FQ1 - Tema 5.3: Dinámica: Sistemas dinámicos

Dinámica: Sistemas dinámicos

Física y Química

1.º Bachillerato

Contenidos

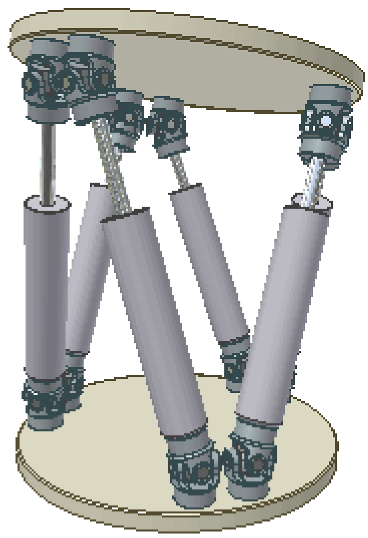
Dinámica

Sistemas dinámicos

1. Introducción

En el primer tema de este unidad has estudiado las leyes que gobiernan la dinámica, las leyes de Newton. El trabajo se centró entonces en sistemas estáticos, que denominábamos en equilibrio. Sin embargo, la mayor parte de las situaciones que pueden encontrarse en nuestro entorno se caracterizan por su variabilidad: se encuentran en movimiento.

En este tema estudiarás sistemas dinámicos, que se definen como aquellos sistemas físicos que evolucionan en el tiempo. También verás algunas causas que pueden provocar esta evolución y, sobre todo, se plantearán distintos sistemas en los que tendrás que deducir sus ecuaciones de movimiento.



Animación de UtzOnBike en Wikimedia Commons. CC

Estos sistemas serán simples modelizaciones de los casos más complejos que pueden observarse en la realidad, pero el uso de estos modelos te permitirá comprender mejor el comportamiento de los sistemas reales sin necesidad de cálculos excesivamente complicados.

2. Sistemas con un cuerpo

El caso más sencillo de estudio dentro de la dinámica es aquél en el que únicamente existe un cuerpo cuyo movimiento quiere estudiarse. Este tipo de problemas es fundamental, pues su método de resolución es similar al aplicado en problemas más complicados.

Importante

Cuando tengas que resolver un problema de aplicación de las leyes de la dinámica, es importante que sigas ordenadamente las siguientes pautas:

1. Identifica las fuerzas que se ejercen sobre el cuerpo, así como su origen, tipo y dirección.
2. Dibuja un diagrama de fuerzas lo más simple posible, pero que contenga toda la información que se haya suministrado. El punto de aplicación de todas las fuerzas será el centro geométrico del cuerpo sobre el que actúan.
3. Escoge un sistema de referencia cartesiano de forma que uno de los ejes coincida con la dirección esperada de movimiento del cuerpo. La componente perpendicular al plano de movimiento se denomina **Normal** mientras que la paralela al mismo es la componente **Tangencial**.
4. Descompón todas las fuerzas en sus componentes según los ejes del sistema de referencia.
5. Aplica la segunda ley de Newton en cada uno de los ejes.
6. Resolución matemática del sistema de ecuaciones que resulta para conocer los datos que se nos piden.

2.1 Plano horizontal

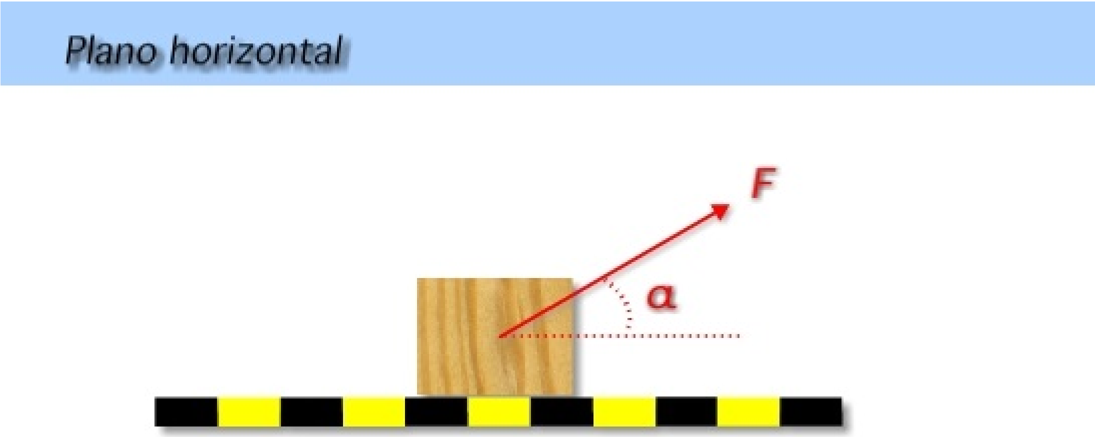


Imagen de elaboración propia

El caso más simple de sistema dinámico que podemos encontrar es aquél en el que un cuerpo se mueve sobre un plano horizontal sin rozamiento con una fuerza F actuando sobre él. Además de dicha fuerza, en un problema de este tipo siempre actuarán dos fuerzas más:

- El peso (p), que en este tema representaremos preferiblemente por su valor m·g. Siempre tendrá dirección vertical y hacia abajo.
- La normal (N), correspondiente a la fuerza de reacción de la superficie sobre la que se apoya el cuerpo. En este caso su dirección será, como su nombre indica, perpendicular a la superficie. En el caso de un plano horizontal siempre será vertical y hacia arriba. Esta fuerza tendremos que deducir en cada caso qué valor toma porque es la fuerza de reacción a la que el cuerpo hace sobre el plano.

Una vez identificadas las fuerzas, escogemos el sistema de referencia. El movimiento probablemente será paralelo al plano por lo que tomamos esta dirección y la perpendicular como ejes de nuestro sistema de referencia.

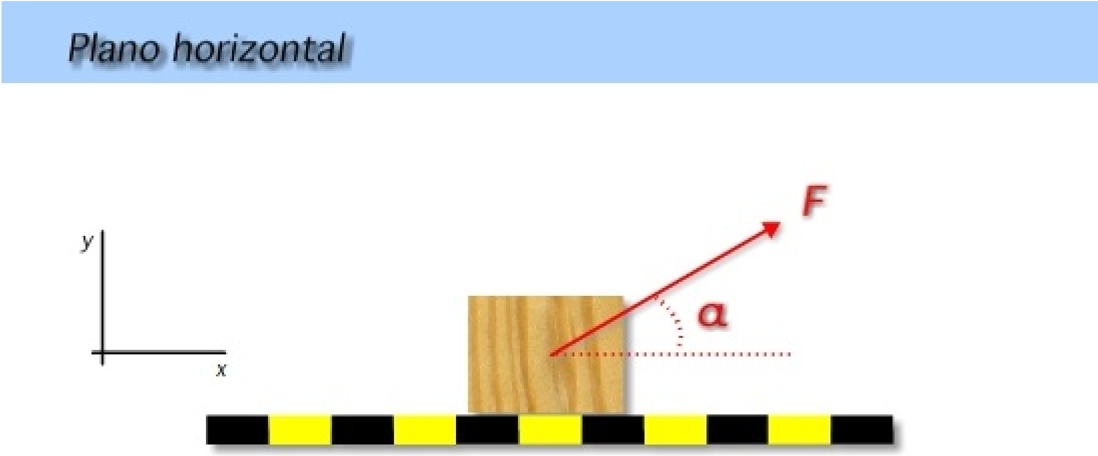


Imagen de elaboración propia

El siguiente paso es descomponer aquellas fuerzas cuya dirección no coincida con alguno de los ejes de coordenadas en sus componentes cartesianas. En este caso, la única fuerza que no coincide es la fuerza F, por lo que procedemos a descomponerla en sus componentes F_x y F_y.

