

**MT1 - Tema 4.3: Análisis I: Funciones  
polinómicas y racionales sencillas. Funciones  
definidas a trozos**



**Análisis I: Funciones polinómicas y racionales  
sencillas. Funciones definidas a trozos.**

**Matemáticas I**

**1.º Bachillerato**

**Contenidos**

**Análisis I**

**Funciones polinómicas y racionales sencillas. Funciones  
definidas a trozos**

# 1. Introducción

---

¿Te parece demasiado simple un polinomio de primer grado para expresar la velocidad a la que cayó la manzana de Newton? ¿o uno de segundo grado para determinar el espacio que recorría en su caída?

Muchas de las **funciones** o **aplicaciones** que rigen nuestro mundo son sencillas. Basta dar una vuelta por la calle o por el campo para toparse con ellas: el movimiento de los vehículos, el precio de los productos de un comercio, la meteorología, el comportamiento del aire y del agua, de la electricidad... todas pueden determinarse con funciones **polinómicas** o a lo sumo **racionales**, como las que veremos en este tema.

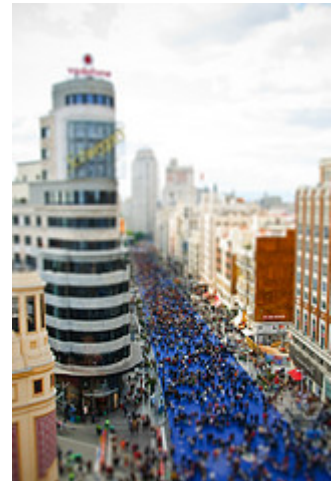


Imagen de AntonioDavid Fernández en [Flickr](#). Licencia [CC 2.0 by-nc-nd](#)

## 2. Funciones polinómicas

---



Imagen de zeekomkommer en [Flickr](#), Licencia CC 2.0 by

Os confieso que mi caída del árbol fue aterradora. Me parecía ir a una gran velocidad, sobre todo comparada con la de las hojas que cayeron conmigo ¡Cómo habrían cambiado las cosas si me hubiese caído dentro de una campana como ésta! Entonces habríamos caído todas con una velocidad  $y = -9,8x$  normal y corriente...

Siempre fui una manzana un poco rara: me gustaba observar este tipo de cuestiones. Ver cómo un gorrión volaba hacia su nido a unos 2 metros por segundo y determinar que el espacio que recorría seguía la función  $f(x)=2x$  (donde por supuesto  $x$  es el tiempo que está volando). O verlo parado en una rama, atento al movimiento de cualquier insecto con el que alimentar a sus polluelos, y lanzarse a por él acelerando a  $10 \text{ m/s}^2$ . En este caso el espacio que recorre es  $g(x)=5x^2$ .

¿Qué ocurre si unimos los dos casos? Tendremos un gorrión que parte de una velocidad de  $2\text{m/s}$  y que acelera a  $10\text{m/s}^2$ . El espacio que recorre será la suma de los dos casos anteriores:  $h(x)=f(x)+g(x)=2x+5x^2$ .



### Importante

Si tenemos dos funciones reales  $f(x)$  y  $g(x)$ , las funciones  $s(x)=f(x)+g(x)$  y  $r(x)=f(x)-g(x)$  obtenidas al sumar o restar  $f$  y  $g$ , también son funciones reales.

---



### Ejercicio Resuelto

En la siguiente escena de GeoGebra puedes ver las gráficas de las funciones lineales  $f(x)=-x+8$  y  $g(x)=2x-4$ . Al mover el punto verde que está situado en el origen de coordenadas, irá apareciendo la gráfica de la función  $f(x)+g(x)$ . A la derecha de la escena puedes ver cómo va variando el valor de  $x$ ,  $f(x)$ ,  $g(x)$  y  $f(x)+g(x)$ .

a) ¿Cuánto vale  $(f+g)(4)$ ?

b) ¿Cuál es la expresión analítica de  $f(x)+g(x)$ ? ¿Qué tipo de función es?

c) ¿Para qué valor de  $x$   $(f+g)(x)=0$ ?

a)  $(f+g)(4)=f(4)+g(4)=4+4=8$ .

b)  $f(x)+g(x)=-x+8+2x-4=x+4$ . También es una función lineal.

c) En la gráfica se puede apreciar que  $(f+g)(x)=0$  cuando  $f(x)=-g(x)$ , es decir en  $x=-4$ .

<https://www.geogebra.org/material/iframe/id/CKfUKdZf/width/530/height/328/border/888888/rc/false/ai/false/sdz/true/>



## Importante

Si tenemos dos funciones reales  $f(x)$  y  $g(x)$ , la función  $p(x)=f(x)\cdot g(x)$  obtenida al multiplicar  $f$  y  $g$ , también es una función real.



## Reflexiona

En estos tres casos que acabamos de ver (función suma, resta y producto), el **dominio** será la intersección de los dominios de  $f$  y  $g$ .

Por ejemplo, si  $D(f)=(-\infty,4]$  y  $D(g)=(0,20)$ , no puedo calcular la suma en  $x=-2$ , pues  $g$  no está definida en ese punto. Sólo podré hallar la función suma en los puntos en los que están definidas las dos funciones, que en este caso sería el intervalo  $(0,4]$

Si te fijas en el caso anterior, hemos multiplicado dos **funciones lineales**  $f(x)=x$  y  $g(x)=3x+1$ , y el resultado es una **función cuadrática**  $h(x)=3x^2+x$ , pues estamos multiplicando dos

polinomios de primer grado para obtener uno de segundo grado.

