

MT1 - Tema 4.2: Análisis I: Características de las funciones. Funciones afines y cuadráticas



Análisis I: Características de las funciones. Funciones afines y cuadráticas

Matemáticas I

1.º Bachillerato

Contenidos

Análisis I

Características de las funciones. Funciones afines y
cuadráticas

1. Introducción

¿Has asistido alguna vez a una obra de teatro o a una ópera?

Lo que se muestra en este tipo de espectáculos, por decirlo de modo coloquial, es la **representación** visual, musical y artística de un guión o libro escrito.

Es decir, nos permite disfrutar de la obra de una manera cómoda y amena aprovechando la potencia del lenguaje visual.

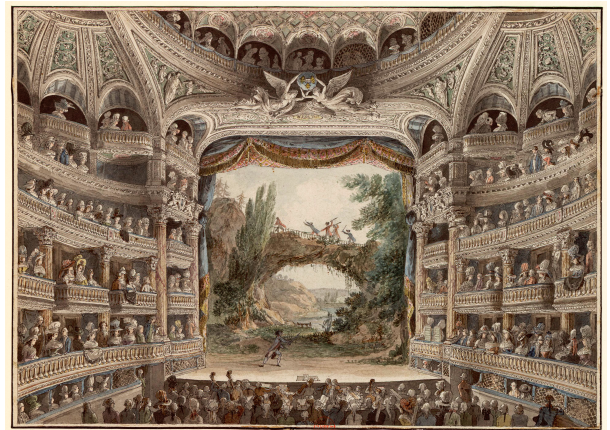


Imagen en [Wikimedia Commons](#). Dominio Público

Este tema lo dedicaremos al estudio de las características de las funciones. Para ello, en la mayoría de las ocasiones, haremos uso y aprovecharemos la representación visual de las mismas que, en el lenguaje matemático, se denomina **representación gráfica**.

En el argot teatral, un **acto** es una breve función que es parte de un programa más largo. Con frecuencia, los actos están separados por un intermedio. Cuando se trata de una representación teatral o de una ópera cada acto individual termina cuando se cierra el **telón**. En un programa de televisión, cada acto está separado habitualmente por anuncios y, en el caso de un libro, el equivalente a los actos serían los capítulos.

El guión de nuestro tema, la división en apartados, constituye el programa de actos de "nuestra obra". Es el que figura a la izquierda.

¿Estás preparado/a? Pues entonces,

¡Qué comience la función

2. Monotonía, extremos y puntos de corte

En el tema anterior, se dio la siguiente definición de **función**:



Importante

Se define **función** real de variable real, a una relación que asocia a un número x de un **conjunto inicial**, otro número y de un **conjunto final**. El número y es **único**, es decir, a x no se le puede asociar más de un número.

A las funciones se les suele llamar f , y la relación se expresa de la siguiente manera: $y = f(x)$.

Por ejemplo: La relación que existe entre la velocidad y el combustible consumido es una función, pues a cada velocidad sólo le corresponde una única cantidad de litros consumidos.

Definida así, matemáticamente, quizás no seamos capaces de ver todo el potencial que tienen las funciones. Pero, ¿y si las vemos representadas? Es decir, ¿y si vemos su gráfica?

En el siguiente vídeo se muestra el porqué de la utilización masiva de las gráficas en distintas áreas del conocimiento, no sólo en matemáticas, mediante una batería de ejemplos de la vida cotidiana. Se describe el nacimiento del lenguaje de las gráficas, se presenta la relación: ecuación de una función-gráfica y se muestra donde radica el verdadero potencial de estos objetos:

"Ante todo, una gráfica es capaz de ofrecer un gran volumen de información, tanto numérica como cualitativa de una manera global, es decir, de un simple vistazo" (Antonio Pérez Sanz).

+X- 12 El lenguaje de las gráficas



Vídeo de MAT_AOJ alojado en [Youtube](#)

Se ha levantado el telón. En este primer acto estudiaremos algunas de las características de las funciones. Comenzaremos estudiando su monotonía (crecimiento y decrecimiento).

Algo que realizamos con mucha frecuencia es estudiar el comportamiento, la evolución, de cualquier fenómeno de la realidad. El impacto que ha tenido una determinada película en su lanzamiento se mide en función del número de espectadores que acuden a verla en las salas de cine. Si representásemos esta función, sea cual sea la película, es más que probable que se comporte de esta manera: en su inicio será creciente, posteriormente con el paso del tiempo se estanca, a lo mejor se recupera un poco, para acabar bajando cada vez más en número de espectadores hasta que no sea rentable su proyección y desaparezca de la cartelera.



Importante

Atendiendo a la monotonía podemos clasificar las funciones en tres tipos.

- Una función real $f(x)$ es **creciente** en un intervalo si para dos valores cualesquiera del intervalo x y x' , con $x < x'$, se tiene que: $f(x) \leq f(x')$
- Una función real $f(x)$ es **decreciente** en un intervalo si para dos valores cualesquiera del intervalo x y x' , con $x < x'$, se tiene que: $f(x) \geq f(x')$
- Una función real $f(x)$ es **constante** en un intervalo si para todos los valores, x , del intervalo se tiene que: $f(x) = k$ (constante)

Aunque existen funciones que son crecientes, decrecientes o constantes en todo su dominio de definición, lo más habitual es encontrarse con aquellas que tienen una combinación de todos los tipos indicados.

Pero, no basta con conocer si una función crece o decrece. En ocasiones nos interesará conocer hasta dónde llega ese crecimiento y/o decrecimiento, si se alcanzan **máximos/mínimos absolutos**, o si los valores obtenidos son **extremos relativos**, es decir, son grandes o pequeños, sólo en comparación con los que tienen a su alrededor.

Seguro, que en alguna ocasión has oído hablar del **Euribor**. La actualización de las cuotas que pagamos por los préstamos hipotecarios se realiza en base a este índice de referencia. Cuanto más alto (bajo) sea su valor, mayor (menor) será la cantidad que debemos pagar mensualmente por nuestra hipoteca. En la imagen se observan altibajos de crecimiento y decrecimiento y algunos puntos, valores, que llaman la atención bien por ser los más altos o los más bajos. Son los que denominamos **extremos**. A continuación, hablaremos de ellos.

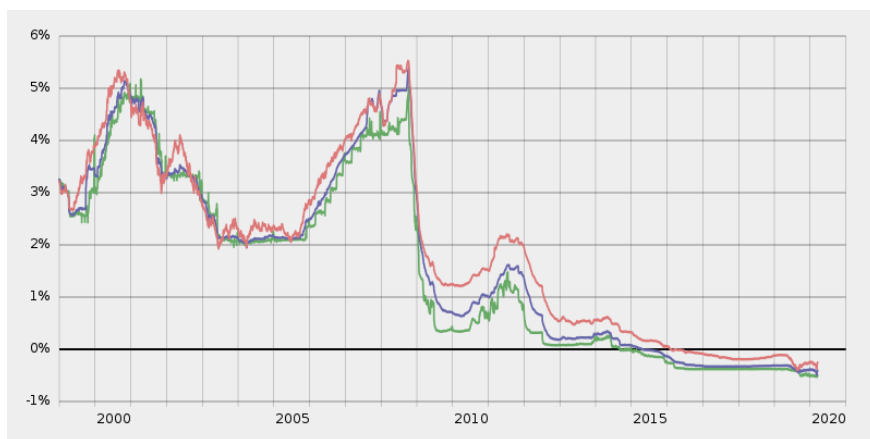


Imagen en [Wikimedia Commons](#). Licencia [CC](#)



Importante

Extremos absolutos.