$$F_x = F \cdot \cos\alpha$$
$$F_y = F \cdot sen\alpha$$

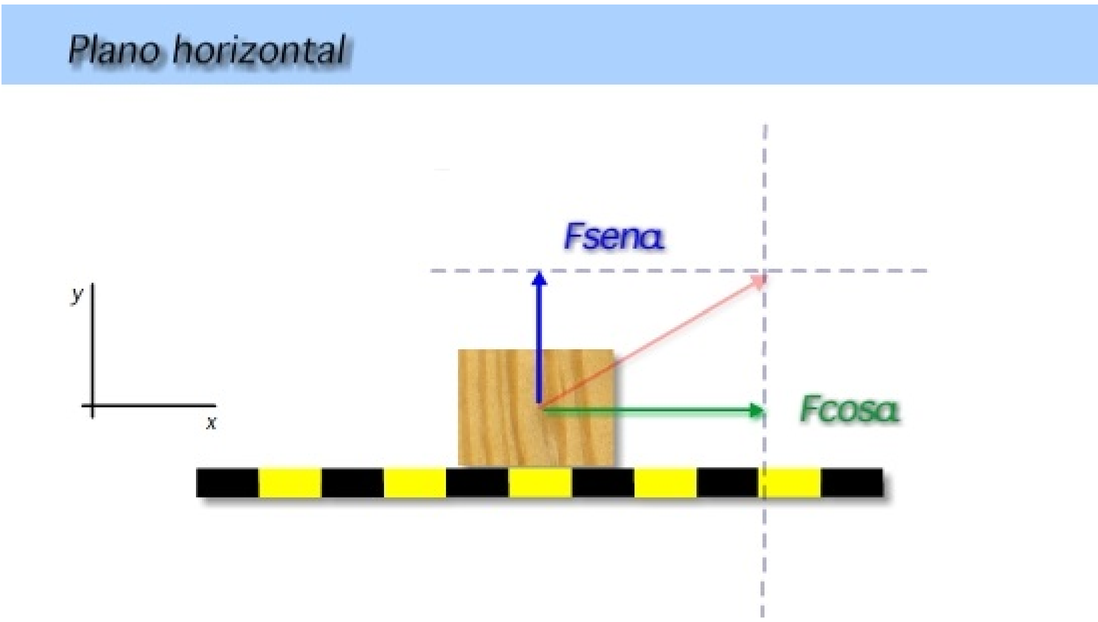


Imagen de elaboración propia

El nuevo esquema con las fuerzas descompuestas en sus ejes quedaría como sigue:

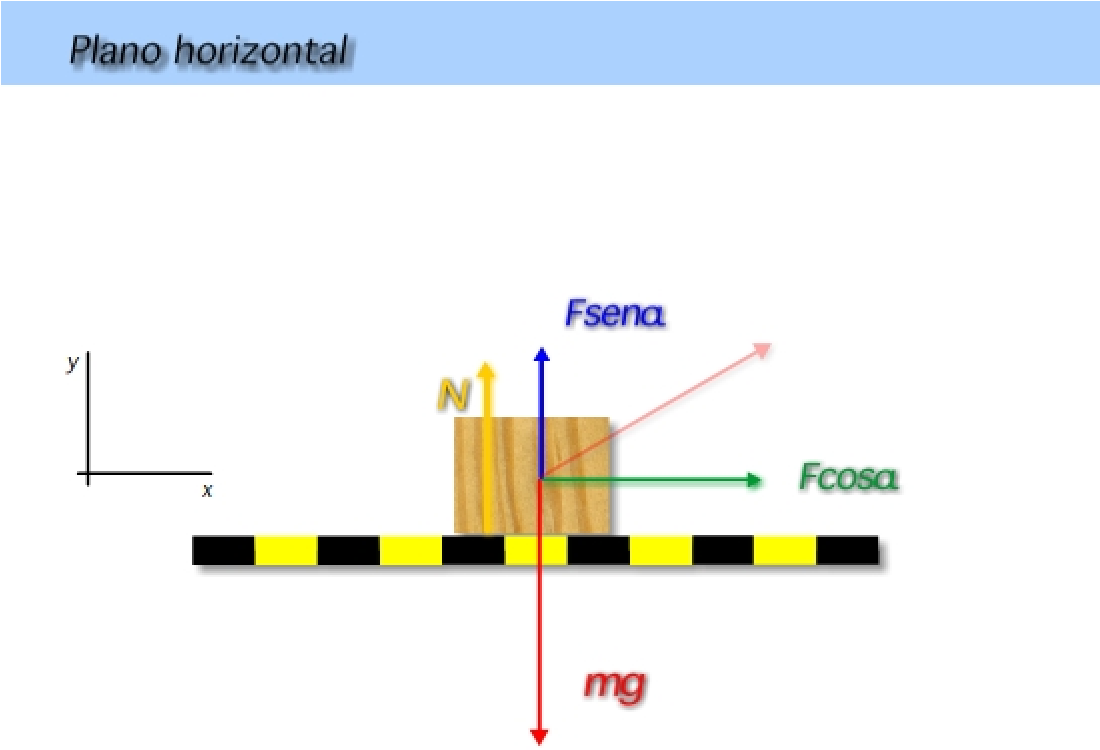


Imagen de elaboración propia

Ya solo queda escribir las ecuaciones del movimiento en cada uno de los ejes. En cada eje tenemos en cuenta qué fuerzas actúan a favor del movimiento y restamos las que se oponen. En el eje horizontal hay aceleración pero no en el vertical por lo que las ecuaciones quedan:

$$F \cdot \cos \alpha = m \cdot a_x$$
$$F \cdot sen\alpha + N - m \cdot g = 0$$

Obtenemos así un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas (a_x y N). De cada una de las ecuaciones se pueden despejar de forma independiente cada una de ellas y habríamos resuelto el problema.

Caso práctico

Sobre un objeto de masa 2 kg situado en un plano horizontal se ejerce una fuerza externa de 10 N aplicada con un ángulo de 45° respecto a la horizontal.

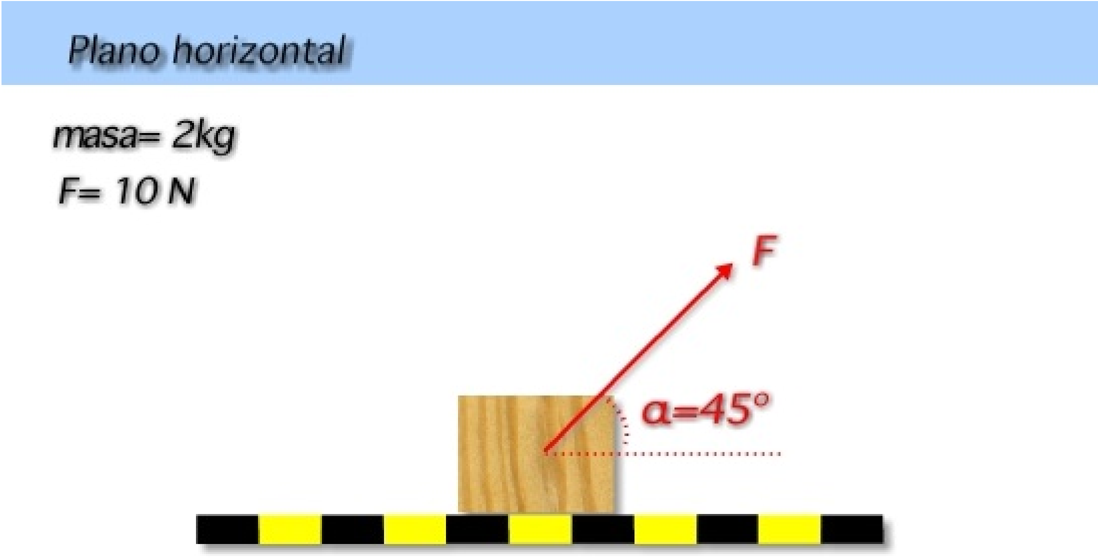


Imagen de elaboración propia

a) Dibuja el diagrama de fuerzas correspondiente a esta situación, elige un sistema de referencia y descompón todas las fuerzas en eses ejes.

