a $+\infty$ y a $-\infty$, pues puede darse el caso de que en ambos sentidos no tome el mismo valor.

Eso no ocurre en el caso de la función del applet anterior, pues en este caso

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$



Comprueba lo aprendido

Haz una tabla de valores en los que des valores muy grandes y muy pequeños a la variable y completa el valor de los siguientes límites.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{1-x} = \boxed{}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1-x} = \boxed{}$$



Caso práctico

En estas dos presentaciones, puedes ver cómo se comportan en el infinito las funciones polinómicas:

http://www.slideshare.net/slideshow/embed_code/key/NhDWv51iu1mT8a

[Límite en el infinito de un polinomio](#) from [Jesús Fernández](#)

Y las funciones racionales:

http://www.slideshare.net/slideshow/embed_code/key/x6SZB3fKAStP5h

Límite en el infinito de funciones racionales

Jesús Fernández De

[Límite en el infinito de funciones racionales](#) from [Jesús Fernández](#)



Para saber más

Para que no te pierdas con tantos conceptos nuevos te ofrecemos este estupendo resumen sobre el cálculo de límites que nos ofrece la página [3con14](#).

3. Continuidad

La noción de función continua es muy intuitiva ya que el término "continuo" tiene un uso muy común y como ya sabes, significa que no tiene interrupción. Antes de comenzar con nociones matemáticas nos gustaría que disfrutaras de este precioso video del gran cañón del colorado, donde la tierra, deja de ser continua y presenta una "discontinuidad".

[Enlace a recurso reproducible >> https://www.youtube.com/embed/bPItLpvpNv0](https://www.youtube.com/embed/bPItLpvpNv0)

Vídeo de xabaz80 alojado en [Youtube](#)

3.1. Continuidad de una función

En este video puedes apreciar la idea de función continua. Como hemos indicado anteriormente, simplemente diremos que es continua si podemos dibujarla sin levantar el lápiz del papel. En este video puedes visualizar esta explicación.

Enlace a recurso reproducible >> <https://www.youtube.com/embed/JBfChp-1W9g>

Vídeo de Alberto Adones Aranda alojado en [Youtube](#)

Gráficamente, es muy sencillo determinar si una función es continua, ahora veremos cómo determinar si una función dada analíticamente es continua.



Importante

Una función $f(x)$ se dice **continua** en un punto $x = a$, si $f(x)$ se aproxima a $f(a)$ cuando x se acerca a a , o lo que es lo mismo, si cumple las siguientes tres condiciones:

- 1. Que exista $f(a)$
- 2. Que exista $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$
- 3. Que los dos valores anteriores coincidan, es decir, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

En caso contrario, la función se dirá **discontinua** en dicho punto.

Una función que es continua en **todos los puntos donde está definida**, se dirá **continua**.



Importante

- Podemos indicar algunos criterios de continuidad en función del tipo de función
- Las funciones polinómicas son continuas en todo el conjunto de los números reales.
- Las funciones racionales son continuas en todos los números reales, salvo en aquellos puntos donde se anule el denominador.
- Las funciones potenciales, exponenciales y logarítmicas son continuas en todo su dominio de definición.

Ejemplo:

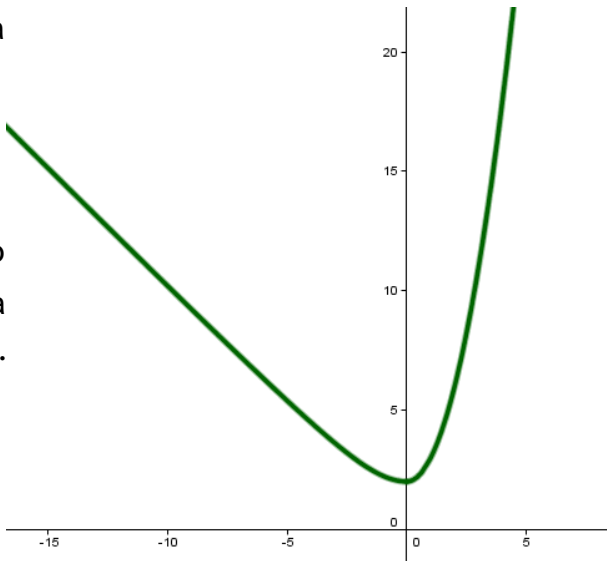
Veamos un caso concreto del estudio de una función definida a trozos y analicemos la continuidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+4} & \text{si } x \leq 0 \\ 2+x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

La función para $x < 0$ es continua ya que estamos ante una raíz cuadrada de un radicando siempre positivo ($x^2 + 4$ siempre es positivo) por lo que siempre existe el resultado de dicha raíz. Si $x > 0$ nos encontramos ante un polinomio, por lo que es continua en todo el intervalo. Tan solo debemos comprobar si la función es continua en 0

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= 2 \\ f(0) &= 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= 2 \end{aligned}$$

