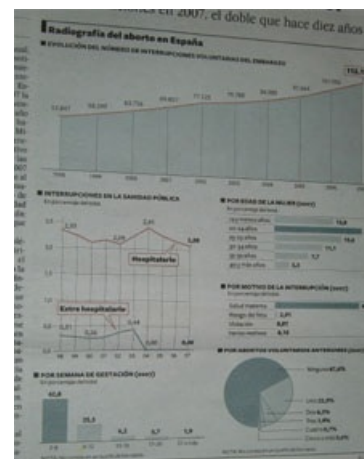


Seguro que después de haber acabado con el tema siguiente pensarás, "vaya lote de números, ¿no se podría simplificar para no tener que manejar tantísima información?". La respuesta es que depende.

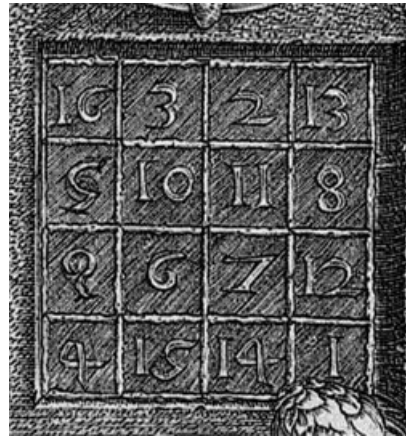
¿Recuerdas cuando trabajaste con la estadística en cursos anteriores? Allí tenías una tabla de frecuencias donde recogías todos los datos acumulados en el estudio estadístico, al final cuando los estudiábamos lo que hacíamos era reducir todos esos números a una serie de valores puntuales que nos recogían toda la información en unos pocos valores. Así aparecían la media, moda, mediana, desviación típica, etc.

Algo parecido vamos a realizar en este caso.



1. Exprimimos la matriz para sacar su jugo

¿Sabes lo que es un cuadrado mágico? Es un cuadrado de números en el que al sumar todos los números que están en la misma fila, en la misma columna o en las dos diagonales, principal y secundaria, el resultado obtenido es siempre el mismo y recibe el nombre de número mágico. Los cuadrados mágicos pueden encontrarse en el arte, como en el cuadro Melancolía de Alberto Durero que puedes ver abajo. Aparece un cuadrado mágico de orden 4, que te presentamos en detalle para que puedas observarlo. También puedes encontrar otro, creado por Gaudí, en la fachada de [La Sagrada Familia](#) de Barcelona.



1. [Melancolía de Durero](#). Imagen de dominio público tomada de Wikimedia Commons.

En este tema vamos a hacer algo similar. Queremos reducir toda la información que hay en una matriz a un solo valor, que va a recibir el título de determinante de la matriz.

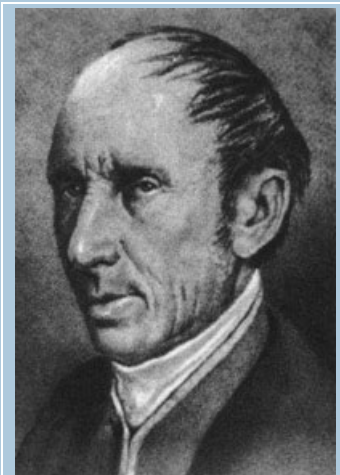
Curiosidad

Aunque pueda parecer increíble, el concepto de determinante es anterior al de matriz.

Aunque los inicios de la idea de determinante se remontan a los matemáticos chinos del siglo II a. de C., el concepto moderno de determinantes apareció simultáneamente en Japón y en Europa en el siglo XVII. El primer trabajo publicado sobre este tema es de 1683 por el matemático japonés Takakasu Seki, aunque el mismo año aparece la idea de determinante en una carta de Leibniz al Marqués de L'Hôpital.

Sin embargo, el primero que utiliza el término determinante en el sentido tal como lo vamos a ver en este tema, es el matemático francés Agustín Luis Cauchy, en un artículo publicado en 1812.

Si quieres saber más sobre Cauchy investiga en el siguiente [enlace](#).