El esquema de fuerzas será similar al que sigue:

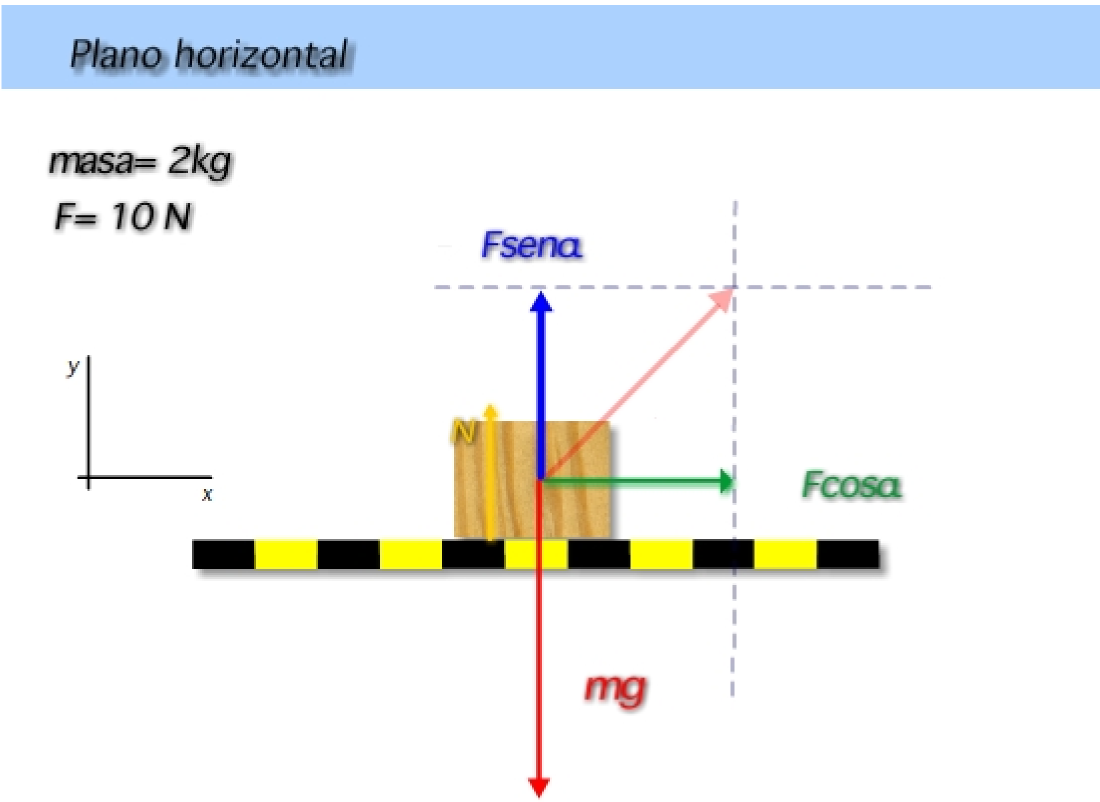


Imagen de elaboración propia

Hemos elegido como ejes coordenados el que va paralelo al plano y el perpendicular a este. Descomponemos la fuerza que no es paralelo a estos ejes:

$$F_x = F \cdot \cos \alpha = 10 \cdot \cos 45^\circ = 7{,}07 \text{ N}$$

$$F_y = F \cdot \text{sen } \alpha = 10 \cdot \text{sen } 45^\circ = 7{,}07 \text{ N}$$

b) Aplica la 2ª ley de Newton.

Las ecuaciones del movimiento serán las siguientes:

- Eje x: $F_x = m \cdot a \rightarrow 7{,}07 = 2.a$
- Eje y: $F_y + N - m \cdot g = 0 \rightarrow 7{,}07 + N - 19{,}6 = 0$

c) Calcula el valor de la fuerza normal.

Para calcular la fuerza normal necesitarás despejar su valor de las ecuaciones correspondientes al eje y:

$$7{,}07 + N - 19{,}6 = 0$$

$$N = 19{,}6 - 7{,}07 = 12.53 \text{ N}$$

d) Calcula la aceleración que adquirirá el cuerpo por acción de dicha fuerza.

En este caso será necesario utilizar las ecuaciones del movimiento en el eje x:

$$7{,}07 = 2.a \rightarrow a = 7.07/2 \rightarrow a = 3.54 \text{ m/s}^2$$

Comprueba lo aprendido

Si al cuerpo del ejercicio anterior se le aplica una fuerza de 20 N con un ángulo de 35°, el valor de la Normal y de su aceleración serán, respectivamente:

- [ ] 16.24 N y 8.19 m/s^2
- [ ] 8.13 N y 8.19 m/s^2
- [ ] 16.24 N y 5.21 m/s^2

Solución

1. Incorrecto
2. Correcto
3. Incorrecto

2.2 Fuerzas de rozamiento

Cuando un cuerpo se desliza sobre una superficie, tarde o temprano acabará parándose; esta afirmación parece contradecir la primera ley de Newton o de la inercia. ¿Cuál es la causa de este comportamiento? La fuerza de rozamiento que se opone al deslizamiento y que es debida a las imperfecciones microscópicas de los materiales. Nos confunde el hecho de que parece que no actúa ninguna fuerza pero hay una fuerza, la del rozamiento, que se opone al deslizamiento de un cuerpo sobre otro y que explica, de acuerdo con la segunda ley de Newton, la existencia de un cambio en el estado de movimiento.

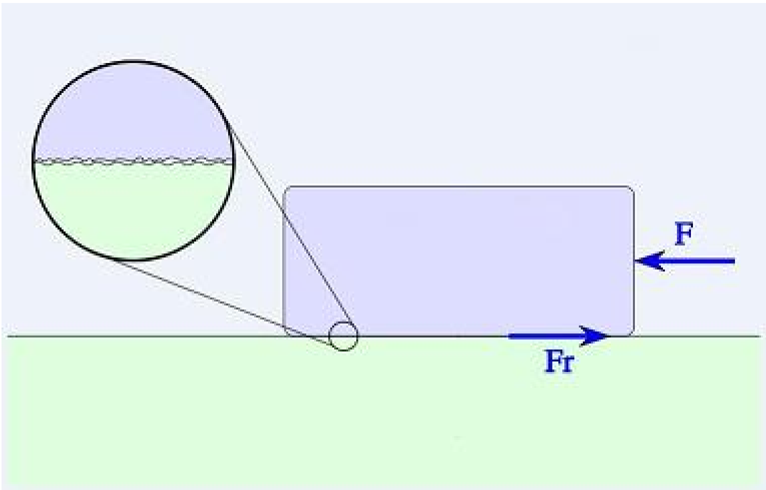


Imagen adaptada de HiTe en Wikimedia Commons. CC

Importante

Por fuerza de rozamiento se entiende toda fuerza que se opone al deslizamiento de un objeto debido a las interacciones entre las superficies de contacto y/o el medio en el que se desplaza.