Si multiplicas una función lineal por una cuadrática, el resultado será un polinomio de tercer grado y de esta forma podrás seguir obteniendo funciones que serán polinomios del grado que quieras.



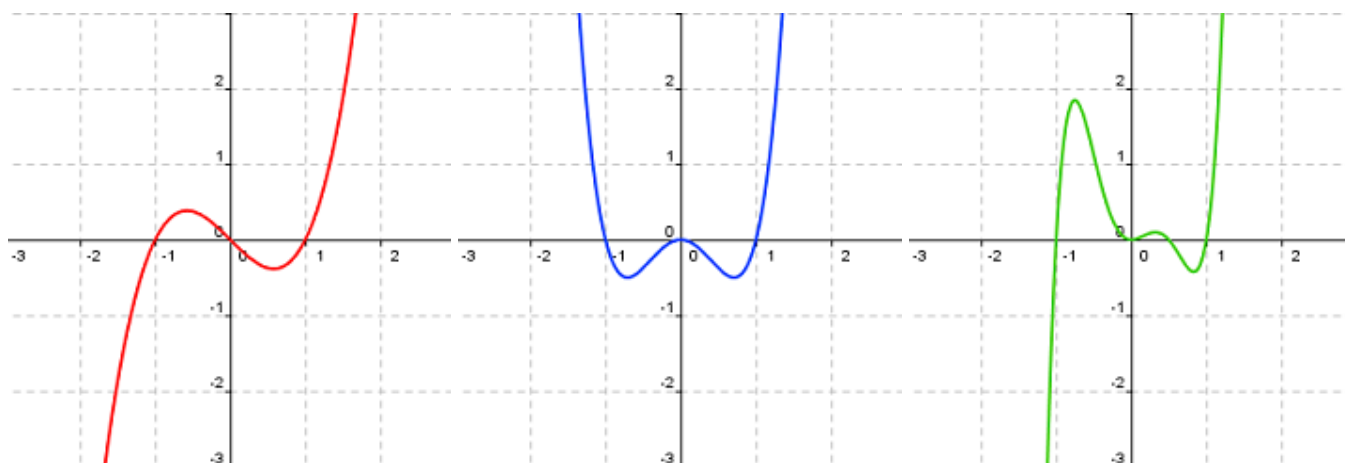
## Importante

Una función de la forma  $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_2x^2+a_1x+a_0$  donde  $n$  es un número natural,  $a_0, a_1, \dots, a_n$  son números reales y  $a_n$  es distinto de cero, se llama **función polinómica de grado  $n$** .

¡Claro que no nos podíamos parar en las funciones cuadráticas! Hay funciones polinómicas de tercer, cuarto, quinto grado, etc. No nos detendremos a estudiar sus características, pues hay una gran variedad, pero si te daremos unas nociones básicas que debes saber:

- El **dominio** de cualquier función polinómica es todo el conjunto de los números reales.
- El **recorrido** de una función polinómica de **grado impar** es todo el conjunto de los números reales.
- Siempre se pueden dibujar de un sólo trazo.
- Como máximo, **cortan al eje OX** en  $n$  puntos.
- Tienen, a lo sumo,  $n-1$  **máximos o mínimos relativos**.
- Como máximo, tienen  $n-2$  **puntos de inflexión**.

Aquí tienes unos ejemplos:



Función polinómica de grado 3      Función polinómica de grado 4      Función polinómica de grado 5

$$f(x)=x^3-x$$

$$g(x)=2x^4-2x^2$$

$$h(x)=6x^5-3x^4-6x^3+3x^2$$

Si quieres representar una función polinómica, a continuación tienes los pasos que puedes seguir.

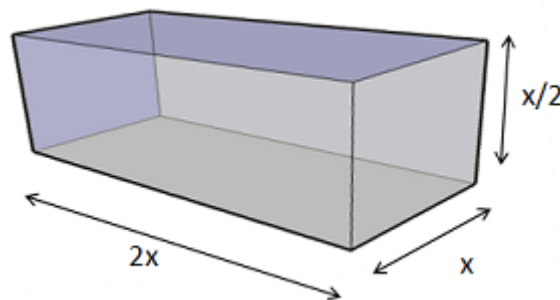
[http://www.slideshare.net/slideshow/embed\\_code/key/IU6QVHsN7kDKFY](http://www.slideshare.net/slideshow/embed_code/key/IU6QVHsN7kDKFY)

Funciones polinómicas from [saulvalper](#)



## Comprueba lo aprendido

En una empresa de transportes utilizan cajas cuyas dimensiones son  $x$  cm. de ancho,  $x/2$  cm. de alto y  $2x$  cm. de profundidad como en el siguiente dibujo.



a) ¿Qué función determina el volumen de la caja?

### Sugerencia

- ☐  $f(x)=7x/2$
- ☐  $f(x)=x^3$
- ☐  $f(x)=2-3x^2$

No es correcto, esa expresión sería la suma de las tres dimensiones, no el producto.