- Una función f alcanza su **máximo absoluto** en el punto $x=a$ si es creciente a la izquierda de este punto y decreciente a su derecha. El valor de la ordenada (coordenada y) en el máximo es mayor o igual que en cualquier otro punto del dominio de la función.
- Una función f alcanza su **mínimo absoluto** en el punto $x=b$ si es decreciente a la izquierda de este punto y creciente a su derecha. El valor de la ordenada (coordenada

y) en el mínimo es menor o igual que en cualquier otro punto del dominio de la función.

Pero, en ocasiones, hay otros puntos que destacan entre los de su entorno más cercano, son los:

Extremos relativos.

- Una función f tiene un **máximo relativo** en el punto $x=a$ si $f(a)$ es mayor o igual que en todos los puntos próximos al punto $x=a$, tanto por la derecha como por la izquierda de él.
- Una función f tiene un **mínimo relativo** en el punto $x=b$ si $f(b)$ es menor o igual que en todos los puntos próximos al punto $x=b$, tanto por la derecha como por la izquierda de él.

Del mismo modo que hay puntos importantes como los extremos, existen otros que presentan una singularidad especial. Son los **puntos de cortes con los ejes**.



Importante

Llamamos **puntos de corte** a aquellos puntos en los cuales la gráfica representada corta al eje de abscisas (eje OX) y/o al de ordenadas (eje OY).

- Los puntos de corte con el eje OX son de la forma $(x_0, 0)$. Su coordenada y vale 0.
- Los puntos de corte con el eje OY son de la forma $(0, y_0)$. Su coordenada x vale 0.

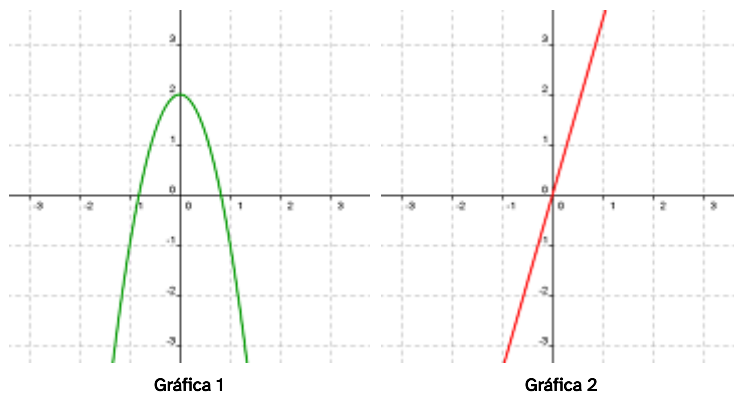
Si tenemos la ecuación de la función en la forma $y = f(x)$, hallar los puntos de corte:

- Con el eje OX, equivale a resolver el sistema de ecuaciones: $\{y=f(x), y=0\}$
- Con el eje OY, equivale a resolver el sistema de ecuaciones: $\{y=f(x), x=0\}$



Comprueba lo aprendido

Observa con detenimiento las gráficas de las funciones representadas y rellena a continuación los huecos en cada una de los apartados:



Llamaremos $f(x)$ a la función representada en la Gráfica 1 y $g(x)$ a la representada en la Gráfica 2.

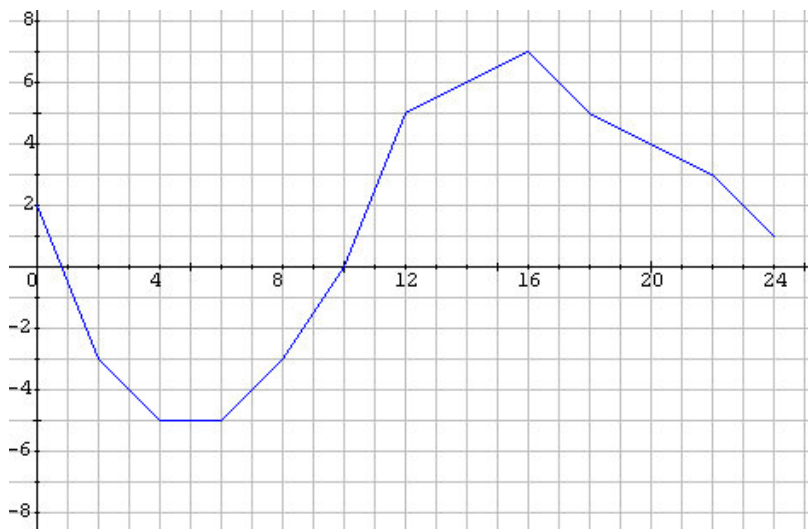
- $f(-1) = \square$, $f(\square) = 2$, $f(1) = \square$
- f es una función en el intervalo $(-\infty, 0]$ porque $-1 \square 0$ y $f(-1) \leq f(0)$
- f es una función en el intervalo $[\square, +\infty)$ porque $\square < \square$ y $f(0) \geq f(1)$
- f corta al eje OY en el punto de coordenadas (\square, \square)
- f corta al eje OX en punto/s
- g es una función estrictamente
- $g(0) = \square$
- g corta el eje OX en el punto (\square, \square) y al eje OY en el punto (\square, \square)



Caso práctico

En la siguiente imagen puedes ver la gráfica de las temperaturas a lo largo de un día en una ciudad española. En el eje OX están representadas las horas del día y en el eje OY las temperaturas en grados centígrados.

Horas del día - Temperaturas (°C)



- (a) ¿Qué temperatura hizo a las 0 horas? ¿Y a las 10 horas? ¿Son esos puntos significativos?
- (b) ¿Qué se podría afirmar acerca del crecimiento y decrecimiento de la temperatura (monotonía)?
- (c) ¿Se mantuvo constante la temperatura en algún intervalo del día? ¿Cual fue el valor de la temperatura en dicho intervalo?
- (d) ¿A qué hora se alcanzaron las temperaturas máximas y mínimas? ¿Cuales fueron los valores de dichas temperaturas?
- (e) ¿Son máximos/mínimos absolutos o relativos?
- (f) ¿En qué tramo horario se alcanzaron temperaturas bajo cero?

(a) A las 0 horas, 2°C. A las 10 horas, 0°C. Claro que son significativos. Son los puntos de corte con los ejes. El primero es el punto de corte con el OY y el segundo con el eje OX.

(b) La temperatura va descendiendo hasta las 4 de la madrugada donde se alcanzan -5 °C (cinco grados bajo cero). Se mantiene constante desde las 4 hasta la 6, donde empieza a subir hasta las 16 horas cuando se alcanza una temperatura de 7°C, comenzando a descender desde ese momento hasta las 24 horas cuando se alcanza 1°C.

Decrece en [0,4] y [16,24] - Constante en [4,6] - Crece en [6,16]

(c) Constante en [4,6]. Temperatura constante de -5°C

(d) La máxima se alcanzó a las 16 horas con un valor de 7°C. La mínima se alcanzó desde las 4 a las 6 de la madrugada con un valor de -5°C

(e) Tanto el máximo como los mínimos son absolutos. No hay ninguna hora del día en las que se alcancen temperaturas por encima y por debajo, respectivamente, que en esas horas.