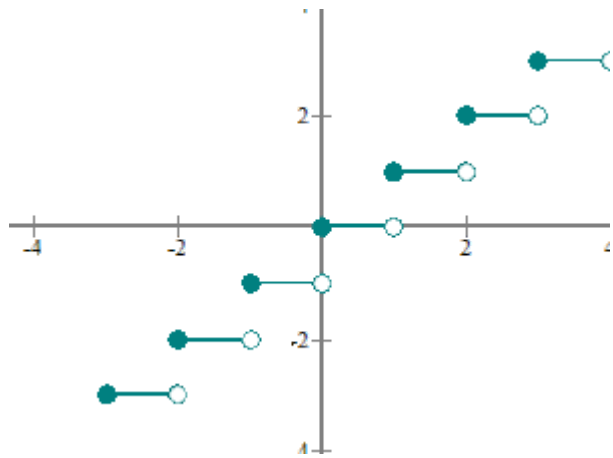
Vemos que los dos límites laterales coinciden y además su resultado es igual al valor de la función en ese punto. Por lo tanto la función



es continua en todos los números reales.



Caso práctico



La función que está en la imagen de la izquierda, como ya sabes, es la parte entera $y=\text{Ent}(x)$.

Estudiemos la continuidad en los números enteros. Cojamos por ejemplo $x=2$. Si nos acercamos a 2 por la izquierda como sigue

x	1,9	1,99	1,999	1,9999	1,99999
Ent(x)	1	1	1	1	1

o sea $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)=1$, como se ve en el dibujo de la función nos acercamos a 1 pero no llegamos (punto hueco)

x	2,001	2,0001	2,00001	2,000001
Ent(x)	2	2	2	2

$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)=2$; Los límites laterales no coinciden, por tanto, la función no es continua en $x=2$.

La parte entera es discontinua de salto finito en los enteros.



Comprueba lo aprendido

Indica si son verdaderas o falsas las siguientes frases.

1) La función $y=3x+2$ es continua en $x=1$.

☐ Verdadero ☐ Falso

Verdadero

La función lineal es continua siempre y en concreto en el punto 1.

2) La función $y = \frac{x}{x-1}$ es continua en el punto $x=1$.

☐ Verdadero ☐ Falso

Falso

Los límites laterales de la función en $x=1$ tienden a más y menos infinito, por lo que no existe valor real del límite y la función no es continua.

3) La función $y=x^2-3x+4$ es continua en $x=1$.

☐ Verdadero ☐ Falso

Verdadero

Sí es continua ya que su límite vale 2 que coincide con $f(1)$.



Comprueba lo aprendido

Vamos a estudiar la continuidad de la función que aparece representada en la imagen.

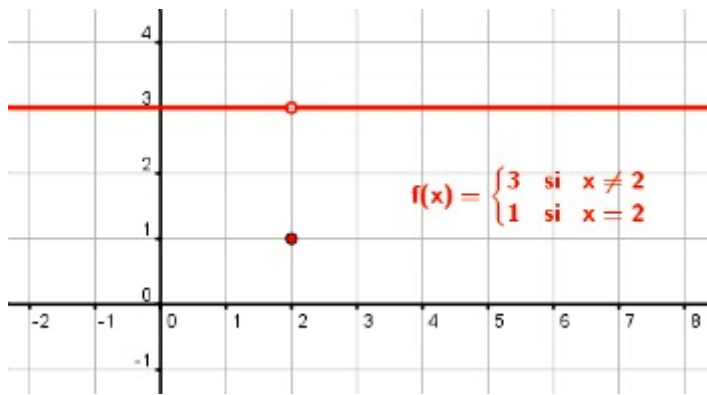


Imagen de elaboración propia

Para ello completa las siguientes frases:

Gráficamente se ve con claridad que f es discontinua en el punto .

$f(2) = \text{}$ y el límite de $f(x)$ cuando x tiende a 2 vale .

Por tanto f es continua en 2, ya que los dos valores anteriores son iguales.



Importante

Recordamos la definición que hemos visto de continuidad: f es continua en a si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Esto facilita muchísimo el límite de una función en punto para las funciones continuas en todo su dominio, que, como hemos visto, son la mayoría de las funciones elementales.

Calcular el límite de $f(x)=x^3+4x+7$ cuando x tiende, por ejemplo, al punto -1, es muy fácil. Como $f(x)$ es una función polinómica, por tanto continua en todo su dominio, basta con hallar $f(-1)$.

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = (-1)^3 + 4(-1) + 7 = -1 - 4 + 7 = 2$$



Caso práctico

Calcula los siguientes límites de funciones en los puntos que se indican, y en el caso de que no existan, explica el motivo.

a) $\lim_{x \rightarrow 2} 4x - 5$

b) $\lim_{x \rightarrow 3} 2^x$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2+x}{1-x}$

d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2+x}{1-x}$

a) Al ser una función lineal, por tanto continua en todo su dominio, basta con hallar el valor de la función en el punto 2, $4 \cdot 2 - 5 = 8 - 5 = 3$. Luego el límite es 3.

b) El razonamiento es similar al del apartado anterior, 2^x es continua en todo su dominio, hallamos el valor de la función en el punto 3, $2^3 = 8$. El límite es 8.

c) La función no está definida en el punto en que se quiere hallar el límite, ya que $1-x$ se anula en 1. Al ser una función racional, al acercarnos a 1, los valores que toma la función se harán muy grandes, por tanto, no existe el límite. Si nos acercamos por la izquierda tiende a $+\infty$, y si nos acercamos por la derecha tiende a $-\infty$.

d) La función en el punto 2 es continua, luego si queremos hallar el límite, sólo tenemos que sustituir 2 en la función: $\frac{2+2}{1-2} = \frac{4}{-1} = -4$. El límite es -4.