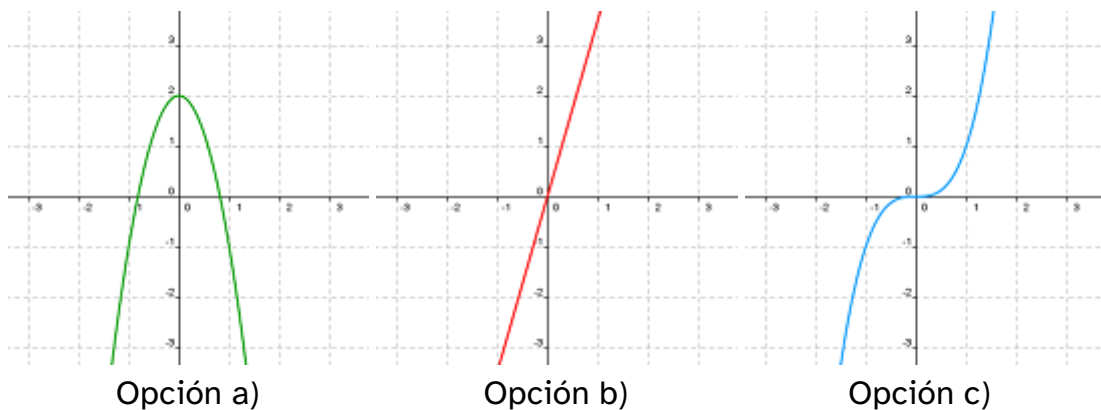
¡Correcto!  $f(x) = x \cdot \frac{x}{2} \cdot 2x = \frac{2x^3}{2} = x^3$

Este no es el resultado.

## Solución

1. Incorrecto
2. Opción correcta
3. Incorrecto

b) ¿Cuál de las siguientes es la gráfica de la función volumen calculada en el apartado anterior?



- ☐ Opción a)
- ☐ Opción b)
- ☐ Opción c)

No, es la gráfica de una función cuadrática.

No, es la gráfica de una función lineal.

¡Correcto! Esta es la gráfica de  $f(x)=x^3$

## Solución

1. Incorrecto
2. Incorrecto
3. Opción correcta

c) ¿Existe algún máximo o mínimo relativo en la función?

 [Sugerencia](#)

- ☐ Sí, un máximo relativo.
- ☐ Sí, un mínimo relativo.
- ☐ No, no tiene.

¿Seguro que esa gráfica tiene un máximo relativo?

¿Seguro que esa gráfica tiene un mínimo relativo?

¡Correcto! Esta es la opción válida.

### Solución

1. Incorrecto
2. Incorrecto
3. Opción correcta

d) ¿En qué punto se alcanzan un volumen de 1 litro?

 [Sugerencia](#)

- ☐ En  $x=10$
- ☐ En  $x=1$
- ☐ En  $x=5$

¡Correcto! 1 litro =  $1 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ cm}^3$ . Por tanto,  $f(x)=x^3=1000$ , luego  $x = 10 \text{ cm}$ .

No es correcto, porque  $f(1)=1\text{cm}^3$

No es correcto, pues  $f(5)=125\text{cm}^3$

### Solución

1. Opción correcta
2. Incorrecto
3. Incorrecto

e) Si el envase más grande que se puede construir tiene 1 litro de volumen, ¿cuál será el dominio real de la función?

 Sugerencia

- ☐  $D(f) = \mathbb{R}$
- ☐  $D(f) = [-10, 10]$
- ☐  $D(f) = (0, 10]$

No, pues estamos restringiendo el dominio.

No, pues  $x$  es una longitud y no puede tomar valores negativos.

¡Correcto!  $x$  sólo puede tomar valores positivos, y no superiores a 10 cm para que el volumen no sea mayor de un litro.

### Solución

1. Incorrecto
  2. Incorrecto
  3. Opción correcta
-

### 3. Funciones racionales

---

Hasta ahora hemos sumado, restado y multiplicado funciones polinómicas. Pero, ¿qué ocurre al dividirlas? ¿obtendremos un nuevo tipo de función?



Imagen en [Wikimedia Commons](#). Licencia [CC 3.0 by-sa](#)

Sí, son las llamadas **funciones racionales**, que al igual que ocurría con las polinómicas, también tienen

una gran importancia en el mundo que nos rodea. Son numerosas las leyes físicas que vienen dadas por funciones racionales, como la [Ley de la Gravitación Universal](#), o la conocida como [Ley de la Palanca](#).

Esta última afirma que para levantar un cuerpo que pese 100 kg y que esté a 2 metros del punto de apoyo, necesito aplicar una fuerza que viene dada por la fórmula:

$$f(x) = \frac{200}{x}$$

donde  $x$  es la distancia al punto de apoyo en metros. Con ello obtengo que, cuanto mayor sea esa distancia, menor es la fuerza que tengo que aplicar.

De hecho, siempre se recordará la famosa frase que dijo **Arquímedes**: "Dadme un punto de apoyo, y moveré el mundo".

Si te fijas, esta función se obtiene dividiendo dos funciones polinómicas, una de grado 0 y otra de primer grado.



#### Importante

---

Una función  $f(x)$  se llama **racional** si es el cociente de dos polinomios  $P(x)$  y  $Q(x)$ .