Al realizar un estudio experimental de una fuerza de rozamiento, se encuentran las siguientes características:

- Toda fuerza de rozamiento tiene la dirección de la superficie de contacto y sentido contrario al posible deslizamiento.
- El valor de su módulo toma valores desde cero hasta un valor máximo, que coincide con la fuerza mínima para iniciar el movimiento.
- Una vez ha comenzado el movimiento, el valor del módulo disminuye hasta un valor determinado que permanece constante mientras el cuerpo siga moviéndose.
- La fuerza de rozamiento no depende del área de contacto entre superficies.

De estos resultados podemos deducir la existencia de una constante de proporcionalidad entre fuerza de rozamiento y la Normal, que denominaremos **coeficiente de rozamiento** y representaremos por la letra griega μ. Además, existen dos tipos de fuerza de rozamiento:

- Fuerza de rozamiento estático, que actúa sobre los cuerpos en reposo, caracterizada por el coeficiente de rozamiento estático $\boldsymbol{\mu_e}$.
- Fuerza de rozamiento dinámico, que actúa sobre los cuerpos en movimiento, caracterizada por el coeficiente de rozamiento dinámico $\boldsymbol{\mu_d}$.

Importante

Según lo visto, el valor de la fuerza de rozamiento es variable. Mientras no haya deslizamiento, la fuerza de rozamiento coincide con las fuerzas aplicadas en la dirección del deslizamiento hasta alcanzar un valor máximo:

$$F_{Re\ max} = \mu_e \cdot N$$

Cuando se produce deslizamiento la fuerza de rozamiento se puede calcular como:

$$F_{Rd} = \mu_d \cdot N$$

Se cumple que para un mismo par de superficies que el coeficiente de rozamiento dinámico es menor que el estático.

Caso práctico

Vamos a practicar un poco con el siguiente simulador para ver si has conseguido comprender cómo se manifiesta la fuerza de rozamiento.

https://phet.colorado.edu/sims/html/forces-and-motion-basics/latest/forces-and-motion-basics_es.html

Entra en el apartado "Fricción", selecciona *Fuerzas, suma de fuerzas y valores* en le cuadro superior derecho. Ahora aplica una fuerza pequeña, 10 N por ejemplo, sobre el cuerpo. ¿Qué ocurre?

El cuerpo no se mueve.

¿Cómo es posible que el cuerpo no se mueva si estoy aplicando una fuerza sobre él?

Porque la suma de fuerzas que actúan sobre el cuerpo es cero. Esto quiere decir que debe haber una fuerza opuesta a la que estamos aplicando, de igual módulo, que la anule.

¿Cuál es esa fuerza?

La fuerza de rozamiento.

Reinicia y aplica una fuerza de 20 N. ¿Qué ocurre?

Tampoco se mueve. La fuerza de rozamiento ahora es de 20N y se opone a la que estamos aplicando de forma que la fuerza resultante es nula.

Reinicia y aplica una fuerza de 126 N. ¿Qué ocurre ahora?

Ahora la fuerza aplicada es mayor que la de rozamiento, existe una fuerza resultante o neta mayor que cero que provoca una aceleración en el cuerpo.

¿Qué valor tendrá la fuerza de rozamiento en la situación anterior?

Como la fuerza resultante (32N) es la diferencia entre la aplicada (126 N) y la de rozamiento, basta restar para determinar el valor de esta última. La fuerza de rozamiento en este caso vale 94 N.

Reinicia y aplica una fuerza de 150 N. ¿Qué valor tiene la fuerza de rozamiento en este caso?

Repitiendo el cálculo anterior deducimos que la fuerza de rozamiento vale:

F_R= 150-56=94N

Cuando el objeto se está moviendo, ¿qué ocurre con el valor de la fuerza de rozamiento?

Que es constante. Se puede calcular multiplicando el coeficiente de rozamiento dinámico por la fuerza normal.

Reinicia de nuevo y mueve el cursor de la fuerza aplicada hasta que te ubiques en el punto A de la gráfica. ¿Qué ocurre? ¿Cuánto vale en este caso la fuerza de rozamiento máxima? ¿Cómo se puede calcular este valor?

El cuerpo no se mueve porque la suma de fuerzas sigue siendo cero. Si aumentamos un poco más la fuerza aplicada, ya el rozamiento no es capaz de compensarla y el cuerpo comienza a moverse. La fuerza de rozamiento máxima es 25,8 N. Este valor se puede calcular aplicando la fórmula:

$F_{Re\ max} = \mu_e \cdot N$

Curiosidad

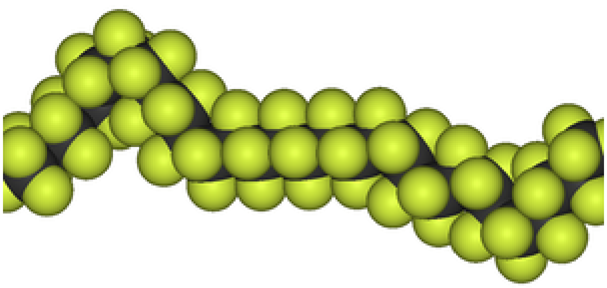


Imagen de Wikimedia. CC0

El rozamiento nunca puede llegar a eliminarse completamente. Sin embargo, es posible reducirlo drásticamente mediante el uso de materiales específicos. La química moderna nos ha proporcionado

sustancias que permiten un rozamiento mínimo: uno de estos materiales es el politetrafluoroetileno, más conocido por su nombre comercial **Teflón**.
Se trata de un material impermeable con un índice de fricción mínimo, lo que provoca que cualquier sustancia situada sobre él resbale, lo que le da su característica antiadherencia y de ahí su uso en sartenes y cacerolas. Como curiosidad, también se utiliza en piercings e implantes para evitar alergias y enganches con la ropa.
Puedes conocer más cosas sobre el politetrafluoroetileno en el siguiente enlace.

Comprueba lo aprendido

Marca las afirmaciones sobre el rozamiento que sean correctas:

- [ ] Un cuerpo en reposo no sufre nunca rozamiento.
- [ ] El coeficiente de rozamiento estático siempre es mayor que el coeficiente de rozamiento dinámico.
- [ ] La fuerza de rozamiento estático siempre es mayor que la fuerza de rozamiento dinámico.

Solución

1. Incorrecto
2. Correcto
3. Incorrecto

Caso práctico

Imagen en pxhere. Dominio público

Es muy frecuente escuchar la frase "el rozamiento siempre se opone al movimiento". Claro, como muchos objetos se paran por culpa del rozamiento... Pero piensa en una situación muy cotidiana: ¿qué fuerza nos permite transportar objetos en una bandeja?

Haz un esquema y dibuja las fuerzas que actúan sobre un objeto situado sobre la bandeja.

Evidentemente nosotros aplicamos una fuerza sobre la bandeja que desplaza al conjunto de la bandeja y el objeto que esta soporta encima. Supongamos que llevamos una botella. Las fuerzas que actúan sobre la botella, son la normal y su peso en dirección vertical. En dirección horizontal no hay ninguna fuerza aparentemente que la empuje hacia la derecha. Sin embargo, piensa por un momento qué ocurre cuando la bandeja está mojada. Es fácil ver como los objetos situados encima de una bandeja resbalan hacia atrás cuando nos movemos hacia delante y se pueden llegar a caer. Claro, cuando se moja la bandeja, el rozamiento de esta con los cuerpos que porta disminuye y por eso el cuerpo resbala. Por lo tanto la única fuerza que en este caso puede explicar el movimiento de la botella hacia la derecha es la fuerza de rozamiento con la superficie de la bandeja.