(f) Temperaturas bajo cero se alcanzaron desde un poco antes de la 1 de la madrugada hasta las 10 de la mañana.



Curiosidad

La cuenta de resultados.

Si llamamos $f(x)$: función de beneficios (ingresos menos costes) de una empresa, donde x representa el tiempo transcurrido en años desde su fundación.

(a) $f(0)$ punto de corte con el eje OY, nos indicará el coste de la empresa. Es decir, al comienzo no existen ingresos luego, nos devolverá, cuánto ha sido la inversión necesaria para poner en marcha la empresa.

(b) Si para algún año, x , tenemos que $f(x)=0$, punto de corte con el eje OX, nos indicará que en el año x , la empresa ha obtenido un beneficio igual a 0 €. Ha ingresado lo mismo que ha gastado.

(c) Si $f(x) > 0$ indicará que la empresa ha obtenido beneficios. Por el contrario, si $f(x) < 0$ indicará que la empresa ha obtenido pérdidas durante ese año.



Imagen de Eric Caballero en [Flickr](#). Licencia [CC BY](#)

3. Acotación, simetría y concavidad



¿Cómo llevas la obra de teatro? ¿Bien? ¿Te ha resultado muy largo el primer acto o, por el contrario, te ha parecido ameno?

Bueno, ya queda menos. Casi sin darnos cuenta, ya estamos en el segundo acto, en mitad del tema. En el primero hemos hablado de monotonía, extremos y puntos de corte.

En éste, trataremos otras características de interés a la hora de estudiar y analizar funciones y gráficas.



Importante

- Una función está **acotada superiormente** si existe un número real k , mayor o igual que cualquier valor del recorrido de la función: $f(x) \leq k$
 - Una función está **acotada inferiormente** si existe un número real k , menor o igual que cualquier valor del recorrido de la función: $f(x) \geq k$
 - Una función está **acotada** cuando lo está superior e inferiormente.
-



Importante

- Una función es **simétrica respecto al eje de ordenadas (OY)**, si para todo valor, x , de su dominio se cumple que: $f(-x)=f(x)$. En este caso decimos que la función es **Par**.
- Una función es **simétrica respecto al origen de coordenadas**, si para todo valor, x , de su dominio se cumple que: $f(-x)=-f(x)$. En este caso decimos que la función es **Impar**.

Aunque existen funciones de los dos tipos descritos, **Par** e **Impar**, lo más frecuente es que una función no presente ningún tipo de simetría.



Comprueba lo aprendido

En la siguiente escena del Proyecto Edad puedes practicar sobre el concepto de par/impar:

http://proyectodescartes.org/EDAD/materiales_didacticos/EDAD_4eso_funciones1-JS-LOMCE/ejercicios_resueltos_2c.htm

Escena de María José García Cebrian en [Proyecto Descartes](#). Licencia [CC](#)



Comprueba lo aprendido

Completa los espacios en blanco con las características de las funciones: $f(x) = \frac{2}{x}$, $g(x) = x^3 + 1$ y $h(x) = 2x^4 - 5x^2$

- $f(x)$ es una función simétrica respecto del de , luego es una función .
- $D(f) = \mathbb{R} - \{ \text{ } \}$
- $R(f) = \mathbb{R} - \{ \text{ } \}$
- En cuanto a su monotonía, podemos afirmar que $f(x)$ es una función .
- ¿ g es par? ¿ g es impar?
- $g(x)$ corta al eje OY en el punto (,)
- ¿ h es par? ¿ h es impar?
- La gráfica de $h(x)$ corta al eje OX en (0,1,2,3 ó 4) puntos distintos.

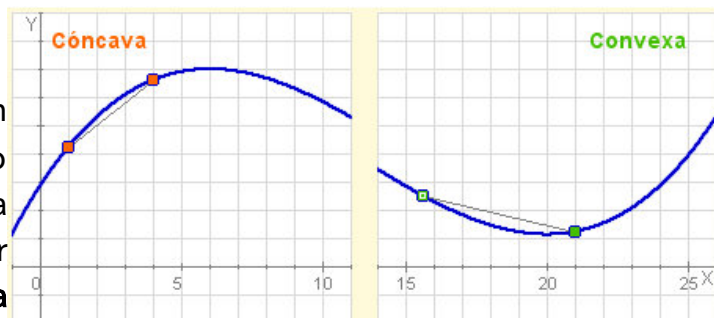
Para completar los huecos puedes ayudarte de la representación gráfica de las mismas que podrás hacer pulsando [aquí](#) con **Geogebra**, siguiendo las instrucciones que se recomiendan en el siguiente [tutorial](#).

Por último, para ir acabando este acto, veremos otro atributo, característica, de interés a la hora de estudiar las funciones. Es aquella que se refiere a la **curvatura**. Este aspecto se centra en estudiar los intervalos en los que la gráfica adopta una posición de curva hacia abajo (**concavidad**) o hacia arriba (**convexidad**) y los puntos, si existen, en que la gráfica pasa de una postura a la otra.



Importante

- Una función, f , es **cóncava** en un intervalo determinado si el segmento que une dos puntos cualesquiera de la curva en dicho intervalo queda por debajo de la gráfica de f y es **convexa** si queda por encima.

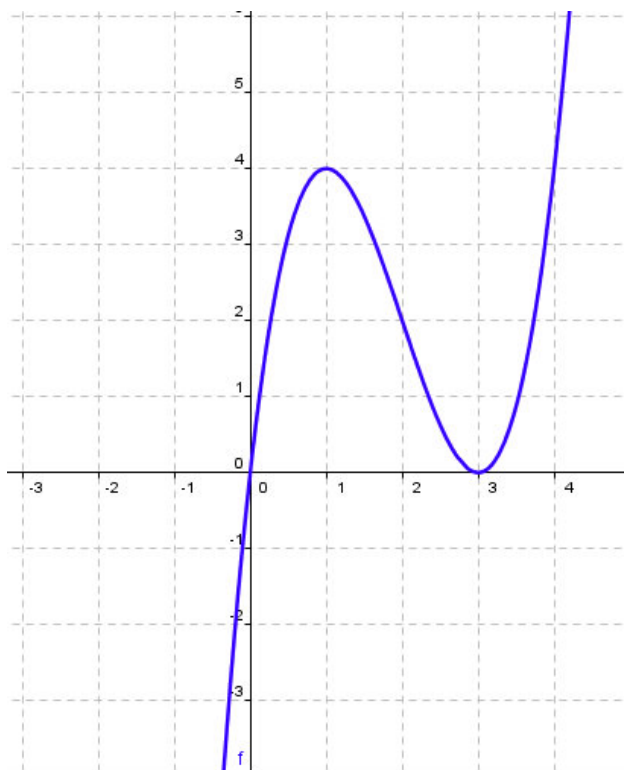


- Los puntos del dominio en los que la función, f , pasa de cóncava a convexa, o viceversa, reciben el nombre de **puntos de inflexión**.



Comprueba lo aprendido

Vamos a analizar de manera detallada la siguiente gráfica.



(a) ¿Con qué ecuación crees que se corresponde el dibujo?