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

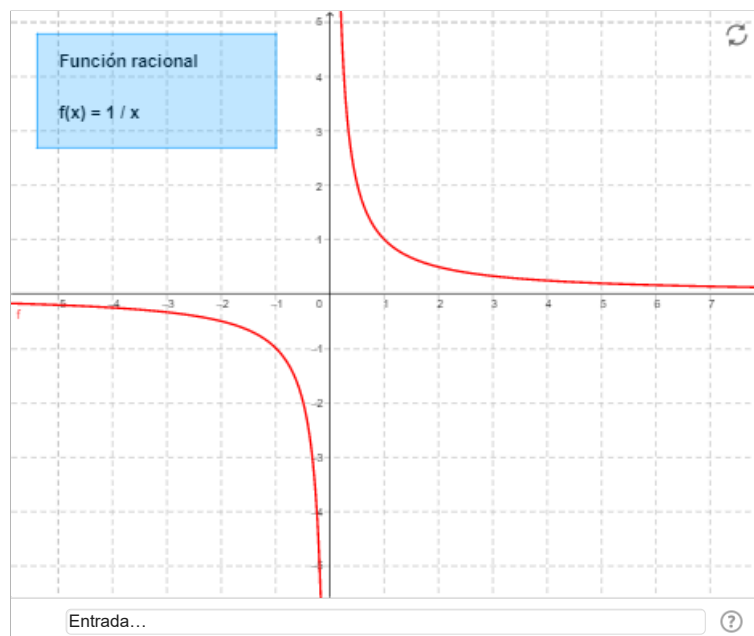
---

En la escena de GeoGebra que tienes a continuación puedes ver cómo es la gráfica de una función racional. En este caso tienes representada la función  $f(x)=1/x$ . Si quieres puedes modificar los polinomios del numerador o del denominador. Por ejemplo, para dibujar la gráfica de la función  $f(x)=(3-x)/(x^2-1)$ , escribe:

- $p(x)=3-x$
- $q(x)=x^2-1$

(El símbolo ^ sirve para escribir potencias en GeoGebra y otros programas matemáticos)

<https://tube.geogebra.org/material/iframe/id/1139355/width/691/height/583/border/888888/rc/false/ai/true/sdz/true/sm>



A continuación puedes ver algunas características de las funciones racionales y cómo representarlas.

[http://www.slideshare.net/slideshow/embed\\_code/key/4r97cAFaXiIwNc](http://www.slideshare.net/slideshow/embed_code/key/4r97cAFaXiIwNc)

[Funciones racionales](#) from [saulvalper](#)

Con la ayuda de la anterior escena de GeoGebra, completa la siguiente autoevaluación.



## Comprueba lo aprendido

Completa los espacios en blanco con las características de las funciones  $f(x) = \frac{-1}{x}$ ,  
 $g(x) = \frac{x+2}{x-1}$  y  $h(x) = \frac{x-18}{x^2-9}$ .

- $f(x)$  es una función de proporción .
- $D(f) = \mathbb{R} - \{ \text{ } \}$
- $R(f) = \mathbb{R} - \{ \text{ } \}$
- $f(x)$  tiene una Asíntota Vertical en  $x = \text{ }$ , y una Asíntota Horizontal en  $y = \text{ }$ .
- $f(x)$  es una función  (creciente/decreciente)
- $D(g) = \mathbb{R} - \{ \text{ } \}$
- $R(g) = \mathbb{R} - \{ \text{ } \}$
- $g(x)$  tiene una Asíntota Vertical en  $x = \text{ }$ , y una Asíntota Horizontal en  $y = \text{ }$ .
- $g(x)$  corta al eje de abscisas en el punto (  , 0 )
- $D(h) = \mathbb{R} - \{ \text{ } , \text{ } \}$
- La gráfica de  $h(x)$  pasa por los puntos (  , 0 ), ( 0,  ) y ( -2,  )



## Para saber más

En la presentación anterior aparece el concepto de **asíntota de una función**. En la siguiente unidad se explicará con más detenimiento este tipo de rectas. Por ahora sólo diremos que una recta es asíntota de una función, si sus gráficas se aproximan de manera indefinida.

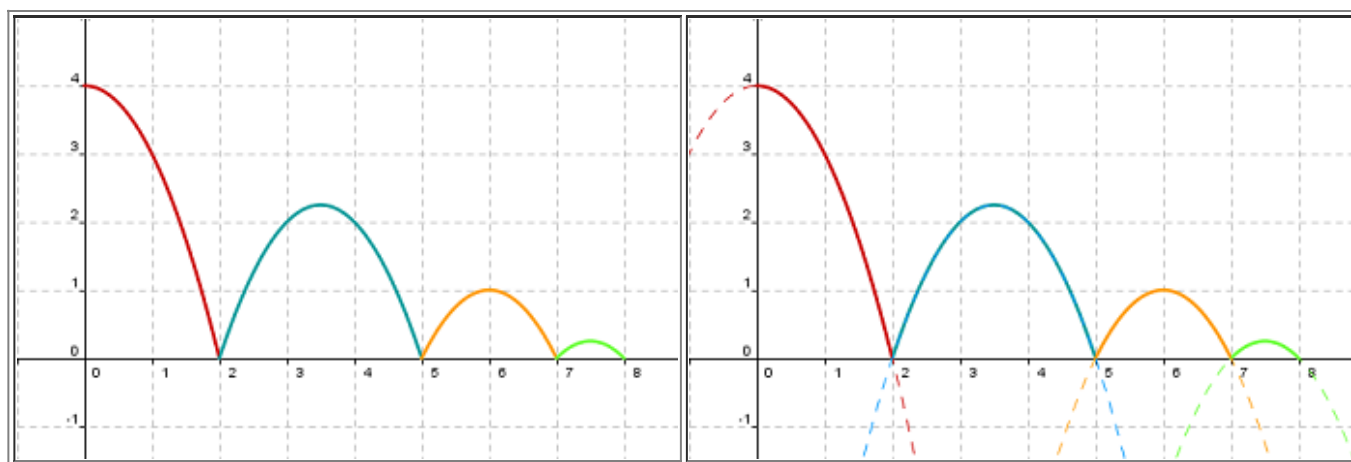
Por ejemplo, la función racional  $f(x) = \frac{1}{x}$ , tiene como asíntotas la recta horizontal  $y=0$ , y la vertical  $x=0$ .

Una función polinómica no tiene asíntotas. Como hemos visto, muchas racionales sí las tienen.