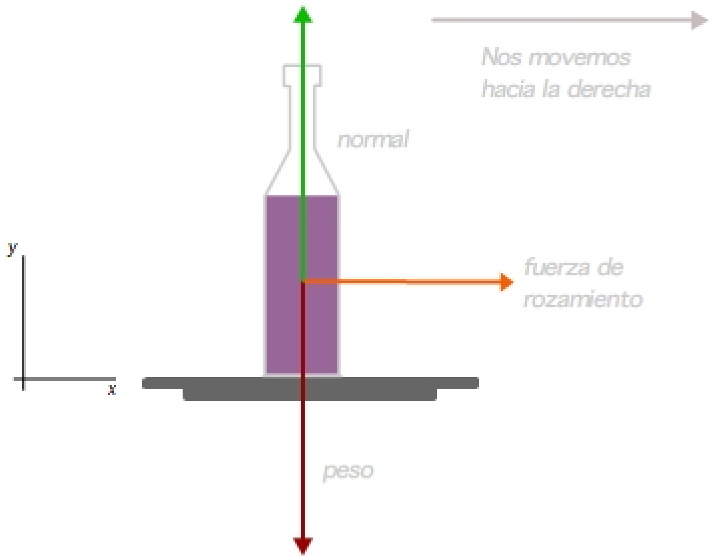


Imagen de elaboración propia

¿Qué es más correcto: decir que la fuerza de rozamiento se opone al movimiento o al deslizamiento entre superficies?

Evidentemente después de este ejemplo tenemos que concluir que la fuerza de rozamiento se opone al posible deslizamiento de un cuerpo sobre una superficie. Si la bandeja se mueve hacia la derecha, es posible que la botella deslice hacia la izquierda, por lo tanto el rozamiento apunta hacia la derecha oponiéndose a ese posible deslizamiento.

2.3 Plano horizontal con rozamiento

Imagen de elaboración propia

Ahora vas a estudiar un caso un poco más complicado del problema anterior. Vamos a estudiar el movimiento de un cuerpo sometido a una fuerza que se desliza sobre un plano horizontal con rozamiento. En principio supondremos que la fuerza aplicada es suficiente para modificar el estado de movimiento del objeto que originalmente está en reposo. De este modo podemos aplicar la fórmula para calcular la fuerza de rozamiento F_R que se opondrá al posible deslizamiento de ambas superficies.

Hacemos un esquema y dibujamos todas las fuerzas que actúan sobre nuestro cuerpo.

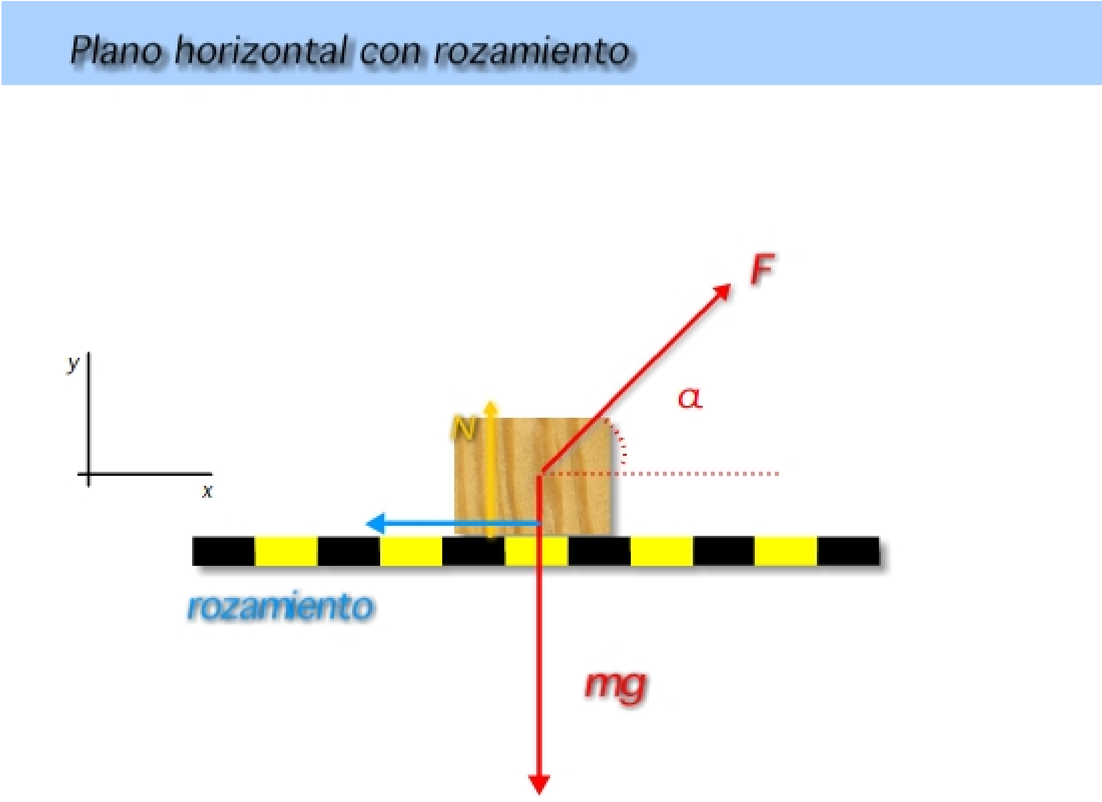


Imagen de elaboración propia

Elegimos un sistema de referencia adecuado y descomponemos las fuerzas que no sean paralelas a ninguno de ambos ejes en sus componentes cartesianas.