2. Imagen de [A.L. Cauchy](#) de dominio público de Wikimedia Commons.

1.1. Empecemos por calcular el más fácil



Antes de empezar con el concepto de determinante debemos comentarte algo. El cálculo del determinante de una matriz es una herramienta que nos va a permitir resolver problemas más o menos cotidianos, pero es solamente eso, una herramienta.

Suponemos que recuerdas, por ejemplo, el método de sustitución para resolver un sistema de ecuaciones. Pasa algo parecido. En muchas situaciones de la vida cotidiana te puedes encontrar cuadros de números, como viste en el tema anterior, pero nunca te vas a encontrar un determinante por la calle. Quizás por eso este tema parezca un poco más abstracto, pero como verás en los temas que siguen, sin este concepto hay muchos problemas que sería muy complicado resolver.



Importante

El determinante de una matriz cuadrada es un número que se asocia a dicha matriz y que nos va a permitir, por ejemplo, saber si la matriz tiene o no inversa, o el número de soluciones de un sistema de ecuaciones.

Si tenemos la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$ su determinante se representa de distintas formas:

podemos escribir $\det(A)$, $|A|$ ó $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 9 \end{vmatrix}$.

Como puedes ver por la última expresión, se escribe igual que una matriz pero se limita por líneas rectas en lugar de por paréntesis.

La cuestión que nos preocupa ahora es, ¿cómo calculamos ese número que hemos llamado determinante? Antes de comenzar con los casos más simples insistimos que un determinante sólo puede calcularse si la matriz es cuadrada.

El determinante de una matriz cuadrada de orden dos es igual al producto de los elementos de la diagonal principal menos los de la diagonal secundaria. Es decir:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Así el determinante que hemos visto antes sería $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} = 2 \cdot 9 - (-1) \cdot 5 = 18 + 5 = 23$

Si te fijas en los subíndices que aparecen en la definición del determinante anterior puedes observar que en cada producto hay un elemento de cada fila (observa el subíndice primero de cada término en ambos productos) y un término de cada columna (fíjate ahora en los segundos subíndices de cada término). Esta característica se va a cumplir en todos los determinantes.

Comprueba lo aprendido

1. El valor del determinante $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}$ es .
2. Para que el valor del determinante $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & a \end{vmatrix}$ sea 4 es necesario que a valga .

Enviar

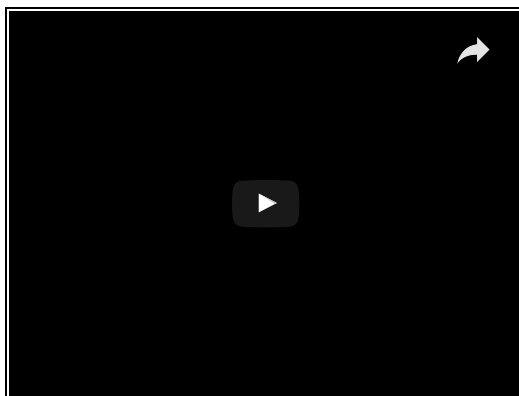
1. $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 0 - 3 \cdot 4 = -12$.
2. Como el determinante vale $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & a \end{vmatrix} = 5 \cdot a - 2 \cdot 3 = 5a - 6$ si queremos que sea 4, tendremos $5a - 6 = 4$ de donde, $5a = 4 + 6 = 10$ y por tanto $a = 10/5 = 2$.

Si ahora subimos un peldaño de la escalera, vamos a ver cómo se calcula el determinante de una matriz de orden 3. La regla que da ese cálculo recibe el nombre de **Regla de Sarrus**. El desarrollo que da lugar al determinante está compuesto de seis términos, tres positivos y tres negativos. Los positivos corresponden al producto de los elementos de la diagonal principal y las paralelas a ella completadas con el valor extremo y los negativos lo mismo pero respecto a la diagonal secundaria.

En la siguiente ventana tienes un archivo de Flash en el que puedes ver dos métodos de recordar cómo se desarrolla. El más utilizado es el segundo, aunque en el primero viene una regla que quizás te sea más clara, pero recuerda que lo que ves en el primer método es una ayuda para recordar el desarrollo, es decir, no tiene ningún sentido un determinante con cinco columnas y tres filas.