## 4. Funciones definidas a trozos

Algunas funciones son caprichosas y pueden sufrir mutaciones de un instante a otro. Ya hemos visto que la función que determina la altura de la manzana que cae de un árbol es una función cuadrática. Pero si lo que dejamos caer es una pelota, ésta irá rebotando y alcanzando diferentes alturas dependiendo del tiempo que haya pasado.

En las dos imágenes siguientes tienes un ejemplo de la altura que puede alcanzar un balón de baloncesto que rebota sucesivas veces. Como puedes ver en el gráfico de la derecha, en realidad se trata de trozos de parábola, es decir, **trozos** de funciones cuadráticas.



El trozo en el que nos encontremos depende de los valores de la  $x$ . Esta función podríamos expresarla de la siguiente forma:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4 & \text{si } x \in [0,2] \\ -x^2 + 7x - 10 & \text{si } x \in (2,5] \\ -x^2 + 12x - 35 & \text{si } x \in (5,7] \\ -x^2 + 15x - 56 & \text{si } x \in (7,8] \end{cases}$$

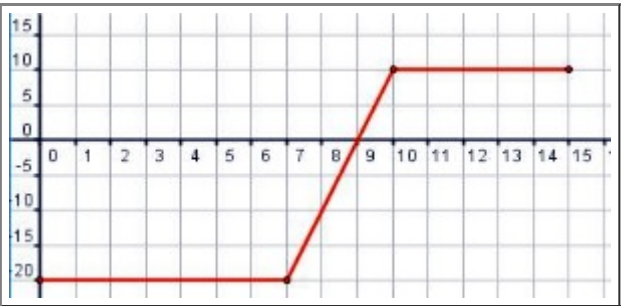
Para calcular el valor de la función en  $x=4$ , tendremos que irnos al segundo intervalo  $(2,5]$  y sustituir en ese trozo:  $f(4) = -16 + 28 - 10 = 2$ .

Además, recuerda que el signo  $\in$  significa "**pertenece**". Por ejemplo,  $x \in [0, 2]$  quiere decir que  $x$  está en el intervalo  $[0, 2]$ .



**Comprueba lo aprendido**

Lola, a la siete de la mañana, cuando se despierta, saca del congelador la comida que calentará al mediodía cuando vuelva de trabajar. En la gráfica que aparece a la derecha se puede ver cómo va cambiando la temperatura del alimento desde medianoche hasta las tres de la tarde, que es cuando llega Lola del trabajo.



De las tres funciones definidas a trozos, que aparecen en la tabla, sólo ☐ tiene como gráfica la anterior.

$f(x) = \begin{cases} -10 & \text{si } 0 \leq x < 7 \\ 10x - 90 & \text{si } 7 \leq x < 10 \\ 15 & \text{si } 10 \leq x \leq 15 \end{cases}$	$f(x) = \begin{cases} -20 & \text{si } 0 \leq x < 8 \\ 10x - 90 & \text{si } 8 \leq x < 10 \\ 15 & \text{si } 10 \leq x \leq 15 \end{cases}$	$f(x) = \begin{cases} -20 & \text{si } 0 \leq x < 7 \\ 10x - 90 & \text{si } 7 \leq x < 10 \\ 15 & \text{si } 10 \leq x \leq 15 \end{cases}$
a	b	c

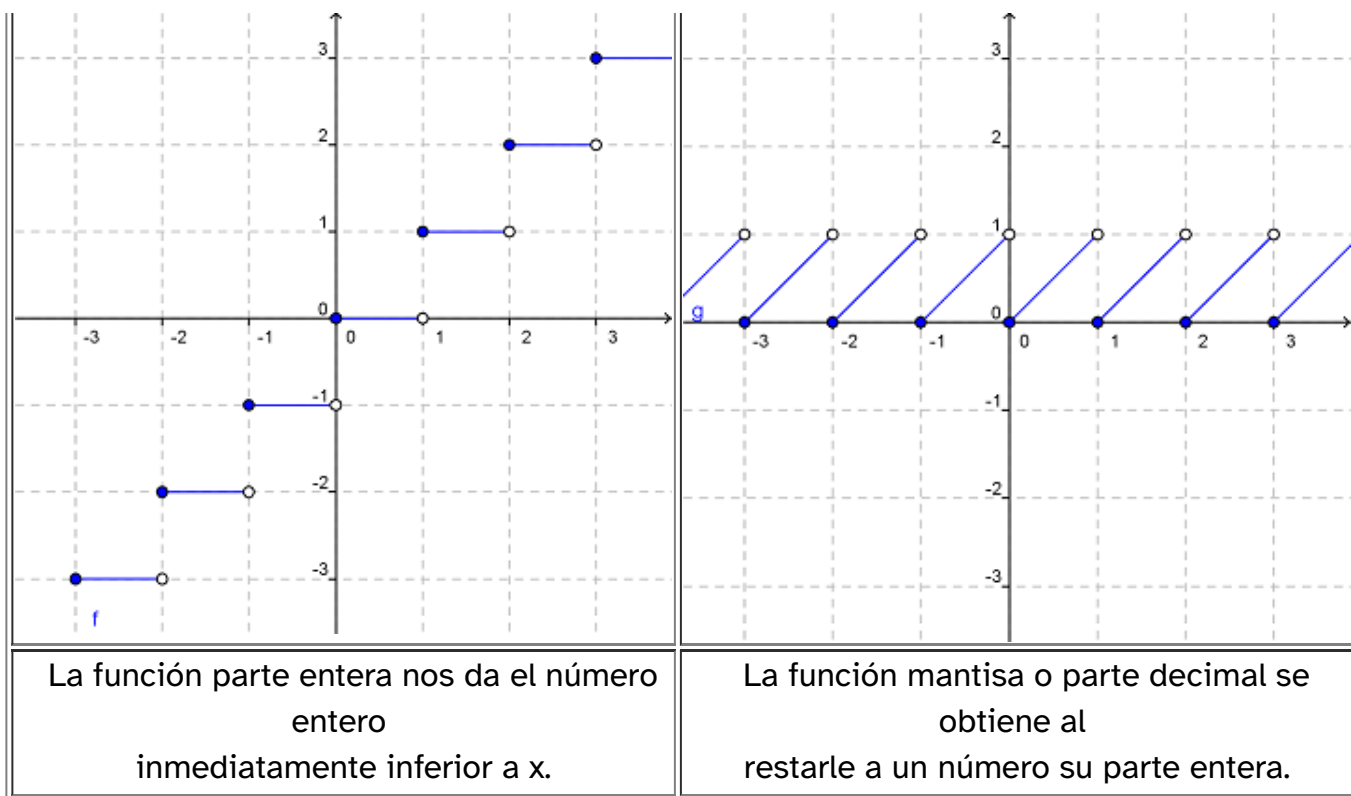
La opción a no puede ser porque la temperatura entre las 0 y 7 horas no es -10°.