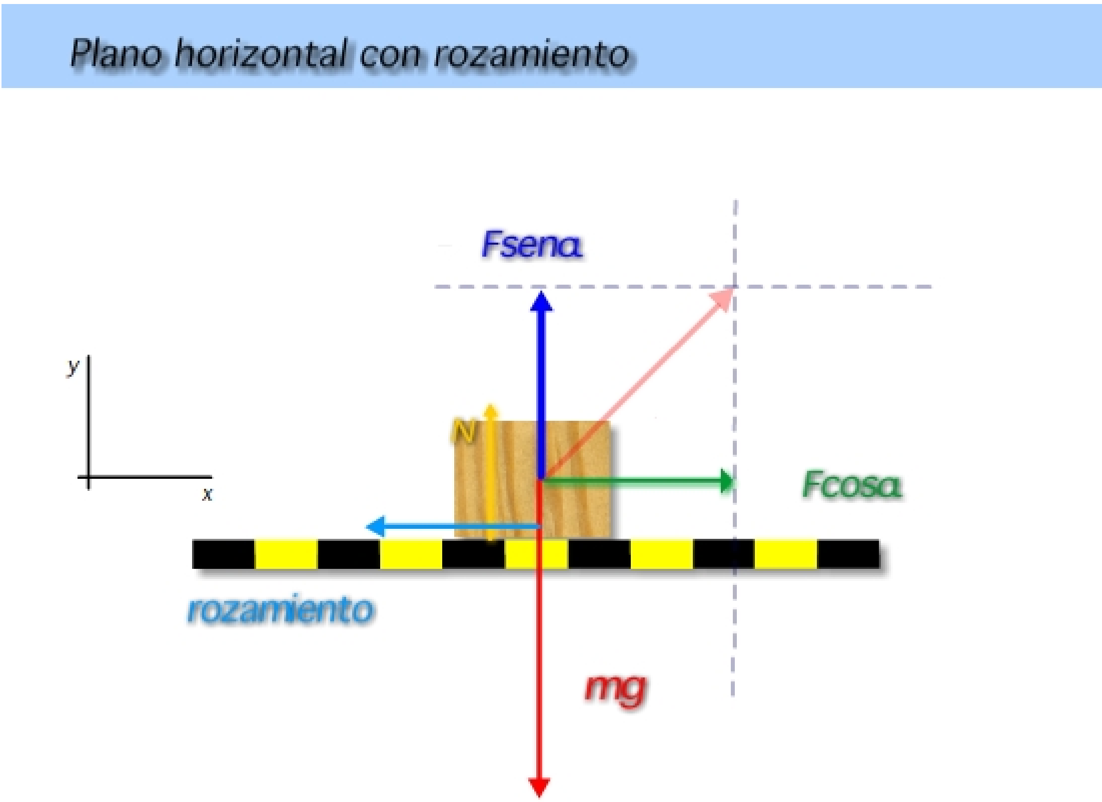


Imagen de elaboración propia

$$F_x = F \cdot \cos\alpha$$
$$F_y = F \cdot sen\alpha$$

Ahora aplicamos la 2ª ley de Newton a ambos ejes. En el vertical supondremos que no hay aceleración:

$$F \cdot \cos\alpha - F_R = m \cdot a_x$$
$$F \cdot sen\alpha + N - m \cdot g = 0$$

Teniendo en cuenta que el valor de la fuerza de rozamiento en este caso, en que suponemos que el cuerpo está deslizando, es $F_R = \mu \cdot N$, puede escribirse:

$$F \cdot \cos\alpha - \mu \cdot N = m \cdot a_x$$
$$F \cdot sen\alpha + N - m \cdot g = 0$$

Obtenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que puedes resolver fácilmente.

Importante

En los problemas con rozamiento debes recordar siempre que existen dos tipos de coeficiente de rozamiento (μ), y utilizar uno u otro en función del caso que tengas que resolver:

- Si el cuerpo no ha comenzado a moverse la fuerza de rozamiento tiene un valor desconocido y será una de las incógnitas del problema.
- Si el cuerpo está a punto de moverse o quieres calcular en qué momento comienza a hacerlo utilizarás el coeficiente de

rozamiento estático (μ_e).

- Si el cuerpo ya se encuentra en movimiento, utilizarás el coeficiente de rozamiento dinámico (μ_d).

Caso práctico

Un automóvil de 1000 kg de masa recibe la propulsión de su motor como una fuerza en dirección horizontal. Sabiendo que los coeficientes de rozamiento estático y dinámico de sus neumáticos con el asfalto en seco son μ_e= 0.8 y μ_d= 0.6 respectivamente, se pide que respondas a las siguientes cuestiones:

a) Dibuja el diagrama de fuerzas y escribe las ecuaciones correspondientes a la situación planteada.

El esquema de las fuerzas será similar a siguiente:

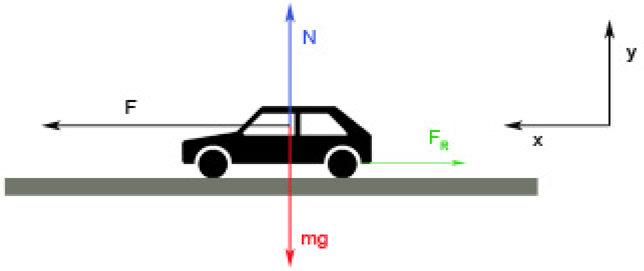


Imagen de elaboración propia

Debes observar que, por conveniencia, se han escogido los ejes coordenados como positivos en la dirección del movimiento. También cabe señalar que, en este caso, no es necesario descomponer ninguna fuerza por encontrarse todas en las direcciones de los ejes. Aplicando la 2ª ley de Newton a ambos ejes obtenemos:

- Eje x: $F - F_R = m \cdot a$
- Eje y: $N - m \cdot g = 0$

b) ¿Qué fuerza mínima deberá suministrar el motor para que el automóvil comience a moverse?

El automóvil comenzará a moverse cuando la fuerza aplicada por el motor supere la fuerza de rozamiento máxima. La fuerza de rozamiento máxima se puede calcular multiplicando el coeficiente de rozamiento estático por la Normal. Para calcular la fuerza mínima aplicada por el motor supondremos que la aceleración es cero:

- Eje x: $F - \mu_e \cdot N = m \cdot 0 = 0$
- Eje y: $N - m \cdot g = 0$

Despejando la Normal de la ecuación del eje y, obteniendo N = m·g, y sustituyendo su valor en la primera ecuación:

$$F - \mu_e \cdot m \cdot g = 0 \rightarrow F = \mu_e \cdot m \cdot g = 0.8 \cdot 1000 \cdot 9.8 = 7840 \text{ N}$$

c) ¿Cuál será la fuerza necesaria para mantener el movimiento con velocidad constante?

Si el cuerpo ya se encuentra en movimiento, la fuerza de rozamiento se calcula usando el coeficiente de rozamiento dinámico. Además, si el movimiento es con velocidad constante, su aceleración deberá ser cero y las ecuaciones serán:

- Eje x: $F - \mu_d \cdot N = m \cdot 0 = 0$
- Eje y: $N - m \cdot g = 0$

El valor de la fuerza Normal sigue siendo N = m·g, y por lo tanto:

$$F - \mu_d \cdot m \cdot g = 0 \rightarrow F = \mu_d \cdot m \cdot g = 0.6 \cdot 1000 \cdot 9.8 = 5880 \text{ N}$$

Como cabía esperar, es necesaria una fuerza menor para mantener el movimiento que para iniciarlo, debido al distinto valor de los coeficientes de rozamiento.

d) ¿Cuál será la aceleración que imprimirá al automóvil una fuerza de 10000 N?

La fuerza es mayor que la necesaria para iniciar el movimiento, por lo tanto el coeficiente de rozamiento a aplicar será μ_d. En este caso la aceleración no será nula, y las ecuaciones quedarán de la forma:

- Eje x: $F - \mu_d \cdot N = m \cdot a$
- Eje y: $N - m \cdot g = 0$

De nuevo se despeja N de la ecuación del eje y y se sustituye en la ecuación del eje x, obteniendo:

$$F - \mu_d \cdot m \cdot g = m \cdot a$$

$$10000 - 0.6 \cdot 1000 \cdot 9.8 = 1000a$$
$$10000 - 5880 = 1000a$$
$$4120 = 1000a$$
$$a = 4120 : 1000$$
$$a = 4.12\ m/s^2$$

e) De repente, el conductor observa un obstáculo en la calzada a una distancia de 250 m. Si la velocidad en ese momento es de 90 km/h y el conductor coloca la marcha en punto muerto, ¿qué fuerza de frenado mínima (F) deberá ejercerse para que el vehículo no colisione con el obstáculo?

En primer lugar, se transforman todas las unidades al Sistema Internacional (SI); en este caso 90 km/h = 25 m/s.