- ☐ $f(x) = 3x + 3$
- ☐ $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

☐ $f(x) = 5x^2 + 3$

No es correcto, porque esta expresión correspondería con una gráfica recta.

¡Correcto! Por descarte. Ni es una recta, ni una parábola.

No es correcto. Esta expresión correspondería a la gráfica de una parábola.

Solución

1. Incorrecto
2. Opción correcta
3. Incorrecto

(b) Es decreciente en:

- ☐ el intervalo (1,3)
- ☐ el intervalo (0,3)
- ☐ ningún intervalo. Es siempre creciente.

¡Correcto! Basta con observar la gráfica.

No es correcto. Observa bien la gráfica.

No es correcto. Si es un despiste, no pasa nada.

Solución

1. Opción correcta
2. Incorrecto
3. Incorrecto

(c) Tiene un máximo relativo en el punto

 [Sugerencia](#)

- ☐ (0,0)
- ☐ (-3,7)
- ☐ (1,4)

No es correcto. Lee bien la pregunta.

No es correcto. No es recomendable que respondas al azar.

¡Correcto! No es absoluto, pero sí relativo.

Solución

1. Incorrecto
2. Incorrecto
3. Opción correcta

(d) La función es convexa en el intervalo $(-\infty, 2)$ y cóncava en el intervalo $(2, +\infty)$

 [Sugerencia](#)

- ☐ No
- ☐ Sí

No es correcto. Es justo lo contrario. La función es cóncava (hacia abajo) en el intervalo $(-\infty, 2)$ y convexa (hacia arriba) en el intervalo $(2, +\infty)$

¡Correcto! La función es cóncava (hacia abajo) en el intervalo $(-\infty, 2)$ y convexa (hacia arriba) en el intervalo $(2, +\infty)$

Solución

1. Incorrecto
2. Opción correcta

(e) La función tiene un punto de inflexión en

 [Sugerencia](#)

- ☐ $(0,0)$
- ☐ $(1,4)$
- ☐ $(2,2)$

No es correcto. Mira de nuevo la gráfica.

No es correcto. Es un máximo, cambia la monotonía en él pero no la curvatura.

¡Correcto! Justo en este punto cambia la curvatura de la función.

Solución

1. Incorrecto
2. Incorrecto
3. Opción correcta



Para saber más

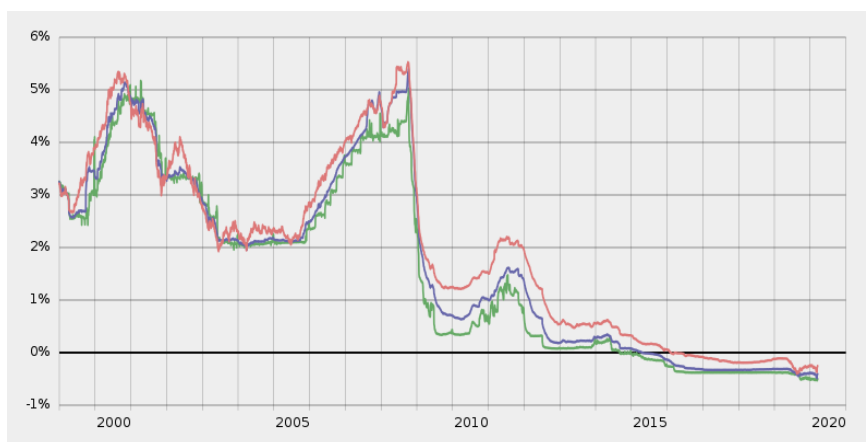


Imagen en [Wikimedia Commons](#). Licencia [CC BY 3.0](#)

El concepto de **tendencia** en campos como la economía tiene mucha relevancia, es indicativo o premonitorio de que algún fenómeno económico se va a comportar, o al menos se espera que se comporte de una manera determinada.

Continuamente oímos expresiones como *"la bolsa de Madrid ha cerrado hoy con una tendencia al alza y el **IBEX 35** ha subido ..."*

Sobre tendencias y límites de funciones hablaremos más detenidamente en la próxima unidad. Solamente, de momento, conviene que sepas a que se refiere.

En la imagen se observa como el **Euribor** lleva bastante tiempo en mínimos históricos, por lo que lo más normal es que no aguante mucho tiempo más así y presente una tendencia al alza. En definitiva, que se espera que aumente su valor y por tanto el de nuestras hipotecas. Por consiguiente, pagaremos más cada mes y, por tanto, tendremos menos dinero para gastar en otras cosas.

Conclusión: Cuando oigas que el Euribor, tiene tendencia al alza, ¡vete preparando y dirige tus ruegos a quien confíes, porque tocará apretarse el cinturón!

4. Traslaciones verticales y horizontales

Ya han transcurrido dos actos y seguro que habrás observado que el decorado ha cambiado entre uno y otro. Cae el telón al finalizar un acto y, cuando vuelve a levantarse, ¡sorpresa! Al levantarse de nuevo vemos que el decorado del escenario ha cambiado completamente o que se **transformado**, algunos objetos han desaparecido y otros han cambiado de ubicación. Han sido desplazados. Más hacia la derecha o izquierda, más hacia arriba o abajo. Tal vez, una mezcla de ambas situaciones.

Las funciones también pueden sufrir **transformaciones**. Desplazamientos en horizontal en vertical, e incluso cambios de forma.

Del análisis de estas transformaciones nos encargaremos a continuación.

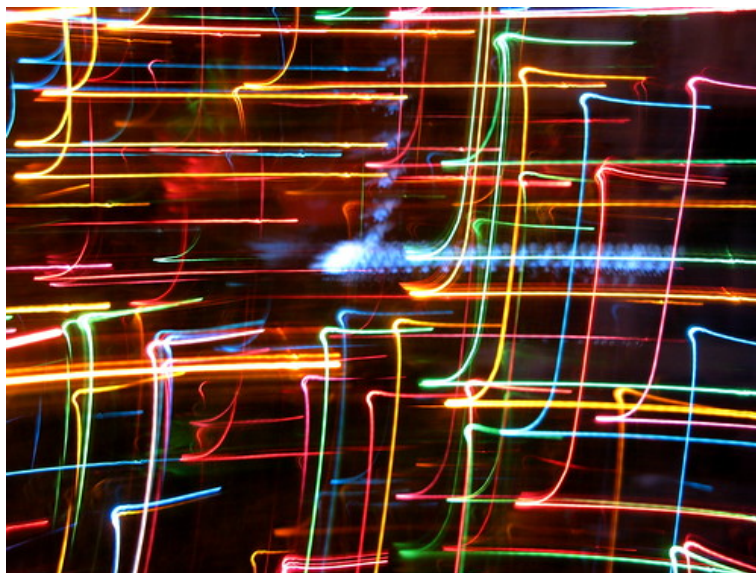


Imagen de kevindooley en [Flickr](#). Licencia [CC BY 2.0](#)



Importante

Trasladar una función, $y = f(x)$, **verticalmente** k unidades consiste en sumarle a la variable dependiente (y) la constante (k).