3.2. Discontinuidades y sus tipos

En el apartado anterior, hemos visto que se deben cumplir una serie de condiciones para que una función sea continua. Por lo tanto, si no se cumple alguna, diremos que la función es discontinua. Ahora estudiaremos que existen varios tipos de discontinuidades.



Importante

Una **discontinuidad se dice evitable** en $x = a$ si existe el límite de la función en el punto y es finito, pero no coincide con el valor $f(a)$ o no existe dicho valor.

La discontinuidad se llama de tipo evitable, ya que podemos "evitar la discontinuidad" si definimos $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$

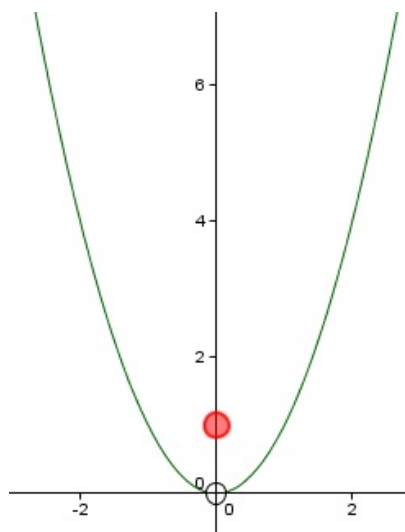
Ejemplo:

Veamos un caso concreto, la función definida como

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Esta función, para el valor $x = 0$, verifica que $f(0) = 1$ tal y como hemos definido la función, sin embargo, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$. Por lo tanto, la función presenta una discontinuidad evitable tal y como podemos ver en su representación, ya que si definimos $f(0) = 0$, la función sería continua.

Puedes ver lo que ocurre en la gráfica de la función:



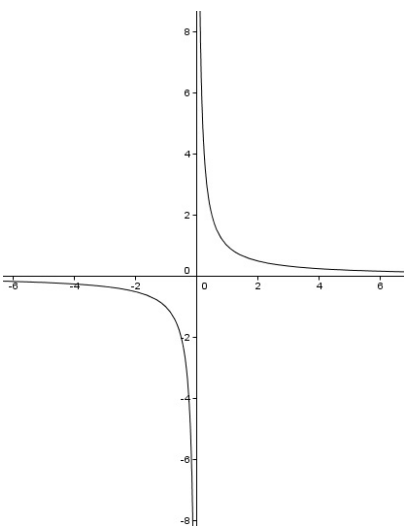
Importante

Una función presenta una **discontinuidad en $x = a$ de salto** o de primera especie si existen los límites laterales y son distintos o al menos uno de ellos es infinito.

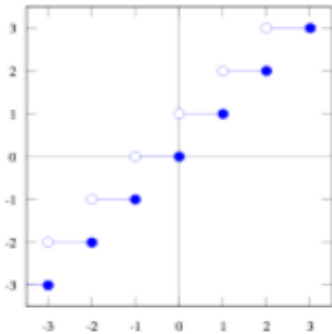
Se dirá que la discontinuidad es de salto finito si los límites laterales son finitos y de salto infinito si al menos uno de ellos es infinito.

Ejemplos:

Un ejemplo muy visual de función con una discontinuidad de primera especie en $x = 0$ y en particular de salto infinito es $f(x) = \frac{1}{x}$, ya que al estudiar los límites laterales en el punto $x = 0$ obtenemos:



$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \text{ y } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$



Si tomamos la función $f(x) = \text{Ent}(x)$, es decir la parte de entera de un número detectamos que dicha función tiene una discontinuidad de 1º especie, de salto finito en los números enteros. Estudiemos, por ejemplo, la discontinuidad en $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0 \text{ y } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$$



Caso práctico

Estudia la continuidad de la siguiente función $f(x)$ e indica, si existe, su tipo de discontinuidad.

$$f(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } x \leq 2 \\ x-4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Observa los tres tipos de discontinuidades.

La función indicada es continua si $x < 2$ ya que para esos valores, la función es constante y también para $x > 2$, ya que es una función polinómica de grado 1. Solo nos queda estudiar la continuidad para $x = 2$

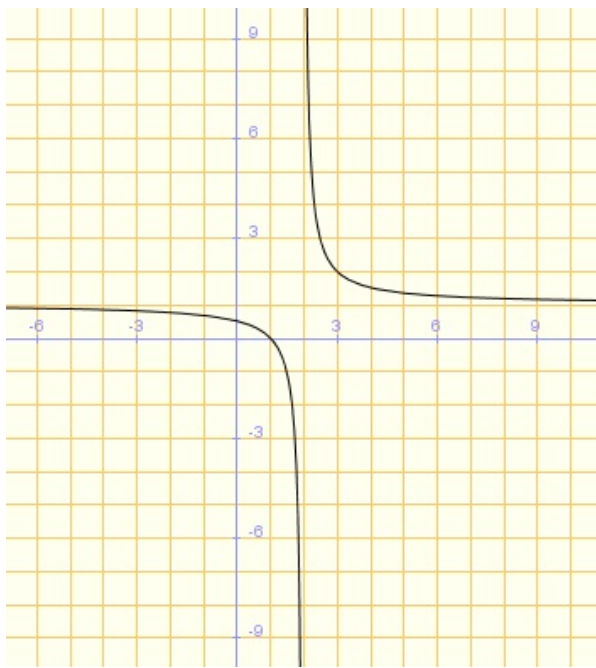
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= 5 \\ f(2) &= 5 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= -2 \end{aligned}$$