Montaje tomado del [Banco de Imágenes y Sonidos](#) del Instituto de Tecnologías Educativas (antiguo ISFTIC).

En el siguiente video puedes ver un ejemplo de como hallar determinantes de orden 2 y 3. Intenta tú primero aplicar los cálculos, y después puedes comprobar con los resultados que aparecen en el video si has resuelto bien los determinantes.



Comprueba lo aprendido

Ya lo único que queda es que compruebas si has aprendido a calcular los determinantes contestando a las siguientes cuestiones.

1) El valor del determinante $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \end{vmatrix}$ vale .

2) Al desarrollar el determinante $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 7 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ obtenemos como resultado.

Enviar

1.2. Las características son las que cuentan



Si hay algo que nos caracteriza a los matemáticos es que somos muy vagos. Por eso siempre estamos pensando cosas para tener que trabajar lo mínimo posible. Muchos teoremas, fórmulas y propiedades que utilizamos nos sirven para hacer los cálculos de una forma más simple y rápida.

Vamos a ver que existen muchas propiedades que nos permiten saber el valor de un determinante de una forma mucho más fácil que la que hemos visto hasta ahora, a veces, con un simple golpe de vista. Las propiedades que vamos a ver no solamente nos van a simplificar el cálculo, si no que nos van a permitir hallar determinantes de orden superior, para los que no hay una regla como en los casos de orden 2 y 3.



Enunciaremos la propiedad junto a un ejemplo numérico que la ilustre. Aunque el ejemplo sea de orden 2 ó 3, **estas propiedades se cumplen para determinantes de cualquier orden**. Cuando dé igual trabajar por filas que por columnas utilizaremos el término línea.

1) El determinante de una matriz es igual que el de su matriz **traspuesta**, es decir, $|A| = |A^t|$.

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 21 = -11 \quad ; \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 21 = -11$$

2) Si intercambiamos dos líneas de un determinante, el determinante cambia de signo, aunque vale lo mismo en valor absoluto.

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 - 1 + 4 + 4 - 0 - 6 = 1 \quad ; \quad \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 6 - 4 + 1 - 0 - 4 = -1$$

3) Un determinante con una línea formada por ceros es siempre nulo.

¿Recuerdas que dijimos que al desarrollar un determinante en todos los productos había un elemento de cada fila y de cada columna? Pues por eso un determinante donde una fila (o columna) sea entera de ceros hace que en todos los productos aparezca un cero y por tanto es nulo. Escribe un determinante de orden tres con esa característica y compruébalo.

4) Un determinante con dos líneas paralelas iguales vale cero.

Esta propiedad es consecuencia de la segunda y puedes ver un ejemplo en la última autoevaluación que hiciste en el apartado anterior.

5) Si multiplicamos una línea de un determinante por un número, el valor del determinante queda multiplicado por ese número.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 3 = 7 \quad ; \quad \begin{vmatrix} 12 & 1 \\ 18 & 5 \end{vmatrix} = 60 - 18 = 42$$

Como consecuencia de esta propiedad, si una línea es múltiplo de un número, podemos sacar factor común ese número y simplificar la línea. Y si multiplicamos un determinante por un número, sólo se multiplica una línea de ese determinante, a diferencia de lo que pasaba en las matrices.

Comprueba tu mismo que se cumplen las igualdades $\begin{vmatrix} 21 & 5 \\ 12 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$; $2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -10 \end{vmatrix}$.

6) Si en un determinante, dos líneas paralelas son proporcionales, el determinante es nulo.

Esta propiedad es consecuencia de dos de las anteriores. Vamos a ver como, sin desarrollar, podemos ver que el determinante es nulo:

$$\begin{vmatrix} 8 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & -1 \\ 6 & -5 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -1 \\ -3 & -5 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0$$

prop. 5 *prop. 4*

7) Si todos los elementos de una línea son suma de dos sumandos, el determinante puede descomponerse en la suma de otros de forma que en esa línea vayan los primeros sumandos en uno de los determinantes y los segundos en otro. Todas las restantes líneas son iguales a la del determinante original.