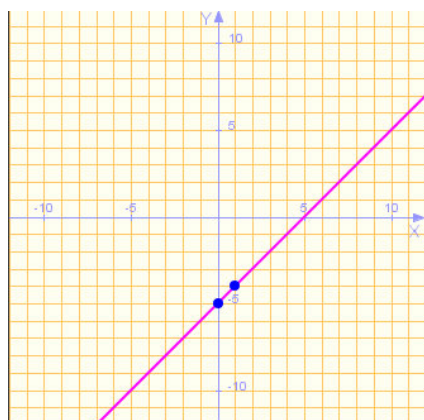
Obtenemos así una nueva función: $y = f(x) + k$

- Si k es positiva, entonces, la función se traslada hacia arriba.
- Si k es negativa, entonces, la función se traslada hacia abajo.

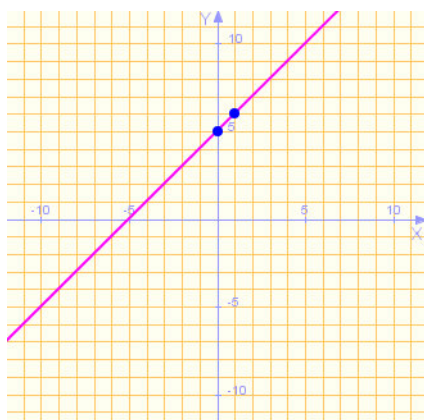


Comprueba lo aprendido

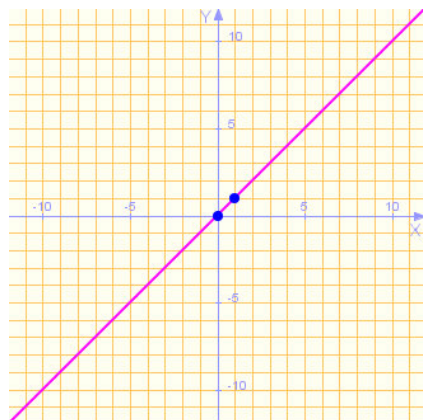
Completa los espacios en blanco relacionados con traslaciones verticales de las funciones afines representadas a continuación:



Gráfica N° 1



Gráfica N° 2



Gráfica N° 3

- (a) La gráfica de la función $f(x) = x$ es la Gráfica N°
- (b) Al, desplazar, aplicar una traslación vertical del tipo $y = f(x) + 5$ a la Gráfica N° 1 obtendremos la Gráfica N°
- (c) La gráfica de la función $f(x) = x - 5$ es la Gráfica N°
- (d) Al, desplazar, aplicar una traslación vertical del tipo $y = f(x) - 5$ a la Gráfica N° 3 obtendremos la Gráfica N°
- (e) La gráfica de la función $f(x) = x + 5$ es la Gráfica N°



Importante

Trasladar una función, $y = f(x)$, **horizontalmente**, p unidades consiste en restarle a la variable independiente (x) la constante (p).

Obtenemos así una nueva función: $y = f(x-p)$

- Si p es positiva, entonces, la función se traslada hacia la derecha.
- Si p es negativa, entonces, la función se traslada hacia la izquierda.



Importante

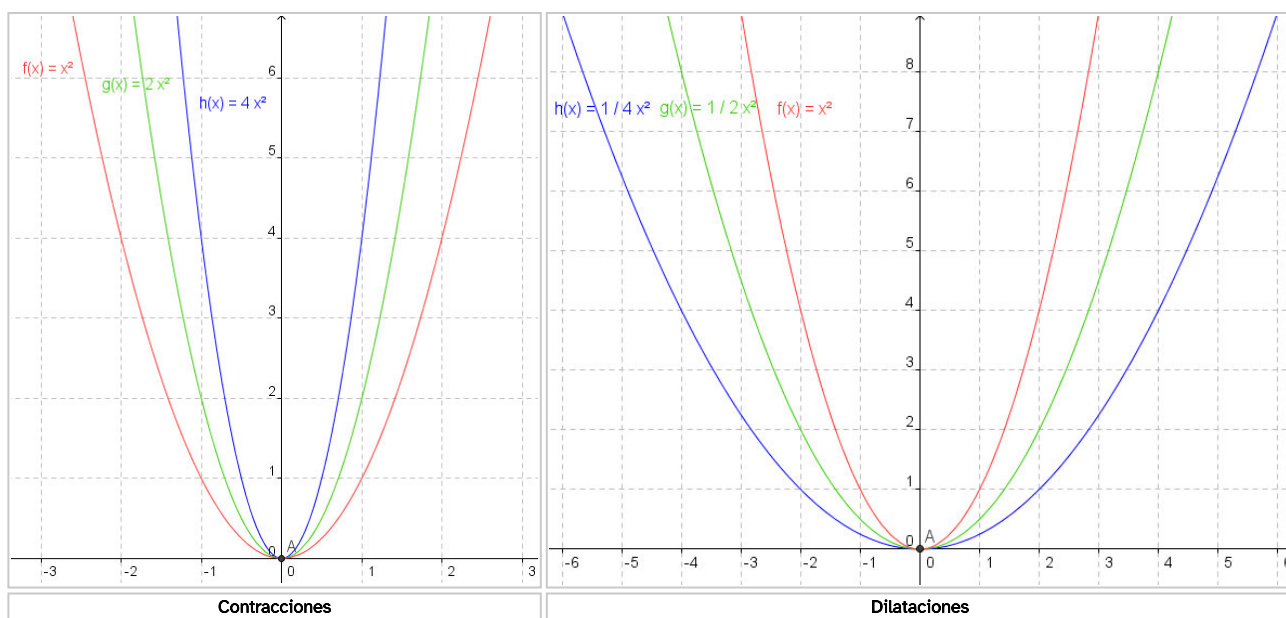
Si se aplican ambos tipos de transformaciones a f , es decir, una traslación horizontal (de p unidades) más una traslación vertical (de k unidades) es decir, una **transformación oblicua**, obtendremos la función: $y=f(x-p)+k$



Para saber más

Del mismo modo que las funciones pueden cambiar de lugar, trasladarse, también pueden cambiar de forma, mediante lo que se denominan **contracciones** o **dilataciones**.

- Una función, $f(x)$, se **contrae** si realizamos la siguiente operación: $f(k \cdot x)$ con $k > 1$
- Una función, $f(x)$, se **dilata** si realizamos la siguiente operación: $f(k \cdot x)$ con $0 < k < 1$



Curiosidad

Found Functions.

¿Te gustaría ver gráficas de funciones describiendo y adaptándose perfectamente a la naturaleza, como la que aparece a la izquierda?

Accede a la exposición virtual de [Nikki Graziano](#) y disfruta de esta maravilla de trabajo.

5. Funciones afines y cuadráticas

Al igual que en Literatura nos encontramos con **obras clásicas** como la "Ilíada" de Homero, en música las "Sinfonías" de Beethoven, o en el cine con películas como "2001, una odisea en el espacio" de Kubrick. En el mundo de las relaciones funcionales, ese papel de clásicas lo interpretarías las **funciones afines y cuadráticas**.