Así, tenemos que los límites laterales de la función en $x = 2$ son diferentes, por lo que nos encontramos ante una discontinuidad de salto finito o de primera especie.



Caso práctico

Estudia el tipo de función y discontinuidad de : $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$



La función indicada es una función racional, por lo que solo presentará problemas de continuidad en aquellos puntos donde el denominador se anule, en este caso en $x=2$.

Veamos sus límites laterales

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$$

$f(2)$ no existe, ya que 2 no pertenece al dominio

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \infty$$

Por lo tanto la función es continua en todos los números reales salvo en 2, donde presenta una discontinuidad de salto infinito.



Para saber más

En el siguiente vídeo repasamos los tipos de discontinuidad que hemos visto.

[Enlace a recurso reproducible >> https://www.youtube.com/embed/htYdVPb9o9I](https://www.youtube.com/embed/htYdVPb9o9I)

Tipos de discontinuidad de una función



Vídeo de estudiia alojado en [Youtube](#)

4. Asíntotas de una función

Quizás alguna vez al pasear por el campo o en alguna estación de tren pequeña te has colocado entre las vías del tren y has mirado a lo lejos. Seguro que te ha dado la sensación visual de que los dos railes de la vía se van acercando poco a poco y al final se juntan, aunque sabes perfectamente que eso no es posible porque los railes son paralelos. De todos modos los matemáticos suelen decir que dos rectas son paralelas cuando coinciden en el infinito. Pero hay más situaciones en las que perspectiva nos juega esta pasada. Si has estado en la playa y miras la línea del horizonte parece que el cielo y el mar se unen allí a lo lejos. En este apartado vamos a hablar de esos elementos que se unen en el infinito.



Imagen de VipBiz_pro en [Pixabay](#). [Pixabay License](#)

Se llaman **asíntotas de una función** a unas rectas con las que la función coincide en el infinito. Las hay de diversos tipos: verticales, horizontales y oblicuas.

4.1. Asíntotas verticales



Importante

Una función $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x = a$ si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm \infty$$

Para calcular las asíntotas verticales de funciones racionales, determinamos aquellos valores para los que se anula el denominador y posteriormente analizamos los límites laterales de dicha función.

En general, para cualquier tipo de función, las asíntotas verticales suelen aparecer entre los puntos que no pertenecen al dominio de la función.

Ejemplo:

Calculemos las asíntotas verticales de la función $f(x) = \frac{x}{x-3}$

El denominador de la función, $x-3$ se anula para el valor $x=3$. Para ello, tan solo debemos resolver la ecuación $x-3 = 0$ para determinar la solución, $x = 3$.

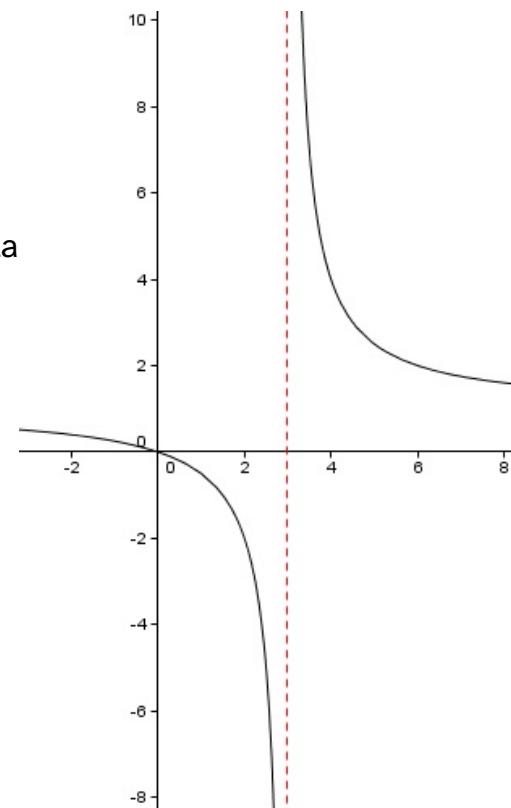
Si calculamos los límites de la función en $x=3$ llegamos a los siguientes resultados

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty$$

Podemos afirmar que la función $f(x) = \frac{x}{x-3}$ tiene una asíntota vertical en $x = 3$

Observa la gráfica de la función, que esta a la derecha.



Caso práctico

Determina las asíntotas verticales de la función $f(x) = \frac{x-2}{x^2-1}$

En primer lugar calculamos las soluciones de la ecuación $x^2-1=0$, obteniendo $x_1=-1$ y $x_2=1$.