La opción b no es porque mantiene los -20° hasta las 8 de la mañana.

Es la opción c. Cumple las definiciones para cada uno de los intervalos.

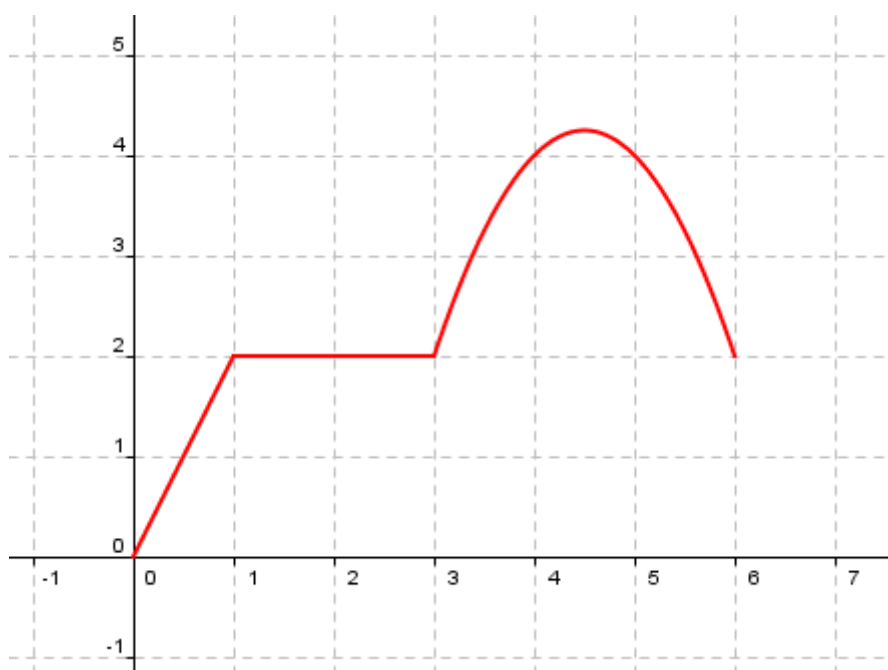
Antes de terminar con una actividad, debes conocer dos funciones muy especiales que están definidas por pequeños trozos de funciones lineales.

<p><b>Función Parte Entera</b></p> <p><math>f(x)=E(x)</math></p>	<p><b>Función Mantisa</b></p> <p><math>g(x)=Mant(x)</math></p>



## Comprueba lo aprendido

Completa los espacios en blanco sobre la siguiente gráfica de una función a trozos:



- a) El dominio de esta función es  $D(f)=[\square, \square]$  y su recorrido  $R(f)=[\square, 17/4]$ .
- b) La gráfica de la función pasa por los puntos  $(\square, 0)$ ,  $(2, \square)$ ,  $(5, \square)$  y  $(6, \square)$ .
- c) El primer trozo de la gráfica es  $y=2x$  para  $x \in [\square, \square]$ .
- d) El segundo trozo es  $y=\square$ , para  $x \in [\square, \square]$
- e) El tercer trozo es  $y=-x^2+9x-\square$ , para  $x \in [\square, \square]$
- 



## Curiosidad

---

Para dibujar un trozo de una función en el programa [Geogebra](#), debes utilizar el comando **función[f,a,b]**, donde f es la expresión de la función, a es el extremo inferior del trozo y b el extremo superior.

Por ejemplo, si quieres trazar la gráfica de la función  $f(x)=x^2-1$  entre 0 y 10, escribe  $f(x)=\text{función}[x^2-1,0,10]$

---

## 5. Funciones valor absoluto y raíz

---



### Importante

---

Si tenemos una función real  $f(x)$ , podemos definir la función valor absoluto de  $f(x)$  como:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$$

---

En el conjunto de los números reales tenemos una operación llamada **valor absoluto**. Esta operación no afecta a los números positivos, mientras que a los negativos les cambia el signo.