Importante

Las funciones polinómicas de primer grado, también llamadas **funciones afines** son aquellas cuya ecuación es del tipo $f(x) = mx + n$

Algunas de sus características principales son:

Su dominio es todo \mathbb{R}

Si $m > 0$, la función es creciente

Su gráfica es una recta con pendiente m

Si $m < 0$, la función es decreciente

Pasa por el punto $(0, n)$ [Punto de corte con el eje OY]

Dentro de las funciones afines podemos distinguir dos tipos. En una función afín: $f(x) = mx + n$

- Si $m = 0$, la función $y = n$ se denomina **función constante**. Su gráfica es una recta paralela al eje OX, que pasa por el punto $(0, n)$

- Si $n = 0$, la función $y = mx$ se denomina **función lineal** y su gráfica es una recta de pendiente m que pasa por el origen de coordenadas $(0, 0)$



Comprueba lo aprendido

Con motivo de la celebración de la semana cultural en una gran ciudad, se ha considerado poner una tarifa plana en el precio de las entradas para acudir a las distintas representaciones teatrales que se celebran esa semana. Se ha establecido una tarifa de 12 euros por persona.

(a) Obtén la ecuación de la función que nos permitirá calcular la recaudación obtenida en cada teatro, en función del número de asistentes.

(b) Si en un determinado teatro se ha completado el aforo para asistir a una obra y se ha recaudado un total de 8400 €. ¿Cuál es el aforo, la capacidad, del teatro? Es decir, ¿cuántas entradas se han vendido?

Resolvamos el problema.

(a) La función es $f(x) =$ donde x es el número de asistentes.

(b) El aforo máximo del teatro es de personas.

(a) Se trata de una función lineal $f(x) = mx$ puesto que la recaudación es proporcional a x : número de asistentes, con $m = 12$ € que es el precio de la entrada.

(b) Como $f(x) = 12x$, si $f(x) = 8400$, entonces, $x = 8400/12 = 700$ entradas se han vendido.



Caso práctico

El precio del trayecto de un taxi tiene un coste fijo de 3 €, más 0,5 € por cada kilómetro recorrido. Para asistir a la obra de teatro, cogemos uno.

(a) Elabora una tabla de valores de la función (kilómetros - euros) de nuestro taxi y realiza una representación gráfica a partir de dicha tabla.

(b) Halla la ecuación de dicha función y calcula su pendiente.

(c) Si nos cobran 6,25 € por el trayecto hasta el teatro, ¿qué distancia en metros tiene dicho trayecto?

Vayamos por partes.

- Datos:

Coste fijo por trayecto por valor de 3 €

0,5 € por cada Kilómetro recorrido.

- Planteamiento:

Tras leer el enunciado del problema observamos que: El coste del trayecto es la suma de una parte fija más una variable.

El coste del trayecto (y) se obtendrá como suma de estos dos factores. El fijo (3 euros) y el variable, que será proporcional, con un factor constante de 0,5, al número de kilómetros del trayecto (x)

- Resolución:

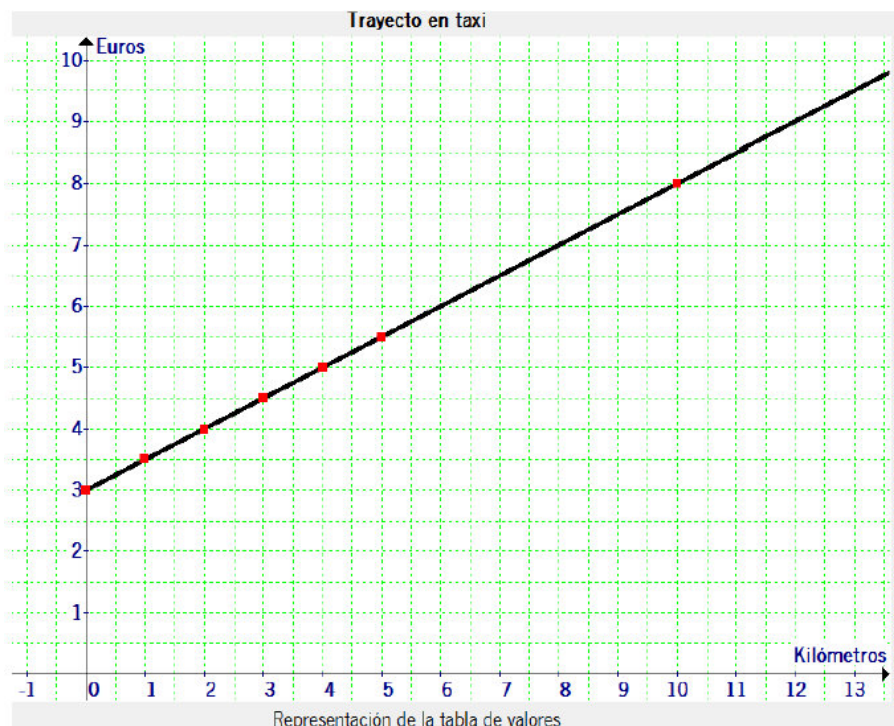
(a) Tabla de valores:

Supondremos trayectos con valores naturales, exactos, para los kilómetros, con el único fin de simplificar la elaboración de la gráfica que debemos realizar posteriormente.

Kilómetros (x)	0	1	2	3	4	5	10
----------------	---	---	---	---	---	---	----

Euros (y)	3	3,5	4	4,5	5	5,5	8
-----------	---	-----	---	-----	---	-----	---

Representación gráfica.



(b) Ecuación de la función que calcula el coste del trayecto.

Tal y como indicado en el planteamiento, el coste de un trayecto viene dado por la suma de 2 partes: una fija y otra proporcional al número de kilómetros recorridos.

Así, la ecuación vendrá dada por:

{Coste del trayecto=Coste fijo + Coste proporcional a km recorridos}

$$y = f(x) = 3 + 0,5 \cdot x$$

Observamos que hemos obtenido una función afín. Por tanto, es posible deducir la pendiente de su propia expresión, ya que como sabemos, una función afín viene dada por: $y = m \cdot x + n$, donde m es la pendiente de la función y n , el valor de la ordenada en el origen.

Así, igualando, $y = m \cdot x + n$ con $y = 0,5 \cdot x + 3$, obtendremos que la pendiente = $m = 0,5$.

(c) Distancia en metros del trayecto.

Nos han cobrado 6,25 € por un trayecto. Para averiguar la distancia que hemos recorrido, basta hacer $y = 6,25$ en la ecuación de la función y obtener x .

$$y = 0,5 \cdot x + 3 \rightarrow 6,25 = 0,5 \cdot x + 3 \rightarrow 6,25 - 3 = 0,5 \cdot x \rightarrow 3,25 = 0,5 \cdot x \rightarrow x = 3,25 / 0,5 \rightarrow x = 6,5 \text{ kilómetros.}$$

Como nos piden el trayecto en metros, basta convertir, de kilómetros a metros, multiplicando por 1000.

Así, la distancia, en metros, del trayecto es de 6500 metros.



Imagen de tegioz en [Flickr](#). Licencia [CC BY 2.0](#)

Desarrollamos a continuación el estudio de otra de las familias con historia en el mundo de las funciones. Nos referimos a las ya mencionadas **funciones cuadráticas**.



Importante

Las funciones polinómicas de segundo grado, también llamadas **funciones cuadráticas** son aquellas cuya ecuación es del tipo:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ con } a \neq 0.$$

Algunas de sus características principales son:

Su dominio es todo \mathbb{R}	El vértice de la parábola
Su gráfica es una parábola , simétrica respecto a eje de simetría que pasa por su vértice.	Cuanto mayor sea el a cerrada será la parábola
Si $a > 0$ el vértice de es un mínimo absoluto	Si $a < 0$ el vértice es un máximo absoluto
Si $a > 0$ es una función convexa	Si $a < 0$ es una función cóncava

Entre las funciones cuadráticas podemos distinguir tres tipos especiales, que se corresponden con otras tantas ecuaciones incompletas.