Ya tenemos los posibles candidatos a asíntotas verticales. Ahora, simplemente calculamos los límites laterales en los puntos indicados

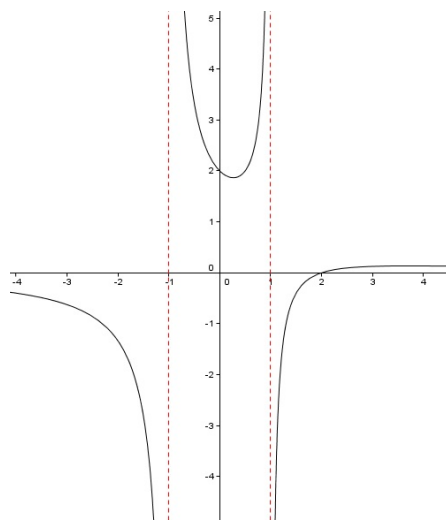
$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \left(\frac{x-2}{x^2-1} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \left(\frac{x-2}{x^2-1} \right) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{x-2}{x^2-1} \right) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x-2}{x^2-1} \right) = -\infty$$

Observa el gráfico:



Por lo tanto, podemos asegurar que existen dos asíntotas verticales en $x = -1$ y $x = 1$



Comprueba lo aprendido

Hallas la o las asíntotas verticales de la función $f(x) = \frac{x^2+1}{3x}$

- ☐ $x=1$
- ☐ $x=1$ y $x=-1$
- ☐ $x=0$
- ☐ No tiene asíntotas verticales

Ten cuidado al determinar los ceros de la ecuación $3x=0$

Ten cuidado al determinar los ceros de la ecuación $3x=0$

Correcto!!!!

Ten cuidado al determinar los ceros de la ecuación $3x=0$

Solución

1. Incorrecto
2. Incorrecto
3. Opción correcta
4. Incorrecto

Nos podemos preguntar si toda función racional tiene asíntotas verticales. La respuesta es no y veremos un caso para confirmar esta afirmación.

Calculemos las asíntotas de la función $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

Para ello, tan solo calculamos las soluciones de la ecuación $x^2+1=0$

Las soluciones de dicha ecuación serán $x = \frac{\pm\sqrt{-4}}{2}$. Al no existir la raíz de -4, la ecuación no tiene soluciones y, por supuesto, la función no tiene asíntotas.



Comprueba lo aprendido

la función $f(x) = \frac{x^2-x-4}{1-x}$ tiene una asíntota en $x = -1$

 [Sugerencia](#)

☐ Verdadero ☐ Falso

Falso

x= -1 no puede ser solución de la función indicada, ya que la única solución de $1-x = 0$ es $x=1$



Comprueba lo aprendido

En la función $f(x) = \frac{x}{1-x}$ su asíntota vertical es $x =$.

4.2. Asíntotas horizontales



Importante

La función $f(x)$ tiene una **asíntota horizontal** en $y = b$ si se cumplen una de estas dos condiciones

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$$
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$$



Importante

Límites de funciones polinómicas

El problema de calcular el límite de una función polinómica cuando x tiende a $+\infty$ ó $-\infty$, puede verse reducido al cálculo del límite del término de mayor grado, ya que el resto de términos tiene un crecimiento muy inferior comparado con el de grado mayor.

Así, calcular el límite de la función $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^5 - 7x^4 + 25x^2 - 4x + 100)$ es análogo a calcular el límite de $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^5)$, por lo que el límite de ambas funciones es $+\infty$

Límites de funciones racionales

Por lo tanto, el cálculo de los límites de las funciones racionales se puede reducir con la siguiente expresión.

Límite de una función racional si $x \longrightarrow \infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^n + \dots + k_0}{bx^m + \dots + k_1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^n}{bx^m} = \begin{cases} 0 & \text{si } n < m \\ \frac{a}{b} & \text{si } n = m \\ \pm \infty & \text{si } n > m \end{cases}$$

En caso de existir en el numerador o en el denominador una expresión de la forma $\sqrt[m]{ax^n + bx^{n-1} + \dots + z}$ el crecimiento de la función es análogo a $\sqrt[m]{ax^n}$ cuando $x \longrightarrow \infty$