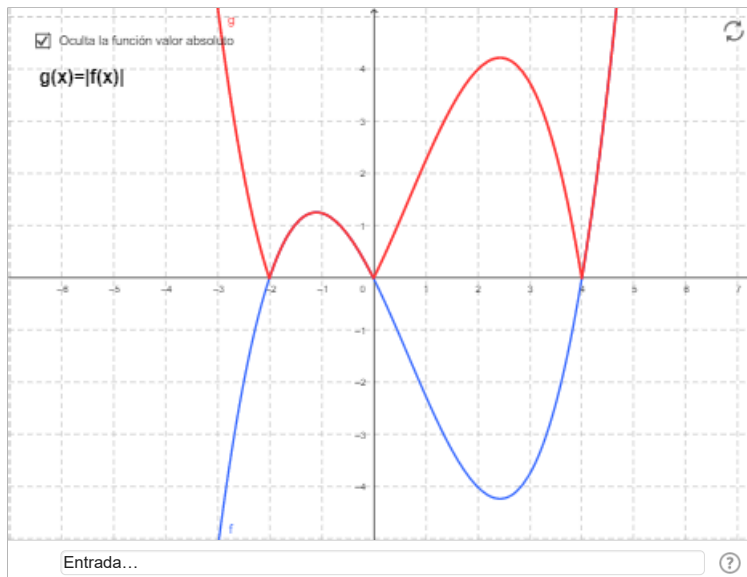
Esto nos permite definir una función, **valor absoluto**, que tiene un efecto parecido: si el valor de  $f(x)$  es positivo, lo deja igual, en tanto que si  $f(x)$  es negativo, lo cambia de signo.



Imagen de gotencool en [Flickr](#). Licencia [CC 2.0 by-nc-sa](#)

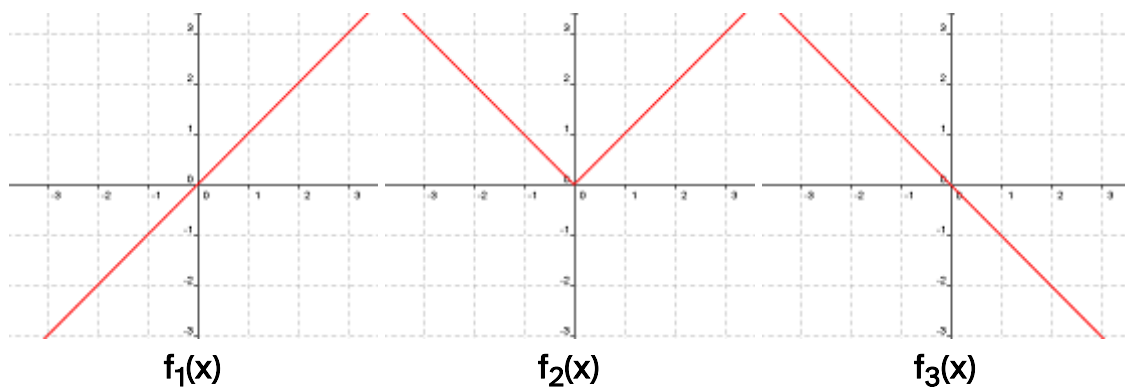
En realidad lo que hace esta función valor absoluto es "**reflejar**" la función  $f(x)$  en el eje de abscisas. Los trozos de la gráfica que estén por encima del eje, permanecerán igual, mientras que los que quedan por debajo obtienen su reflejo por encima del eje.

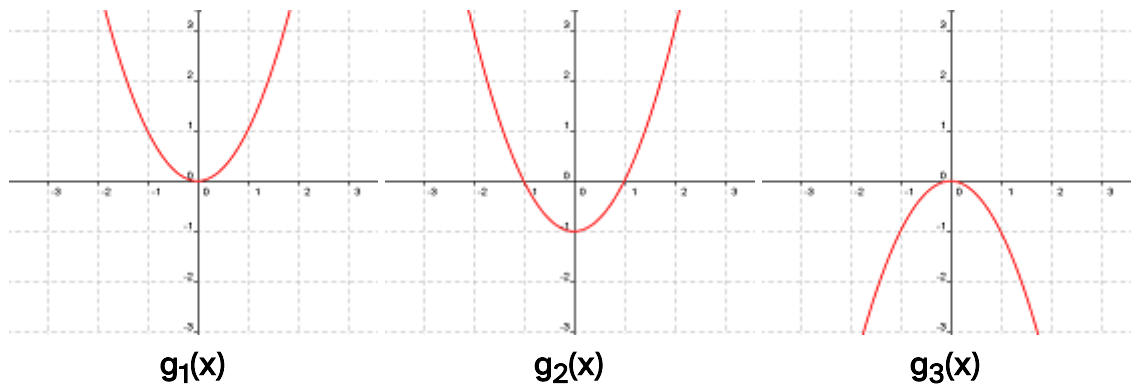
En la siguiente escena tienes un ejemplo. Si pulsas la casilla se ocultará el valor absoluto para que veas la función original. Puedes mover la función azul para ver cómo cambia su valor absoluto. También puedes cambiar la función escribiendo, por ejemplo:  $f(x)=2x-1$ , para ver cómo sería el valor absoluto de ésta u otra nueva función.



## Comprueba lo aprendido

Mira las siguientes gráficas y elige las opciones adecuadas en cada caso.





a) El valor absoluto de  $f_1(x)$  es:

- ☐  $f_1(x)$
- ☐  $f_2(x)$
- ☐  $f_3(x)$

### Solución

1. Incorrecto
2. Correcto
3. Incorrecto

b) La función  $f_2(x)$  es el valor absoluto de:

- ☐  $f_1(x)$
- ☐  $f_2(x)$
- ☐  $f_3(x)$

### Solución

1. Correcto
2. Correcto
3. Correcto

c) La función  $g_1(x)$  es el valor absoluto de:

- ☐  $g_1(x)$
- ☐  $g_2(x)$
- ☐  $g_3(x)$

## Solución

1. Correcto
2. Incorrecto
3. Correcto



## Importante

Llamamos **función raíz** a la función que tienen la variable independiente  $x$  dentro del signo radical:

$$f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$$

Las características de la función raíz son:

- 1) Si  $n$  es un número par su dominio es el intervalo en el que  $g(x) \geq 0$ .
- 2) Si  $n$  es impar, su dominio es  $\mathbb{R}$ .
- 3) Su representación gráfica es una rama de una parábola.