En una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$.

- Si $b = 0$ y $c = 0$, la función $f(x) = ax^2$ tiene su vértice en el punto $(0,0)$ y su eje de simetría es el eje OY
- Si $b = 0$ y $c \neq 0$, la función $f(x) = ax^2 + c$ tiene su vértice en el punto $(0,c)$ y su eje de simetría es el eje OY
- Si $b \neq 0$ y $c = 0$, la función $f(x) = ax^2 + bx$ tiene su vértice en el punto $(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2}{4a})$ y su eje de simetría es la recta $x = -\frac{b}{2a}$

En el siguiente vídeo puedes ver cómo representar este tipo de funciones:

[Enlace a recurso reproducible >> https://www.youtube.com/embed/WokBZE0izX4](https://www.youtube.com/embed/WokBZE0izX4)

Vídeo de tutomate alojado en [Youtube](#)

Comprueba y practica las características de las funciones cuadráticas con el siguiente applet de Geogebra, realizado por [Pablo Espina Brito](#). Simplemente deberás desplazar los deslizadores para configurar los valores de los coeficientes a, b y c.

$$f(x) = 2x^2$$



Caso práctico

Al rojo vivo.

La función $T(t) = 24t - 2t^2$, con $0 \leq t \leq 12$, devuelve la temperatura, T , en grados centígrados, que alcanza el motor de una máquina de fabricación industrial en función del tiempo, t , en horas, que lleve funcionando.

- (a) Realiza la tabla de valores y representa la gráfica de la función.
- (b) ¿Qué temperatura alcanza el motor al cabo de 2 horas de funcionamiento?
- (c) ¿A qué hora alcanza el motor su temperatura máxima? ¿Cuál es el valor de esta temperatura máxima?

(d) Observa la gráfica y describe: el dominio, recorrido, la monotonía y la simetría (par/impar) de la función.

Nota: Puedes realizar la representación gráfica con [Geogebra](#), apoyándote en el procedimiento que describe **Jesús Fernández** en [esta presentación](#). A la hora de representarla deberás usar la variable "x" en vez de la variable "t".

Como siempre, vayamos por partes.

- Datos

La función $T(t) = 24t - 2t^2$, con $0 \leq t \leq 12$ que devuelve la temperatura que alcanza el motor de la máquina en función del tiempo que lleve funcionando la misma.

- Planteamiento:

Tras leer el enunciado del problema observamos que: la ecuación de la función es de segundo grado y por tanto, su representación gráfica será una parábola.

A fin de facilitar la representación de la misma al estudiante, se le pide elaborar tabla de valores para posteriormente representarla.

En primer lugar haremos la tabla, posteriormente la representaremos y, finalmente, responderemos a las cuestiones, del resto de apartados, interpretando la gráfica.

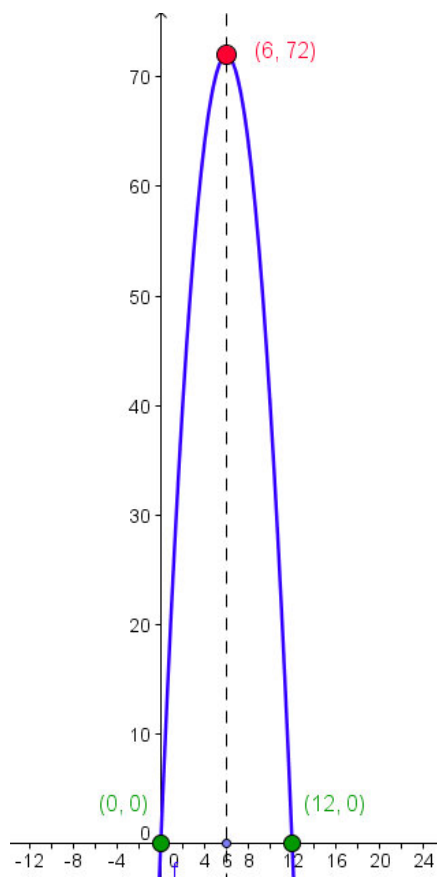
- Resolución:

(a)

Tabla de valores:

Tiempo en horas (t)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Temperatura en °C	0	22	40	54	64	70	72	70	64	54	40	22	0

Representación gráfica.



(b) Basta observar la gráfica para comprobar que, a las $t=2$ horas de funcionamiento la temperatura es $T(2)=40\text{ }^{\circ}\text{C}$.

También se puede encontrar este valor, buscando en la tabla de valores.

(c) El motor alcanza su temperatura máxima en el vértice de la parábola, esto es, para $t=6$. A las 6 horas de funcionamiento alcanza su temperatura máxima.

El valor de la temperatura máxima es $T(6)=72\text{ }^{\circ}\text{C}$, basta observar la gráfica o buscarlo en la tabla de valores.

(d)

- Dominio: $[0,12]$ Tiempo en horas que está en funcionamiento. Sólo funciona 12 h
- Recorrido: $(0,72)$ Temperatura que alcanza el motor en funcionamiento. Rango de temperaturas que alcanza el motor.
- Monotonía: Crece en el intervalo $(0,6)$. Decrece en $(6,12)$. La temperatura va aumentando hasta que alcanza el máximo en el vértice de la parábola, a las 6 horas de funcionamiento. A partir de ahí, decrece hasta alcanzar los 0 grados a las 12 horas.
- Simetría: La gráfica es simétrica respecto de la recta: $x=6$, que pasa por el vértice de la parábola y es perpendicular al eje OX. No es ni PAR ni IMPAR.



Importante

Monotonía

Atendiendo a la monotonía podemos clasificar las funciones en tres tipos.

- Una función real $f(x)$ es **creciente** en un intervalo si para dos valores cualesquiera del intervalo x y x' , con $x < x'$, se tiene que: $f(x) \leq f(x')$
- Una función real $f(x)$ es **decreciente** en un intervalo si para dos valores cualesquiera del intervalo x y x' , con $x < x'$, se tiene que: $f(x) \geq f(x')$
- Una función real $f(x)$ es **constante** en un intervalo si para todos los valores, x , del intervalo se tiene que: $f(x) = k$ (constante)

Aunque existen funciones que son crecientes, decrecientes o constantes en todo su dominio de definición, lo más habitual es encontrarse con aquellas que tienen una combinación de todos los tipos indicados.

Extremos absolutos.

- Una función f alcanza su **máximo absoluto** en el punto $x=a$ si es creciente a la izquierda de este punto y decreciente a su derecha. El valor de la ordenada (coordenada y) en el máximo es mayor o igual que en cualquier otro punto del dominio de la función.
- Una función f alcanza su **mínimo absoluto** en el punto $x=b$ si es decreciente a la izquierda de este punto y creciente a su derecha. El valor de la ordenada (coordenada y) en el mínimo es menor o igual que en cualquier otro punto del dominio de la función.

Pero, en ocasiones, hay otros puntos que destacan entre los de su entorno más cercano, son los:

Extremos relativos.

