

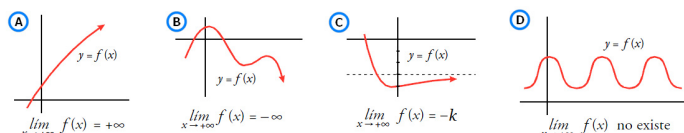
Límites en el infinito

Para expresar que damos a x valores cada vez

- más grandes escribimos $x \rightarrow +\infty$ (x tiende a más infinito)
- más pequeños escribimos $x \rightarrow -\infty$ (x tiende a menos infinito)

Y el límite nos indica lo que le ocurre a la función en cada caso:

- La función no está acotada y sus valores son cada vez más grandes $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$
- La función no está acotada y sus valores son cada vez más pequeños $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -\infty$
- La función está acotada y se acerca cada vez más a un valor k $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = k$
- Los valores de la función ni crecen ni decrecen indefinidamente, ni se acercan cada vez más a un número $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) \rightarrow \text{no existe}$



De forma análoga, pero en el lado izquierdo, cuando $x \rightarrow -\infty$

Observación: aunque para calcular límites en el infinito podamos recurrir a usar valores de x muy grandes (o muy pequeños) conviene no olvidar que infinito no es un número y no sigue las reglas que conocemos con los números, p.ej. $\infty + \infty = \infty$; $\infty \cdot \infty = \infty$; $\infty^\infty = \infty$, ...

CÁLCULO DE LÍMITES

En general, para calcular el límite de una función seguiremos este protocolo:

- Si la función se define mediante una única expresión, evaluamos la función en el punto c
- Si la función está definida "a trozos" evaluaremos la función en las expresiones que definen a $f(x)$ a izquierda y derecha de los extremos de los intervalos.

Como vimos anteriormente, no parece existir diferencia entre el cálculo del límite en un punto y evaluar la función en ese punto, sin olvidar que, para calcular un límite en un punto sólo nos interesa lo que le ocurre a la función muy cerca de él, no en dicho punto.

No obstante, lo cierto es que a la hora de calcular límites nos encontramos con casos en los que al evaluar la función:

- O el punto c no pertenece al dominio de la función.
- O el punto c genera una indeterminación, es decir, no es posible a partir de ella saber el valor del límite.

Cuando estamos ante alguno de estos casos, el cálculo del límite deberá realizarse mediante procedimientos analíticos.

INDETERMINACIONES

Existen formas llamadas **indeterminaciones** porque no es posible a partir de ellas determinar el límite. Las formas indeterminadas no garantizan que un límite existe, ni indican lo que el límite es, si existe.

El resultado no es el mismo en todos los casos, es decir, su valor no sólo depende del límite de las funciones f y g , sino de las propias funciones. En el cálculo de límites tenemos estas 7 indeterminaciones:

$$\infty - \infty ; 0 \cdot \infty ; \frac{0}{0} ; \frac{\infty}{\infty} ; 0^0 ; \infty^0 ; 1^\infty$$

Si al intentar evaluar un límite se llega a una de estas formas, y las funciones son sencillas y habituales, intentaremos reescribir la función mediante técnicas algebraicas.

Sin embargo, no todas las formas indeterminadas se pueden resolver así. Esto ocurre a menudo con funciones menos sencillas y cuando funciones algebraicas y transcendentales están mezcladas.

En estos casos, y según la indeterminación, podemos aplicar:

- La "regla de L'Hôpital", si es posible (una o más veces) $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0} \text{ ó } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$
- Infinitésimos equivalentes:
Si $f(x)$ y $g(x)$ son infinitésimos equivalentes cuando $x \rightarrow c$, entonces se puede decir que $f(x) \approx g(x)$ cuando $x \rightarrow c$. Es decir, cuando aparecen como factor o divisor pueden sustituirse uno por otro para el cálculo de límites cuando $x \rightarrow c$.
- La fórmula $\lim_{x \rightarrow c} f(x)^{g(x)} = \left[1^\infty \right] = e^{\lim_{x \rightarrow c} [g(x) \cdot (f(x)-1)]}$
- Otras equivalencias de funciones, como:
 $x \rightarrow \infty \Rightarrow a_n x^n + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \approx a_n x^n$

Un infinitésimo es una cantidad infinitamente pequeña, pudiéndose definir como: $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0$; f es un infinitésimo en $x = c$

$f(x)$ es un infinitésimo cuando $x \rightarrow 0$ en estos casos:

$$\text{sen } x \approx x ; \text{tg } x \approx x ; 1 - \cos x \approx \frac{x^2}{2} ; e^x - 1 \approx x ; \ln(1+x) \approx x, \text{ etc.}$$

$$\text{También es útil saber que } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e ; \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Límites de funciones Polinómicas

Considerando la función polinómica $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$

Caso I. cuando x tiende a un punto: $\lim_{x \rightarrow c} P(x)$; siendo c un n° real

$$\lim_{x \rightarrow c} P(x) = P(c), \text{ es decir, sustituyendo } x \text{ por } c$$

Esto se deduce de los límites básicos ya citados.