## Reflexiona

Comprueba las tres características antes mencionadas para la función :  $f(x) = \sqrt{x}$

### 1) Dominio:

Como es una raíz cuadrada, el dominio de  $f(x)$  es el conjunto de valores donde  $x \geq 0$ , es decir,  $\text{Dom}(f) = [0, +\infty)$

### 2) Puntos de corte:

Vemos su valor en  $x=0$ :  $f(0) = \sqrt{0} = 0$ , es decir, el punto de corte coincide con el eje de coordenadas  $(0, 0)$ .

### 3) Representación:

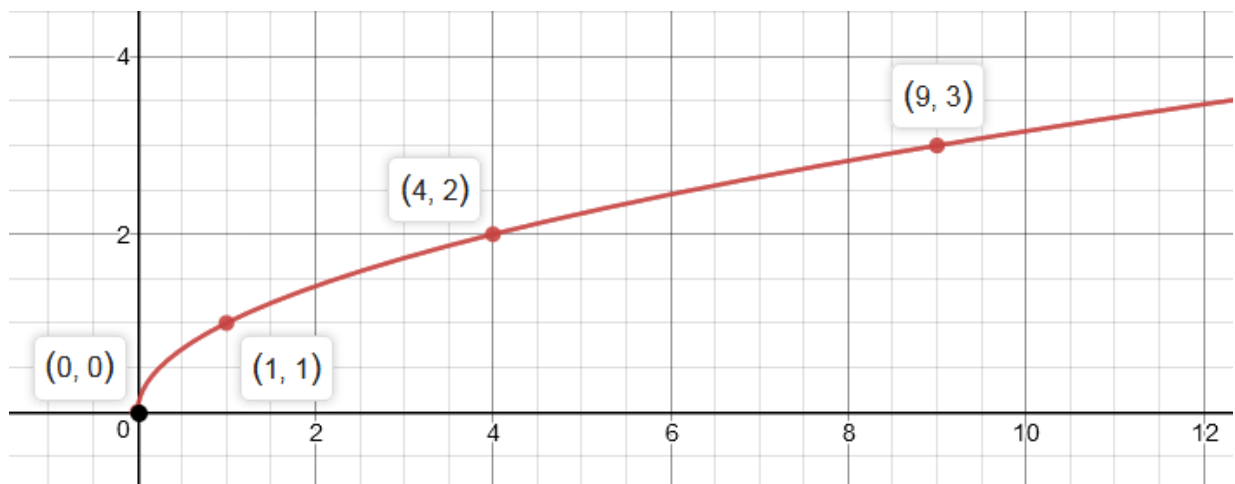
Realizamos una tabla de valores para la gráfica de esta función:

x f(x)

1 1

4 2

9 3



## Resumen

---



### Importante

---

Una función de la forma  $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_2x^2+a_1x+a_0$  donde  $n$  es un número natural,  $a_0, a_1, \dots, a_n$  son números reales y  $a_n$  es distinto de cero, se llama **función polinómica de grado  $n$** .

Sus características básicas son:

- El **dominio** de cualquier función polinómica es todo el conjunto de los números reales.
- El **recorrido** de una función polinómica de **grado impar** es todo el conjunto de los números reales.
- Siempre se pueden dibujar de un sólo trazo.
- Como máximo, **cortan al eje OX** en  $n$  puntos.
- Tienen, a lo sumo,  $n-1$  **máximos o mínimos relativos**.
- Como máximo, tienen  $n-2$  **puntos de inflexión**.

[http://www.slideshare.net/slideshow/embed\\_code/key/IU6QVHsN7kDKFY](http://www.slideshare.net/slideshow/embed_code/key/IU6QVHsN7kDKFY)

Funciones polinómicas from [saulvalper](#)

---



### Importante

---

Una función  $f(x)$  se llama **racional** si es el cociente de dos polinomios  $P(x)$  y  $Q(x)$ .

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

[http://www.slideshare.net/slideshow/embed\\_code/key/4r97cAFaXiIwNc](http://www.slideshare.net/slideshow/embed_code/key/4r97cAFaXiIwNc)

Funciones racionales from [saulvalper](#)

---



### Importante

---

Si tenemos una función real  $f(x)$ , podemos definir la función valor absoluto de  $f(x)$  como:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$$

---



## Importante

---

Llamamos **función raíz** a la función que tienen la variable independiente  $x$  dentro del signo radical:

$$f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$$

Las características de la función raíz son:

- 1) Si  $n$  es un número par su dominio es el intervalo en el que  $g(x) \geq 0$ .
  - 2) Si  $n$  es impar, su dominio es  $\mathbb{R}$ .
  - 3) Su representación gráfica es una rama de una parábola.
-

# Aviso legal

---

Las páginas externas no se muestran en la versión imprimible

<http://www.juntadeandalucia.es/educacion/permanente/materiales/index.php?aviso#space>

## Imprimible

---

Descarga aquí la versión imprimible de este tema.



---

Si quieres escuchar el contenido de este archivo, puedes instalar en tu ordenador el lector de pantalla libre y gratuito [NDVA](#).

---