Esta es la propiedad más complicada de entender. Te ponemos un ejemplo.

$$\begin{vmatrix} 2+a & 5 & -2 \\ -3+b & 0 & 5 \\ 1+c & -4 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -2 \\ -3 & 0 & 5 \\ 1 & -4 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 5 & -2 \\ b & 0 & 5 \\ c & -4 & 7 \end{vmatrix}$$

Observa que según esta propiedad, para poder sumar dos determinantes es necesario que todas las líneas sean iguales menos una, y la suma se realiza dejando igual las líneas comunes y sumando las dos desiguales.

8) Si una línea de un determinante es suma de líneas paralelas a ellas multiplicadas por números (lo que se llama una combinación lineal), el determinante es cero.

Esta propiedad se cumple gracias a las dos propiedades anteriores. Veámoslo en general para cualquier determinante de orden tres.

$$\begin{vmatrix} a & b & pa+qb \\ d & e & pd+qe \\ g & h & pg+qh \end{vmatrix} \underset{\text{prop. 7}}{=} \begin{vmatrix} a & b & pa \\ d & e & pd \\ g & h & pg \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & qb \\ d & e & qe \\ g & h & qh \end{vmatrix} \underset{\text{prop. 6}}{=} 0+0=0$$

Compruébalo hallando el siguiente determinante en el que la tercera fila es la suma de la primera más el doble de la segunda. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

9) Si a una línea le sumamos una combinación lineal de las líneas paralelas a ella, el determinante no varía.

Partimos del determinante $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ y si ahora le sumamos, por ejemplo, a la primera columna las otras dos multiplicadas por números, podemos ver que el determinante no varía.

$$\begin{vmatrix} a+pb+qc & b & c \\ d+pe+qf & e & f \\ g+ph+qi & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} pb & b & c \\ pe & e & f \\ ph & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} qc & b & c \\ qf & e & f \\ qi & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + 0 + 0 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

Comprueba ahora esta propiedad hallando los dos siguientes determinantes y viendo que da lo mismo. En ellos le hemos sumado a la segunda fila la primera y la tercera.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & -2 \end{vmatrix} \text{ vale lo mismo que } \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 9 & 4 \\ 0 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

10) El determinante de un producto de dos matrices cuadradas, del mismo orden, es igual al producto de los determinantes de las dos matrices. Es decir $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$.

Consideremos las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, entonces el producto sería

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 8-25 & 4-15 \\ -4+15 & -2+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 & -11 \\ 11 & 7 \end{pmatrix}$$

Y los determinantes cumplen $|A \cdot B| = -17 \cdot 7 - 11 \cdot (-11) = -119 + 121 = 2$.

$$|A| \cdot |B| = (6-5) \cdot (12-10) = 1 \cdot 2 = 2 = |A \cdot B|$$

Reflexiona

Sin desarrollar, indica cuánto valen los siguientes determinantes.

1) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 7 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix} 9 & 3 & 0 \\ -11 & 2 & 0 \\ 32 & -13 & 0 \end{vmatrix}$ 3) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -3 & 3 & -15 \\ 9 & 3 & 15 \end{vmatrix}$ 4) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 8 \\ 5 & 3 & 7 \end{vmatrix}$

Seguro que te habrás dado cuenta de que todos valen cero.

- 1) Tiene dos filas iguales. (propiedad 4)
- 2) Tiene una columna completa de ceros (propiedad 3)
- 3) Tiene dos líneas proporcionales ya que la segunda fila es la primera por -3. (propiedad 6)
- 4) La tercera columna es combinación lineal de las otras dos, ya que es la primera por dos menos la segunda (propiedad 8).

Comprueba lo aprendido

Sabiendo que el determinante $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 5$, utiliza las propiedades anteriores para calcular el valor de los siguientes determinantes.