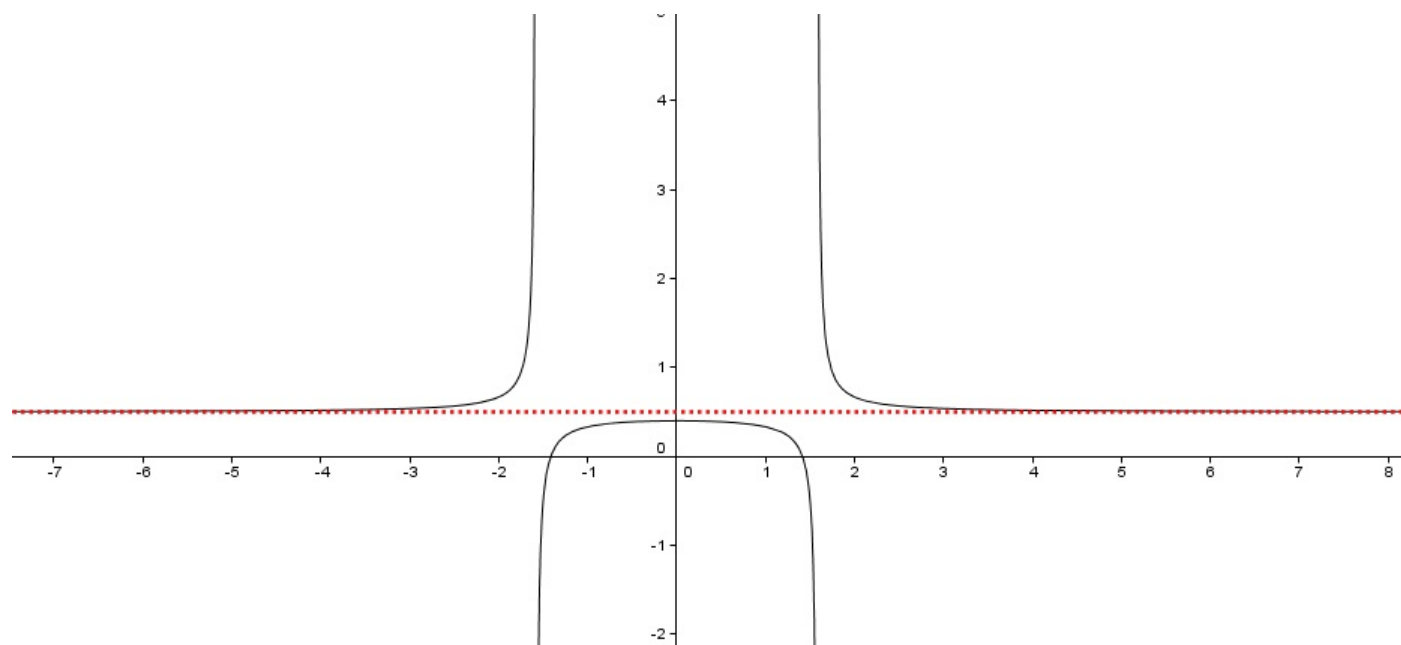
Caso práctico

Determina las asíntotas horizontales de la función $f(x) = \frac{x^2 - 2}{2x^2 - 5}$
Ten en cuenta el anterior punto importante.

Al coincidir la mayor potencia del numerador y el denominador, el límite es el cociente de los coeficientes líderes, por lo que el límite es $\frac{1}{2}$. Puedes comprobar que el $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ coinciden.

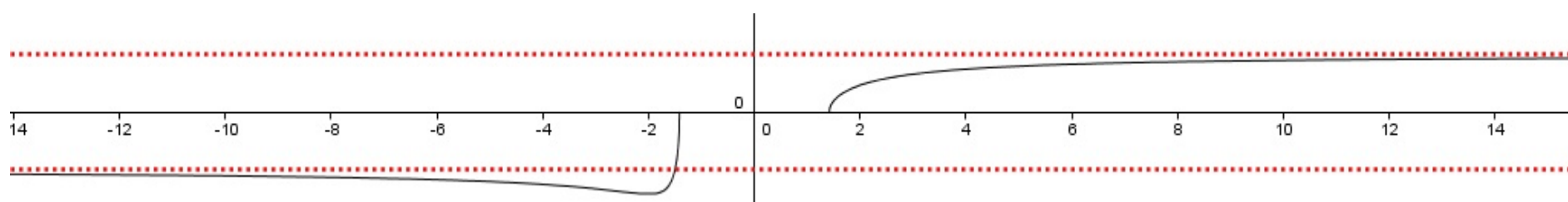
La asíntota horizontal es $y = 1/2$.

Observa en la gráfica la línea punteada en rojo.



Caso práctico

Calcula las asíntotas horizontales de $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-2}}{x+1}$



El numerador, $\sqrt{x^2-2}$, tiene un comportamiento asintótico análogo al de $x^{\frac{2}{2}} = x$. Comparamos ahora los máximos exponentes de numerador y denominador, coincidiendo ambos. El límite será el cociente de los coeficientes líderes, por lo que la asíntota coincide con $y = 1$ cuando $x \rightarrow +\infty$.

Pero si $x \rightarrow -\infty$, el caso es diferente, ya que el numerador tiene signo positivo (al ser la raíz cuadrada de algo elevado al cuadrado), pero el denominador tiene signo negativo, por lo que el límite será -1 y la asíntota $y = -1$.



Caso práctico

En el applet siguiente tiene representada una función racional $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ cuyos coeficientes puedes modificar con los deslizadores de la izquierda (siempre debe ser $c \neq 0$ pues si no se convertiría en una recta). Puedes ver que posee dos asíntotas una vertical y otra horizontal.

<https://tube.geogebra.org/material/iframe/id/1639007/width/892/height/510/border/888888/rc/false/ai/false/sdz/true/smb/false/stb/false/stbh/true/ld/false/sri/true/at/auto>



Comprueba lo aprendido

La asíntota horizontal de la función $f(x) = \frac{x}{1-x}$ es la recta de ecuación $y = \boxed{}$.