Ahora tenemos una fuerza de frenado extra que se opone al movimiento y la fuerza del motor ya no se aplica, con lo cual las ecuaciones dinámicas serán:

- Eje x: $-F - \mu_d \cdot N = m \cdot a$
- Eje y: $N - m \cdot g = 0 \rightarrow N = m \cdot g$

Despejando podemos obtener el valor de la fuerza aplicada por los frenos:

$$F = -m \cdot a - \mu_d \cdot m \cdot g$$

Sin embargo, nos falta conocer el valor de la aceleración. Para ello, se utilizan las ecuaciones del movimiento que estudiaste en la unidad de cinemática. En este caso, por tratarse de un MRUA, usamos las ecuaciones siguientes:

$$x = x_o + v_{ox} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$
$$v_x = v_{ox} + a \cdot t$$

Sustituyendo los datos conocidos:

$$250=0+25\cdot t+\frac{1}{2}\cdot a\cdot t^2$$

$$0=25+a\cdot t$$

De la segunda ecuación despejamos la aceleración y sustuimos en la primera:

$$-25=a\cdot t$$

$$a=\frac{-25}{t}$$

$$250=0+25\cdot t+\frac{1}{2}\cdot\frac{-25}{t}\cdot t^2$$

$$250=25\cdot t+\frac{1}{2}\cdot(-25)\cdot t$$

$$250=25\cdot t-12.5\cdot t$$

$$250=12.5\cdot t$$

$$t=\frac{250}{12.5}$$

$$t=20s$$

Sustituyendo en una expresión anterior podemos determinar la aceleración:

$$a=\frac{-25}{20}$$

Obtenemos que la aceleración vale -1.25 m/s^2 y sustituyendo en la expresión anterior:

F = -m·a - μ_d·m·g = -1000·(-1.25) - 0.6·1000·9.8 = 1250 - 5880 = -4630 N

Deberá ejercer una fuerza de frenado mínima de 4630 N, indicando el signo negativo que se realizará en el sentido contrario al movimiento, tal y como se han definido los ejes.

Reflexiona

Cuando el asfalto está mojado, el coeficiente de rozamiento disminuye drásticamente hasta valores tan bajos como $\mu_e = 0.3$ y $\mu_d = 0.25$ respectivamente. ¿Cómo variarán las fuerzas necesarias respecto a las calculadas en el apartado anterior? ¿Será esto positivo a la hora de la conducción del automóvil?

Imagen de Dash en Wikimedia Commons. CC

Al disminuir el coeficiente de rozamiento, disminuirá en igual medida la fuerza necesaria para comenzar y mantener el movimiento (en este caso, más de la mitad); también sería necesaria menos fuerza para obtener una aceleración similar.

Esto podría parecer bueno para ahorrar combustible o trabajar con motores menos potentes, pero sin embargo no es en absoluto deseable a la hora de conducir. De hecho, todo lo contrario: la disminución del rozamiento provoca falta de adherencia, que impide los cambios de dirección. No sería por tanto posible tomar las curvas a una velocidad alta, ya que al disminuir el rozamiento el coche tendería a seguir en línea recta, como verás en el tema 8. El caso extremo es el "aquaplanning", producido cuando se pierde totalmente la adherencia y el vehículo no responde al volante. Por ello se utilizan neumáticos de lluvia, que son más blandos (mayor rozamiento) y con dibujo (para evacuar el agua).

2.4 Plano inclinado

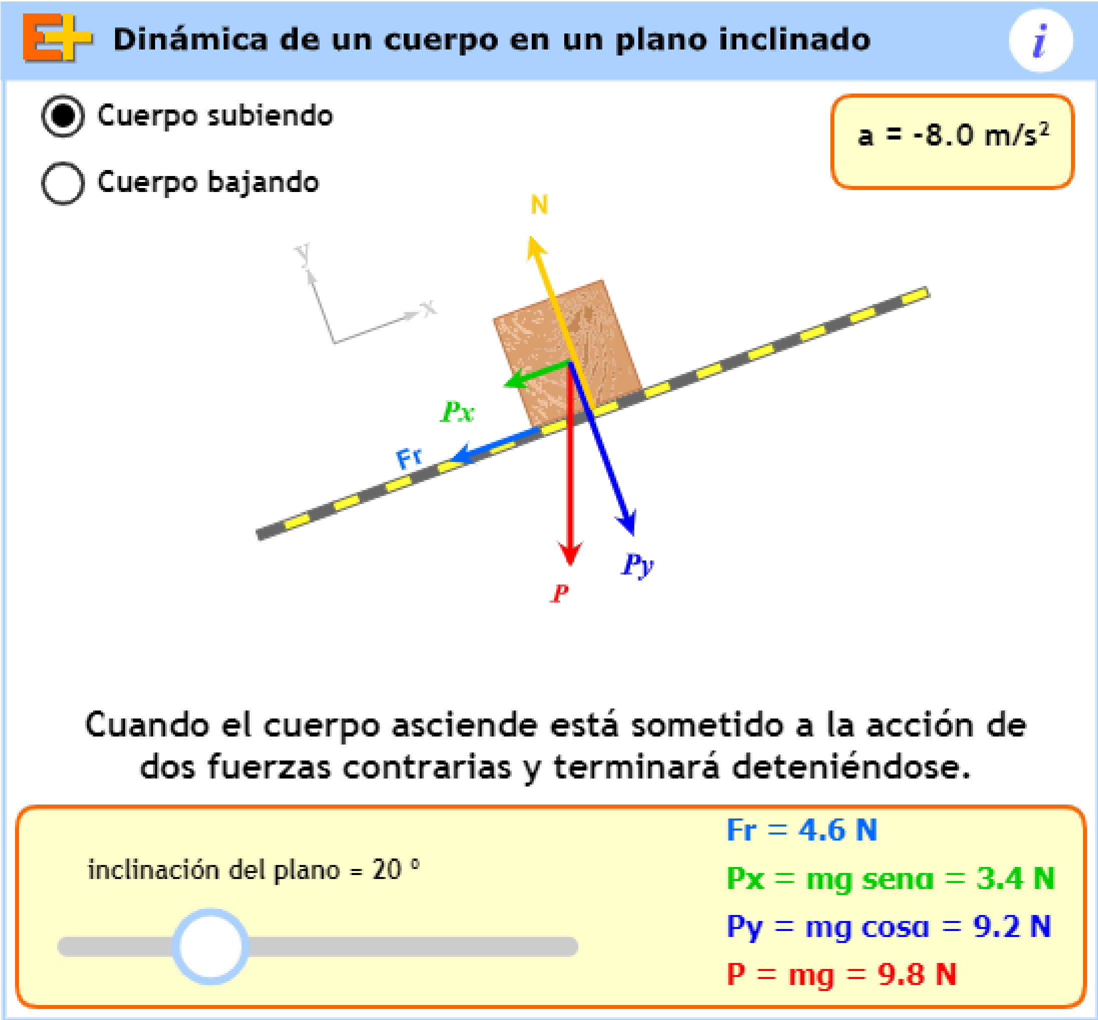
La mayor parte de los movimientos no tienen lugar en un plano horizontal, sino que presentan un cierto desnivel. Una buena aproximación para estos casos consiste en suponer que nuestro móvil se desplaza sobre un plano inclinado.

¿Tenemos fuerzas diferentes a las ya estudiadas? Pues no. Están presentes la fuerza peso (ejercida por el planeta Tierra), la fueza Normal (ejercida por el plano), la fuerza de rozamiento y en algunos casos una fuerza aplicada. Sin embargo la presencia de un plano inclinado nos fuerza a cambiar el sistema de referencia y tomar los ejes en la dirección paralela y perpendicular a dicho plano. Como consecuencia tendremos que calcular las componentes cartesianas de la fuerza peso que ya no estará alineada con ningún eje.

Reflexiona

Manipula el siguiente simulador variando el ángulo del plano inclinado y responde a las siguientes preguntas:

1. A medida que aumentamos el ángulo de inclinación del plano, ¿cómo varía la componente del peso paralela al plano?
2. A medida que aumentamos el ángulo de inclinación del plano, ¿cómo varía la componente del peso perpendicular al plano?