1) $\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} = \square$; 2) $\begin{vmatrix} a & 3b & c \\ d & 3e & f \\ g & 3h & i \end{vmatrix} = \square$

3) $\begin{vmatrix} a+3b & b & c \\ d+3e & e & f \\ g+3h & h & i \end{vmatrix} = \square$; 4) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix} = \square$

Enviar

- 1) Es el determinante de la traspuesta.

- 2) Basta sacar el 3 que multiplica a la segunda columna y nos queda el determinante original multiplicado por 3.
- 3) Se le ha sumado a la primera columna la segunda por 3, luego el determinante no varía.
- 4) Se ha cambiado la segunda y tercera fila, luego el determinante cambia de signo.

Importante

El determinante de una matriz es muy útil para saber si hay alguna relación de proporcionalidad entre las líneas de una matriz.

Si una línea de una matriz es igual o proporcional a otra, o si una línea es igual a la suma de otras paralelas multiplicadas por números, lo que equivale a decir que esa primera línea es linealmente dependiente de las restantes, a veces es fácil verlo a simple vista, pero otras no. El determinante nos lo fija directamente, ya que si es cero entonces es claro que hay algún tipo de dependencia entre las líneas de esa matriz. Sólo cuando no es igual a cero podemos estar seguros de que las líneas son independientes entre sí.

1.3. Qué hacer si la cosa se complica

En la década de los 90 del pasado siglo, emitían en la televisión una serie americana cuyo título se traducía por "Los problemas crecen". Ese podría ser el lema de los matemáticos. En cuanto vemos la solución a un determinado problema ya queremos ir un poco más allá. Siempre pensamos qué ocurriría si tenemos más datos o más incógnitas, o si lo que hemos visto hasta el momento se puede generalizar a otros casos más. En general buscamos algoritmos y propiedades que puedan cumplirse en la mayor cantidad de casos. Eso es lo que vamos a hacer en este apartado.



En el punto 1.1 has visto dos reglas, una para hallar el determinante de una matriz cuadrada de orden 2 y otra para la de orden 3, la muy conocida regla de Sarrus. Lamentablemente ya no existen reglas para determinantes de orden superior, por lo que si queremos encontrar el valor del determinante de una matriz cuadrada de orden mayor que 3, tenemos que simplificarla utilizando las propiedades que hemos visto en el punto anterior. Veremos cómo se hace.

Importante

En una matriz cuadrada A se llama **menor complementario** del término a_{ij} al determinante de la submatriz que queda al quitar la fila y la columna en la que se encuentra el término a_{ij} . Unas veces se representa por m_{ij} y otras por α_{ij} . Pula con el ratón sobre la imagen y verás el cálculo de alguno de estos elementos.

Se define el **adjunto** de un elemento a_{ij} y se representa por A_{ij} , al menor complementario de dicho número junto con un signo más o menos, según que la suma de los dos subíndices que representan la posición sea par o impar.

Se calcula por la expresión: $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot m_{ij}$

Llamamos **matriz adjunta** de A a aquella en la que se sustituye cada término por su adjunto. Se representa por $\text{Adj}(A)$.

A la izquierda puedes ver el cálculo del menor complementario y el adjunto de un término. Observa la regla de signos que corresponden a los adjuntos y podrás observar que siempre se alternan comenzado con el signo más. Cada vez que nos movemos, en horizontal o vertical, de un término a otro cambia la paridad entre + y -.

En el video de abajo puedes ver un ejemplo de como hallar la matriz adjunta de otra. Observa cómo al calcular los adjuntos, los signos más y los menos, se alternan.