Caso II. cuando x tiende a infinito: $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x)$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x)$

El límite cuando $x \rightarrow +\infty$ de una función polinómica es $\pm\infty$, según el coeficiente del **término de mayor grado**. Si $x \rightarrow -\infty$, además tendremos en cuenta el exponente del término de mayor grado.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_n x^n = \pm\infty$$

Es decir, el signo del ∞ se determina con la "regla de los signos"

Ejemplo 1

$$\lim_{x \rightarrow 2} (5x - 1) = 5 \cdot 2 - 1 = \boxed{9}$$

Ejemplo 2

$$\lim_{x \rightarrow -1} (8x^3 + 11x^2 - 32x - 10) = 8(-1)^3 + 11(-1)^2 - 32(-1) - 10 = \boxed{25}$$

Ejemplo 3

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 - x^4) = \lim_{x \rightarrow \infty} (-x^4) = \boxed{-\infty}$$

(El término x^4 es un infinito de orden superior)

Ejemplo 4

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 - 10x^2 - 9x - 100) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 = \boxed{\infty}$$

Siendo la función racional $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, (cociente de dos polinomios)

Caso I, cuando x tiende a un punto: $\lim_{x \rightarrow c} \frac{P(x)}{Q(x)}$; siendo c un n° real

La forma de hallar el límite depende del valor de $Q(c)$

1º Si $Q(c) \neq 0$ entonces $\lim_{x \rightarrow c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(c)}{Q(c)}$

2º Si $Q(c) = 0$ puede ocurrir:

a) Que $P(c) \neq 0$, entonces $\lim_{x \rightarrow c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \infty$

Y entonces **estudiamos los límites laterales**.

b) Que $P(c) = 0$, entonces nos aparece $\left[\frac{0}{0} \right]$ (IND.)

Para evitar la indeterminación podemos utilizar:

“**Regla de Ruffini**”. La fracción se puede simplificar dividiendo numerador y denominador por $(x - c)$ una o varias veces hasta poder aplicar el apartado 1º o el 2º a).
“**Multiplicar por el conjugado**”. Es útil cuando aparecen raíces cuadradas en numerador y/o denominador.

Caso II, cuando x tiende a infinito: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$

Al evaluar estos límites (aplicando las propiedades de los límites) obtenemos la indeterminación $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$.

1º Método:

La forma más rápida de hallar el límite es teniendo en cuenta que solo importarán los términos de mayor grado del numerador y del denominador:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^m + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^n + \dots + b_1 x + b_0} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^m + \dots}{b_m x^n + \dots}$$

Para hallar límites en el infinito de funciones racionales de este tipo nos fijaremos en el grado del numerador (m) y en el grado del denominador (n), pudiendo aplicar la siguiente regla:

- Si $m > n$ entonces $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ (usar regla de los signos)
- Si $m < n$ entonces $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$
- Si $m = n$ entonces $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \frac{a}{b}$ (aplicar regla de los signos)

2º Método:

El problema también se puede resolver reescribiendo la expresión dada en otra forma equivalente; concretamente dividiendo cada uno de los términos de la fracción por la potencia de mayor grado que aparezca en toda la expresión, simplificando y, sabiendo que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{k}{x^n} = 0 \quad (\text{Si } n \text{ es positivo y } k \text{ constante.})$$

Pues al dividir un número cualquiera por un número cada vez más grande, el cociente es cada vez más próximo a cero. Observa que ahora el que sea $+\infty$ o $-\infty$ es indiferente pues el resultado es 0.

Cuando se trate de cocientes de otros tipos de funciones no polinómicas se utilizan otros métodos, ya mencionados anteriormente.

Observación: si aparece la indeterminación $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$ o $\left[\frac{0}{0} \right]$, por tratarse de fracciones algebraicas, a veces podemos evitar estas indeterminaciones efectuando la resta o el producto de dichas fracciones.

Ejemplo 5

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-5}{x+7} = \frac{2 \cdot 1 - 5}{1 + 7} = \left[\frac{-3}{8} \right] \quad (\text{por sustitución directa})$$

Ejemplo 6

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{-3}{(x-5)^2} = \frac{-3}{0^+} = \left[-\infty \right]$$

Como el denominador está al cuadrado no es necesario calcular los límites laterales.

Ejemplo 7

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 - x^3}{3x^4 - 2x^3} = \frac{0-0}{0-0} = \left[\frac{0}{0} \right] \quad (\text{sacando factor común})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3(x-1)}{x^3(3x-2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{3x-2} = \frac{0-1}{0-2} = \left[\frac{1}{2} \right]$$

Ejemplo 8

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} = \frac{1-3+2}{1-1} = \left[\frac{0}{0} \right] \quad (\text{descomponiendo en factores})$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-2}{x+1} = \frac{1-2}{1+1} = \left[-\frac{1}{2} \right]$$

Ejemplo 9

1º Método: (comparando el grado del N y del D)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 3}{x^2 + 2} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \xrightarrow{gr(N) > gr(D)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 3}{x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2} = \left[\infty \right]$$

2º Método: (dividiendo por potencia de mayor grado de la expresión)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 3}{x^2 + 2} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3}{x^2} + \frac{3}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{3}{x^2}}{1 + \frac{2}{x^2}} = \frac{1+0}{1+0} = \frac{1}{1} = \left[1 \right]$$

Ejemplo 10

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x}{x^3 - 3x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \xrightarrow{gr(N) < gr(D)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \left[0 \right]$$

Ejemplo 11

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 2x - 1}{2x^3 + 2} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \xrightarrow{gr(N) = gr(D)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3}{2x^3} = \left[\frac{3}{2} \right]$$

Ejemplo 12

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 5x}{x^2 - 3x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \xrightarrow{gr(N) > gr(D)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = \left[-\infty \right]$$

Ejemplo 13

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 - x} + x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right]$$

Al dividir por x , dentro de la raíz pasa como x^2 .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2} - \frac{x}{x^2} + \frac{x}{x^2}} + \frac{x}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x} + 1} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1-0}+1} = \left[\frac{1}{2} \right]$$