- Una función f tiene un **máximo relativo** en el punto $x=a$ si $f(a)$ es mayor o igual que en todos los puntos próximos al punto $x=a$, tanto por la derecha como por la izquierda de él.
- Una función f tiene un **mínimo relativo** en el punto $x=b$ si $f(b)$ es menor o igual que en todos los puntos próximos al punto $x=b$, tanto por la derecha como por la izquierda de él.



Importante

Puntos de corte con los ejes

Llamamos **puntos de corte** a aquellos puntos en los cuales la gráfica representada corta al eje de abscisas (eje OX) y/o al de ordenadas (eje OY).

- Los puntos de corte con el eje OX son de la forma $(x_0, 0)$. Su coordenada y vale 0.
- Los puntos de corte con el eje OY son de la forma $(0, y_0)$. Su coordenada x vale 0.

Si tenemos la ecuación de la función en la forma $y = f(x)$, hallar los puntos de corte:

- Con el eje OX, equivale a resolver el sistema de ecuaciones: $\{y=f(x), y=0\}$
- Con el eje OY, equivale a resolver el sistema de ecuaciones: $\{y=f(x), x=0\}$

Acotación

- Una función está **acotada superiormente** si existe un número real k, mayor o igual que cualquier valor del recorrido de la función: $f(x) \leq k$
- Una función está **acotada inferiormente** si existe un número real k, menor o igual que cualquier valor del recorrido de la función: $f(x) \geq k$
- Una función está **acotada** cuando lo está superior e inferiormente.

Simetría

- Una función es **simétrica respecto al eje de ordenadas (OY)**, si para todo valor, x, de su dominio se cumple que: $f(-x)=f(x)$. En este caso decimos que la función es **Par**.
- Una función es **simétrica respecto al origen de coordenadas**, si para todo valor, x, de su dominio se cumple que: $f(-x)=-f(x)$. En este caso decimos que la función es **Impar**.

Aunque existen funciones de los dos tipos descritos, **Par** e **Impar**, lo más frecuente es que una función no presente ningún tipo de simetría.



Importante

- Una función, f , es **cóncava** en un intervalo determinado si el segmento que une dos puntos cualesquiera de la curva en dicho intervalo queda por debajo de la gráfica de f y es **convexa** si queda por encima.
 - Los puntos del dominio en los que la función, f , pasa de cóncava a convexa, o viceversa, reciben el nombre de **puntos de inflexión**.
-



Importante

Trasladar una función, $y = f(x)$, **verticalmente** k unidades consiste en sumarle a la variable dependiente (y) la constante (k).

Obtenemos así una nueva función: $y = f(x) + k$

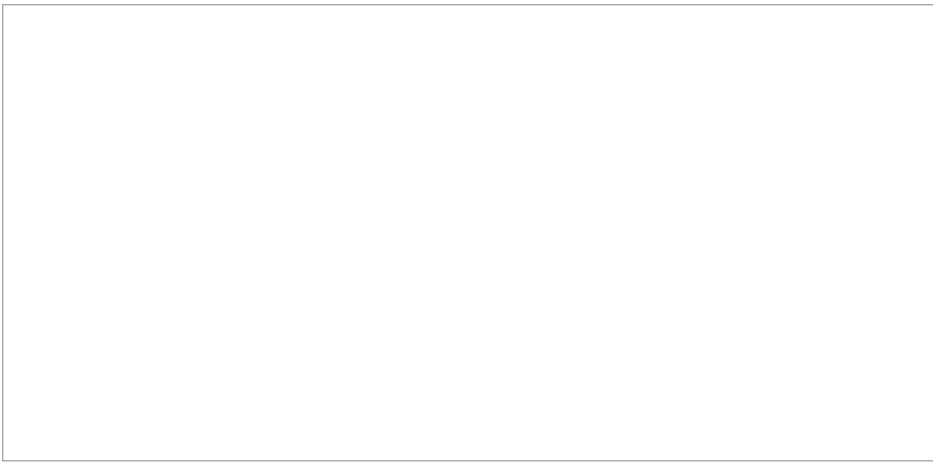
- Si k es positiva, entonces, la función se traslada hacia arriba.
- Si k es negativa, entonces, la función se traslada hacia abajo.

Trasladar una función, $y = f(x)$, **horizontalmente**, p unidades consiste en restarle a la variable independiente (x) la constante (p).

Obtenemos así una nueva función: $y = f(x-p)$

- Si p es positiva, entonces, la función se traslada hacia la derecha.
 - Si p es negativa, entonces, la función se traslada hacia la izquierda.
-

<https://www.geogebra.org/material/iframe/id/NhpGqNsw/width/1382/height/582/border/888888/smb/false/stb/false/stb/>



Características generales

Applet de marjose alojado en [Geogebra](#). Licencia [CC](#)



Importante

Las funciones polinómicas de primer grado, también llamadas **funciones afines** son aquellas cuya ecuación es del tipo $f(x) = mx + n$

Algunas de sus características principales son:

Su dominio es todo \mathbb{R}

Si $m > 0$, la función es creciente

Su gráfica es una recta con pendiente m

Si $m < 0$, la función es decreciente

Pasa por el punto $(0, n)$ [Punto de corte con el eje OY]

Dentro de las funciones afines podemos distinguir dos tipos. En una función afín: $f(x) = mx + n$

- Si $m = 0$, la función $y = n$ se denomina **función constante**. Su gráfica es una recta paralela al eje OX, que pasa por el punto $(0, n)$

- Si $n = 0$, la función $y = mx$ se denomina **función lineal** y su gráfica es una recta de pendiente m que pasa por el origen de coordenadas $(0, 0)$





Importante

Las funciones polinómicas de segundo grado, también llamadas **funciones cuadráticas** son aquellas cuya ecuación es del tipo:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ con } a \neq 0.$$

Algunas de sus características principales son:

Su dominio es todo \mathbb{R}	El vértice de la parábola
Su gráfica es una parábola, simétrica respecto a eje de simetría que pasa por su vértice.	Cuanto mayor sea el cerrado será la parábola
Si $a > 0$ el vértice de es un mínimo absoluto	Si $a < 0$ el vértice es u
Si $a > 0$ es una función convexa	Si $a < 0$ es una funciór

Entre las funciones cuadráticas podemos distinguir tres tipos especiales, que se corresponden con otras tantas ecuaciones incompletas.

En una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$.

- Si $b = 0$ y $c = 0$, la función $f(x) = ax^2$ tiene su vértice en el punto $(0,0)$ y su eje de simetría es el eje OY
- Si $b = 0$ y $c \neq 0$, la función $f(x) = ax^2 + c$ tiene su vértice en el punto $(0,c)$ y su eje de simetría es el eje OY
- Si $b \neq 0$ y $c = 0$, la función $f(x) = ax^2 + bx$ tiene su vértice en el punto $(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2}{4a})$ y su eje de simetría es la recta $x = -\frac{b}{2a}$



Imprimible

Descarga aquí la versión imprimible de este tema.



Si quieres escuchar el contenido de este archivo, puedes instalar en tu ordenador el lector de pantalla libre y gratuito [NDVA](#).

Aviso legal

Las páginas externas no se muestran en la versión imprimible

<http://www.juntadeandalucia.es/educacion/permanente/materiales/index.php?aviso#space>