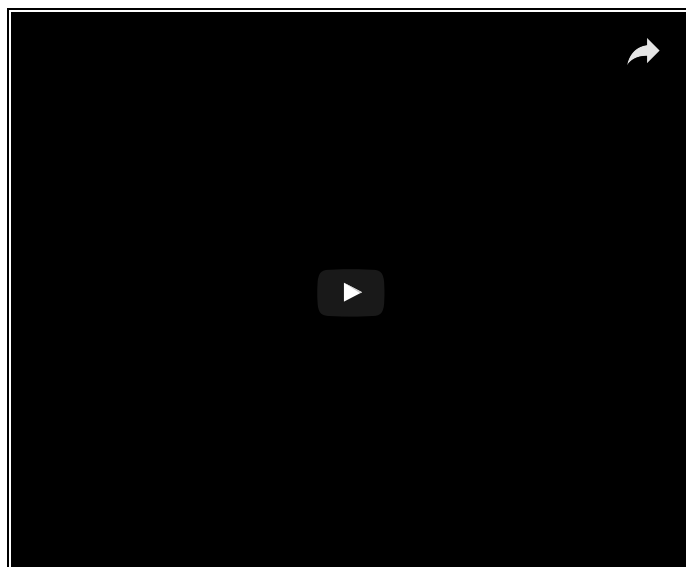
Importante

Un determinante se puede desarrollar mediante la suma de los productos de cada elemento de una de sus líneas, por su adjunto correspondiente.

En la animación se representa por a_{ij} el menor complementario, por lo que el adjunto sería $(-1)^{i+j} \cdot a_{ij}$.

Animación obtenida del [banco de imágenes y sonidos](#) del ITE bajo licencia Creative Commons

Hay un modo de hacer este proceso más fácil. Consiste en utilizar las propiedades de los determinantes que vimos en el apartado anterior para hacer todos los elementos de una línea, menos uno, ceros. Después desarrollamos por esa línea y solo tenemos que hallar un adjunto, que siempre contendrá un determinante de orden inferior. Esto lo podemos ver explicado, paso a paso, en el siguiente video.

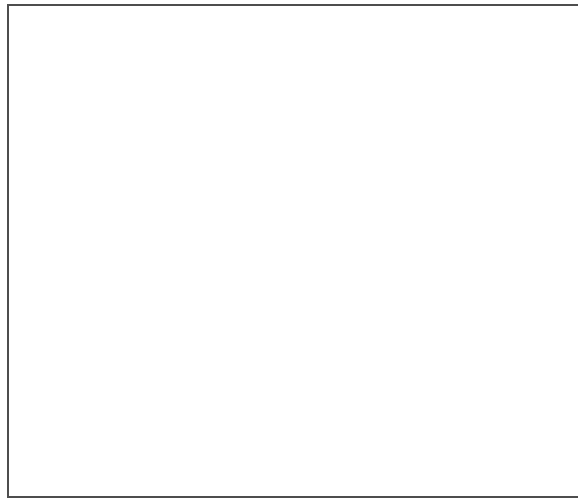


Reflexiona

Aplica todo lo que has visto al cálculo del determinante $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 5 & -2 \\ 4 & 7 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & -5 \end{vmatrix}$

El valor del determinante es -44.

Si no tienes clara la forma de resolverlo puedes ver la siguiente presentación.



1.4. Gauss, un apellido que vamos a nombrar mucho



Lo último que has visto en el apartado anterior es cómo, haciendo varios ceros en una línea de un determinante, es más fácil desarrollar dicha estructura. En este último apartado lo que vamos a ver es una generalización del método anterior y que, debido a las operaciones que vamos a realizar, es conocido por Método de Gauss. Como podrás ver en los dos siguientes temas de la Unidad, este método se puede utilizar en muchas ocasiones para resolver distintos problemas, hasta para hallar la solución de un sistema de ecuaciones.

El método de Gauss para hallar un determinante de cualquier orden, es una generalización del método que vimos al final del apartado anterior para desarrollar un determinante por una línea en la que se han hecho previamente ceros todos los elementos de una línea menos uno, que es por el que se desarrolla.

El objetivo del método es conseguir triangular la matriz que está dentro del determinante pues, de esa forma, es muy fácil hallar su valor, pues el determinante de una matriz cuadrada triangular (da igual que sea superior o inferior) es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.