4.3. Asíntotas oblicuas



Importante

Llamaremos **asíntota oblicua** de una función $f(x)$ a una recta, de ecuación $y = mx + n$, con la que la función tiende a coincidir en el infinito.

Para calcularla se utilizan las siguientes igualdades:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \qquad n = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx]$$

Ejemplo:

Dada la función $y = \frac{x^2-1}{x+4}$, vamos a proceder a calcular sus asíntotas oblicuas.

En primer lugar determinaremos si realmente la función presenta una asíntota oblicua

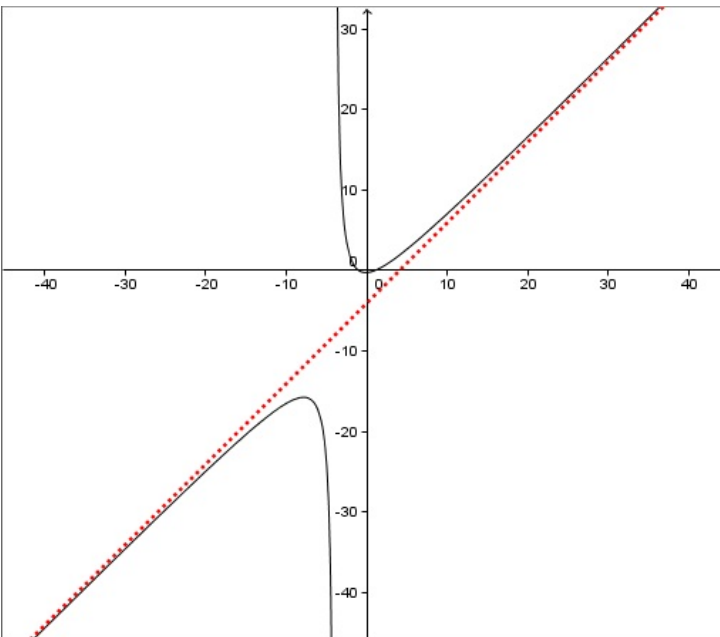
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2-1}{x+4}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-1}{x^2+4x} = 1$$

Por lo tanto existe una asíntota oblicua y la pendiente de dicha recta es 1. Determinemos ahora el valor de n

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-1}{x+4} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-1}{x+4} - \frac{x^2+4x}{x+4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x-1}{x+4} = -4$$

Por lo tanto la asíntota oblicua es $y = x - 4$

El límite es análogo si $x \rightarrow -\infty$



Caso práctico

En la siguiente ventana tienes representada la función $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ que, además de tener una asíntota vertical en $x=1$, tiene una asíntota oblicua en la recta $y=x+1$.

Si mueves el deslizador verde podrás ver como los puntos P sobre la función y Q sobre la asíntota cada vez se acercan más.

<https://tube.geogebra.org/material/iframe/id/1639077/width/602/height/450/border/888888/rc/false/ai/false/sdz/true/smb/false/stb/false/stbh/true/ld/false/sri/true/at/auto>



Caso práctico

Calcula, si existen, las asíntotas oblicuas de la función $f(x) = x^2 - 5$
Analiza cómo se calculan las asíntotas oblicuas

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-5}{x}$$

Vamos a determinar

Dicho límite es $+\infty$ ya que el mayor exponente del numerador es mayor que el del denominador, por lo tanto el valor es $+\infty$.
Por lo tanto, la función no presenta asíntotas oblicuas.

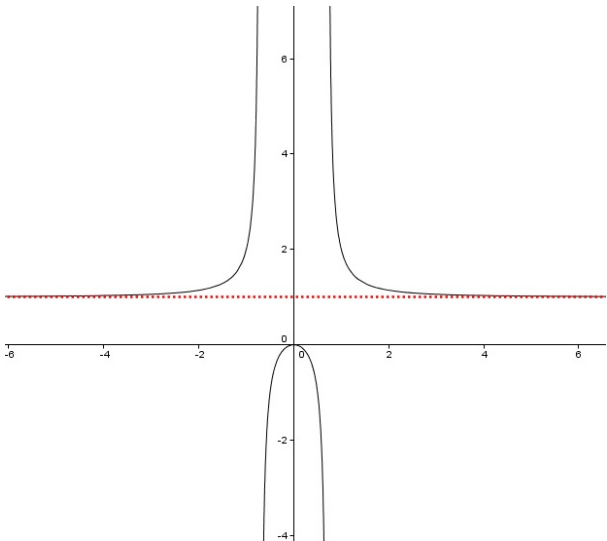
Analicemos un caso algo especial y es cuando al calcular una asíntota oblicua, nos aparece una asíntota horizontal. Para ello, vamos a calcular las asíntotas oblicuas de la función $f(x) = \frac{2x^2}{2x^2-1}$.

Actuamos como en los casos anteriores, calculando el límite de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2x^2}{2x^2-1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{2x^3-x} = 0$.

Así la pendiente de la asíntota oblicua es 0. Ahora pasamos a hallar el valor n de la asíntota oblicua.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{2x^2-1} - 0 \cdot x = 1$.