Las operaciones que podemos realizar con las líneas del determinante son:

- 1) Cambiar entre sí dos líneas. En ese caso el determinante cambia de signo, por lo que el determinante resultante debemos multiplicarlo por -1.
- 2) Multiplicar o dividir una línea por un número, pero en ese caso debemos hacer la operación contraria en el determinante, para que no cambie su valor.
- 3) Sumarle a una fila o columna otra paralela multiplicada por cualquier número. En este caso el valor del determinante no varía.
- 4) Lo usual es hacer ceros todos los elementos por debajo de la diagonal principal, utilizando, escalonadamente, los elementos de la diagonal principal, y por tanto su fila, para hacer ceros los que están debajo.

Veamos un ejemplo resuelto.

Ejercicio resuelto

Vamos a resolver el siguiente determinante por el método de Gauss.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 7 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 9 & 3 \end{vmatrix}$$

En la siguiente presentación puedes ver la resolución paso a paso.

Reflexiona

Solo queda que apliques lo aprendido. Para ello calcula el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

El valor del determinante es 8.

Para saber más

El nombre de Gauss posiblemente no sea desconocido para tí. Ya el curso pasado verías, en la parte de probabilidad, la distribución Normal o de Gauss. Y ya que este año vamos a citarlo en varias ocasiones, es justo que comencemos conociendo algo de su vida. En el siguiente vídeo conocerás como, a los 10 años, ya asombró a su maestro de matemáticas y porqué recibió el título de Príncipe de los Matemáticos.

2. Especial Selectividad



Vamos con la última parte del tema. Recuerda que lo que pretendemos aquí es mostrarte ejemplos de actividades que han aparecido en Selectividad. No son ejercicios iguales que los que vayan a aparecer en la tarea presencial o en la tarea del tema, aunque si te vendrán bien ver los procesos que se han hecho para resolverlo. Recuerda que vamos a utilizar las mismas operaciones y propiedades que tienes que utilizar en los ejercicios que si debes hacer.

Ejercicio resuelto

Sean A , B , X y C matrices cualesquiera que verifican $A \cdot X \cdot B = C$.

Si todas las matrices son cuadradas de orden 3, y se sabe que el determinante de A es 3, el de B es -1, y el de C es 6, calcula el determinante de X y de $2X$.

Para hallar el determinante de X basta aplicar la última propiedad que hemos visto de los determinantes. De esa forma $|A \cdot X \cdot B| = |A| \cdot |X| \cdot |B| = |C|$, basta sustituir los valores de los determinantes y si el valor que buscamos lo llamamos x tenemos la siguiente ecuación $3 \cdot x \cdot (-1) = 6$ por lo que $x = \frac{6}{-3} = -2$.

Para la segunda parte tenemos que tener presente lo siguiente. Si multiplicamos una matriz por 2, se multiplican las tres filas por 2. Si hallamos el determinante, extraemos un 2 de la primera fila, otro 2 de la segunda fila y otro dos de la tercera fila. Así se cumple $|2 \cdot X| = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot |X| = 8 \cdot (-2) = -16$.

Ejercicio resuelto

Sean F_1 , F_2 , F_3 las filas primera, segunda y tercera, respectivamente, de una matriz B de orden 3, cuyo determinante vale -2. Calcula, indicando las propiedades que utilices:

- El determinante B^{-1} .
- El determinante de $(B^t)^4$.
- El determinante de $2 \cdot B$.
- El determinante de una matriz cuadrada cuyas filas primera, segunda y tercera son, respectivamente, $5F_1 - F_3$, $3F_3$, F_2 .

a) La matriz B^{-1} es la inversa de B y verifica que $B \cdot B^{-1} = I$. Si aplicamos el determinante del producto tenemos lo siguiente $|B \cdot B^{-1}| = |I|$, de donde $|B| \cdot |B^{-1}| = 1$, luego $|B^{-1}| = \frac{1}{|B|} = -\frac{1}{2}$.

b) Aplicamos la propiedad del producto, por lo que el determinante de una potencia 4 es igual al determinante elevado a 4, y aplicamos también que el determinante de la matriz traspuesta coincide con el de la matriz original. $|(B^t)^4| = |B^t|^4 = |B|^4 = (-2)^4 = 16$.

c) Igual que vimos en el ejercicio anterior, aplicamos la propiedad de que cuando se multiplica una línea por un número, el determinante se multiplica por dicho número. De esa manera si multiplicamos las tres filas por 2, el determinante termina multiplicado tres veces por 2. Luego $|2 \cdot B| = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot |B| = 8 \cdot (-2) = -16$.

d) Partimos de $|5F_1 - F_3 \ 3F_3 \ F_2|$ aplicamos la propiedad que indica que si una línea es suma de dos se puede descomponer en suma de dos determinantes.

$$|5F_1 - F_3 \ 3F_3 \ F_2| = |5F_1 \ 3F_3 \ F_2| + |-F_3 \ 3F_3 \ F_2|$$

Después extraemos factores de las filas en el primer determinante y tenemos presente que el segundo determinante tiene dos filas proporcionales, luego vale cero.

$$|5F_1 \ 3F_3 \ F_2| + |-F_3 \ 3F_3 \ F_2| = 5 \cdot 3 \cdot |F_1 \ F_3 \ F_2| + 0$$

Por último cambiamos la segunda y la tercera fila cambiando por tanto el determinante de signo.

$$5 \cdot 3 \cdot |F_1 \ F_3 \ F_2| = 15 \cdot (-1) \cdot |F_1 \ F_2 \ F_3| = -15 \cdot (-2) = 30.$$

Ejercicio resuelto

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & t \\ -5 & t & -5 \\ t & 0 & 3 \end{pmatrix}$ e I la matriz Identidad de orden 3.

Calcula los valores de t para los que el determinante A-2·I es cero.

Primero calculamos la matriz $A - 2 \cdot I = \begin{pmatrix} 3-2 & 0 & t \\ -5 & t-2 & -5 \\ t & 0 & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ -5 & t-2 & -5 \\ t & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y para hallar su determinante lo mejor es desarrollar por la segunda columna: $|A - 2 \cdot I| = (t-2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & t \\ t & 1 \end{vmatrix} = (t-2) \cdot (1-t^2)$.

Ahora basta igualar a cero ese resultado $(t-2) \cdot (1-t^2) = 0$. De esa igualdad obtenemos dos posibilidades:

$$\begin{cases} t-2=0 \rightarrow t=2 \\ 1-t^2=0 \rightarrow t^2=1 \rightarrow t=\pm 1 \end{cases}$$

Luego hay tres posibilidades 1, 2 y -1.

Comprueba lo aprendido

Siendo $A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2$ calcula, indicando las propiedades que utilices, los siguientes determinantes.

a) $|3 \cdot A| = \boxed{}$.

b) $|A^{-1}| = \boxed{}$.

c) $\begin{vmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ 2i & 2h & 2g \end{vmatrix} = \boxed{}$.

d) $\begin{vmatrix} a & b & a-c \\ d & e & d-f \\ g & h & g-i \end{vmatrix} = \boxed{}$.

Enviar

- a) Al multiplicar tres líneas por -3, el determinante de la matriz de tres filas es $(-3)^3$ por el determinante de la matriz original.
- b) Aplicamos que el determinante de un producto es el producto del determinante como vimos en el apartado a) del ejercicio anterior al anterior.
- c) Utilizamos dos propiedades: podemos extraer el 2 de la 3ª fila y cambiamos el signo al cambiar la 1ª y 3ª columna.
- d) Hay dos formas de hacerlo:
 - 1.- Se descompone en dos determinantes, el primero es nulo por tener dos líneas iguales y en el segundo basta extraer el signo de la tercera columna.
 - 2.- A la tercera columna le resto la primera y en el determinante que queda extraigo el signo menos de la 3ª columna.

Ejercicio resuelto

Sin desarrollarlo, calcula el valor del determinante de la matriz $\begin{pmatrix} k & x & 1+ax \\ 2k & y & 2+ay \\ 3k & z & 3+az \end{pmatrix}$ y enuncia las propiedades que has utilizado.

El determinante es nulo pues se puede descomponer en suma de dos, dividiendo la suma de la tercera columna, y los dos determinantes que quedan valen cero pues ambos tienen dos columnas que son proporcionales entre sí.