Así la asíntota sería $y = 0 \cdot x + 1 = 1$, con lo que realmente, la función presenta una asíntota horizontal **y=1**, no oblicua. Observa la gráfica:



Comprueba lo aprendido

Halla, si existe, la asíntota oblicua de la función $f(x) = \frac{x^2+5x-5}{x}$

- ☐ y = 5x
- ☐ y = 5x+5
- ☐ y = x+5
- ☐ y = 5

Determina correctamente la pendiente de la asíntota

Determina correctamente la pendiente de la asíntota

Correcto

Determina correctamente la pendiente de la asíntota

Solución

- 1. Incorrecto
- 2. Incorrecto
- 3. Opción correcta
- 4. Incorrecto



Comprueba lo aprendido

Calcula, si existen, las asíntotas oblicuas de la función $f(x) = \frac{x}{x^2+6}$

- ☐ y = x+1
- ☐ La función tiene una asíntota horizontal en y = 0
- ☐ y = x-2
- ☐ y = x-6

Determina correctamente la pendiente.

Correcto.

Determina correctamente la pendiente.

Determina correctamente la pendiente.

Solución

- 1. Incorrecto
- 2. Opción correcta
- 3. Incorrecto
- 4. Incorrecto



Comprueba lo aprendido

La asíntota oblicua de la función $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^2}$ es $y = x + 2$

- ☐ Verdadero
- ☐ Falso

Falso

La asíntota oblicua es $y = x - 2$

Resumen



Importante

Si $f(x)$ se acerca a l cuando x se aproxima al punto a , diremos que l es el límite de $f(x)$ en el punto a .

Lo anterior se expresa de la siguiente forma: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$



Importante

Llamaremos **límite por la derecha** de la función $f(x)$ al valor que se obtiene en la función cuando x se acerca al valor a por la derecha, es decir siempre por valores mayores que a . Se representa por:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

Hablaremos del **límite** de la función $f(x)$ cuando x tiende al valor a **por la izquierda** a lo que se obtiene cuando a x le vamos dando valores cercanos al valor a por la izquierda, es decir, siempre con valores más pequeños. Se representa por:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$$

La condición para que exista el límite de una función en un punto es que existan los dos límites laterales y que coincidan. Si los límites laterales no coinciden entonces no existe el límite de la función en el punto. Se tiene por tanto:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$



Importante

-Diremos que la función **$f(x)$ tiende a infinito** cuando la variable tiende hacia un valor a , cuando el valor de la función se hace cada vez más grande o más pequeño a medida que nos acercamos al valor a . Se escribe como

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

Como es evidente la función tiende a $+\infty$ o $-\infty$ según las situaciones.

-Si a medida que el valor de la variables se hace muy grande o muy pequeño la función también se hace cada vez más pequeña o más grande diremos que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

Si mientras más grande o más pequeña se hace la variable la función tiende a estabilizarse en un valor fijo b diremos entonces que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$$

Evidentemente habrá que estudiar cuando la variable tiende a $+\infty$ y a $-\infty$, pues puede darse el caso de que en ambos sentidos no tome el mismo valor.



Importante

Una función $f(x)$ se dice **continua en un punto $x = a$** , si $f(x)$ se aproxima a $f(a)$ cuando x se acerca a a , o lo que es lo mismo, si cumple las siguientes tres condiciones:

1. Que exista $f(a)$
2. Que exista $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$
3. Que los dos valores anteriores coincidan, es decir, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

En caso contrario, la función se dirá **discontinua** en dicho punto.

Una función que es continua en **todos los puntos donde está definida**, se dirá **continua**.

Podemos indicar algunos criterios de continuidad en función del tipo de función:

- Las funciones polinómicas son continuas en todo el conjunto de los números reales.
- Las funciones racionales son continuas en todos los números reales, salvo en aquellos puntos donde se anule el denominador.
- Las funciones potenciales, exponenciales y logarítmicas son continuas en todo su dominio de definición.

- Una **discontinuidad se dice evitable** en $x = a$ si existe el límite de la función en el punto y es finito, pero no coincide con el valor $f(a)$ o no existe dicho valor.

La discontinuidad se llama de tipo evitable, ya que podemos evitar la discontinuidad si definimos $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$

- Una función presenta una **discontinuidad en $x = a$ de salto** o de primera especie si existen los límites laterales y son distintos o al menos uno de ellos es infinito.

Se dirá que la discontinuidad es de salto finito si los límites laterales son finitos y de salto infinito si al menos uno de ellos es infinito.



Importante

- Una función $f(x)$ tiene una **asíntota vertical** en $x = a$ si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm \infty$$

Para calcular las asíntotas de $f(x)$, determinamos aquellos valores para los que se anula el denominador y posteriormente analizamos los límites laterales de dicha función. En general las asíntotas verticales suelen aparecer entre los puntos que no pertenecen al dominio de la función.

- La función $f(x)$ tiene una **asíntota horizontal** en $y = b$ si se cumplen una de estas dos condiciones

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= b \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= b \end{aligned}$$

- Llamaremos **asíntota oblicua** de una función $f(x)$ a una recta, de ecuación $y = mx + n$, con la que la función tiende a coincidir en el infinito.

Para calcularla se utilizan las siguientes igualdades:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \quad n = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx]$$