Simulación de Jesús Peñas en Educaplus

1. La componente paralela al plano $mgsen\alpha$ se hace mayor al ir creciendo el ángulo desde 0 hasta 90°. Cuando el ángulo es 0°, es decir, para un plano horizontal, esta componente se anula. Por contra cuando el ángulo alcanza los 90°, para un plano vertical, la componente paralela al plano coincide con el peso.
2. La componente perpendicular al plano $mgcos\alpha$ se comporta justo al contrario. Se hace menor al ir creciendo el ángulo desde 0 hasta 90°. Cuando el ángulo es 0°, es decir, para un plano horizontal, esta componente toma el valor de la fuerza peso. Por contra cuando el ángulo alcanza los 90°, para un plano vertical, la componente vertical del plano se anula.

Estudiaremos primero el caso de un cuerpo que asciende por un plano inclinado con rozamiento.

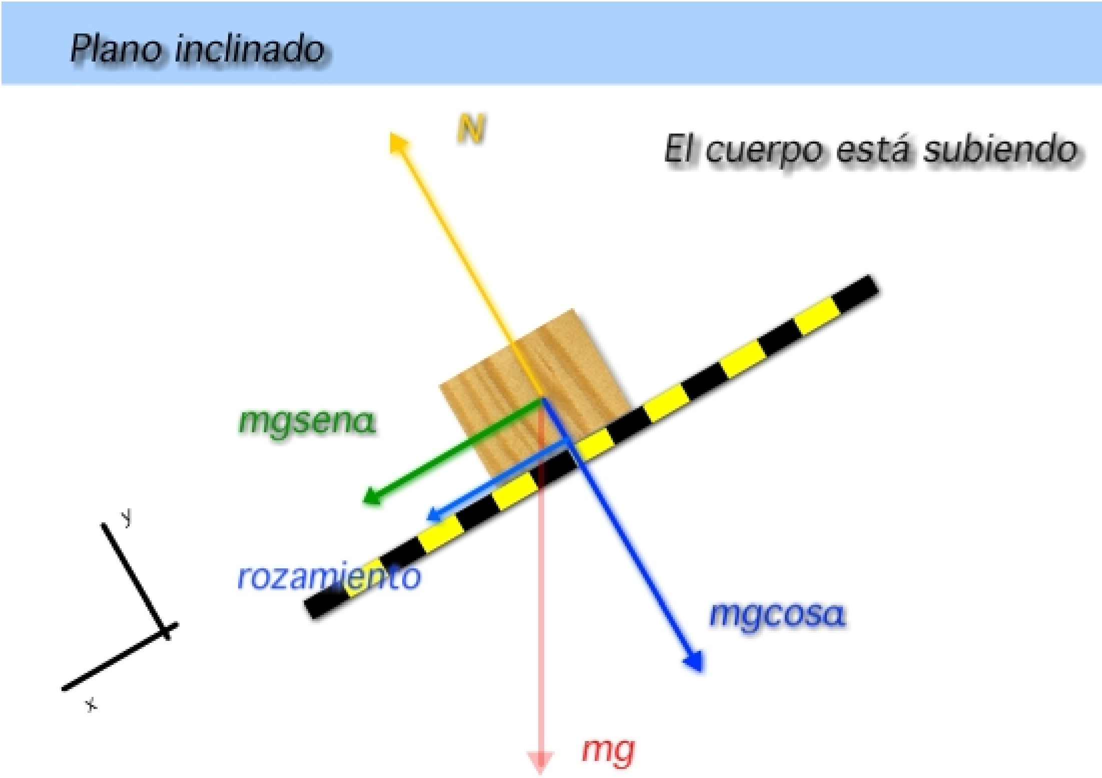


Imagen de elaboración propia

Aplicamos la segunda ley de Newton a cada eje teniendo en cuenta qué fuerzas actúan a favor y en contra:

$$-m \cdot g \cdot sen\alpha - F_R = m \cdot a_x$$
$$N - m \cdot g \cdot \cos\alpha = 0$$

Sustituyendo la fuerza de rozamiento por su valor como producto del coeficiente de rozamiento por la normal, se obtiene:

$$-m \cdot g \cdot sen\alpha - \mu \cdot N = m \cdot a_x$$
$$N = m \cdot g \cdot \cos\alpha$$

Calculando el valor de la normal con la segunda ecuación y sustituyendo en la primera ecuación podemos despajar la aceleración del cuerpo que evidentemente será negativa. Esto quiere decir que al cabo de un tiempo la velocidad se hará cero y el cuerpo se parará.

Veamos ahora qué ocurre cuando el cuerpo desciende por un plano inclinado con rozamiento.

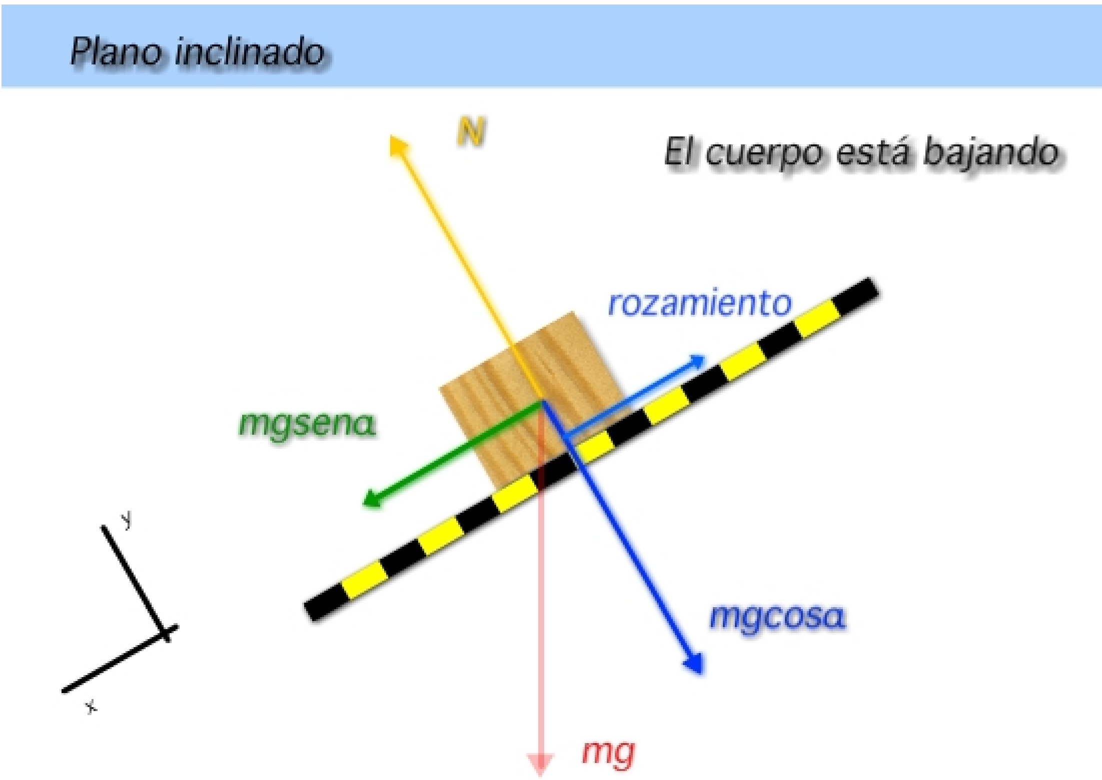


Imagen de elaboración propia

Aplicamos la segunda ley de Newton a cada eje teniendo en cuenta qué fuerzas actúan a favor y en contra:

$$m \cdot g \cdot sen\alpha - F_R = m \cdot a_x$$
$$N = m \cdot g \cdot \cos\alpha$$

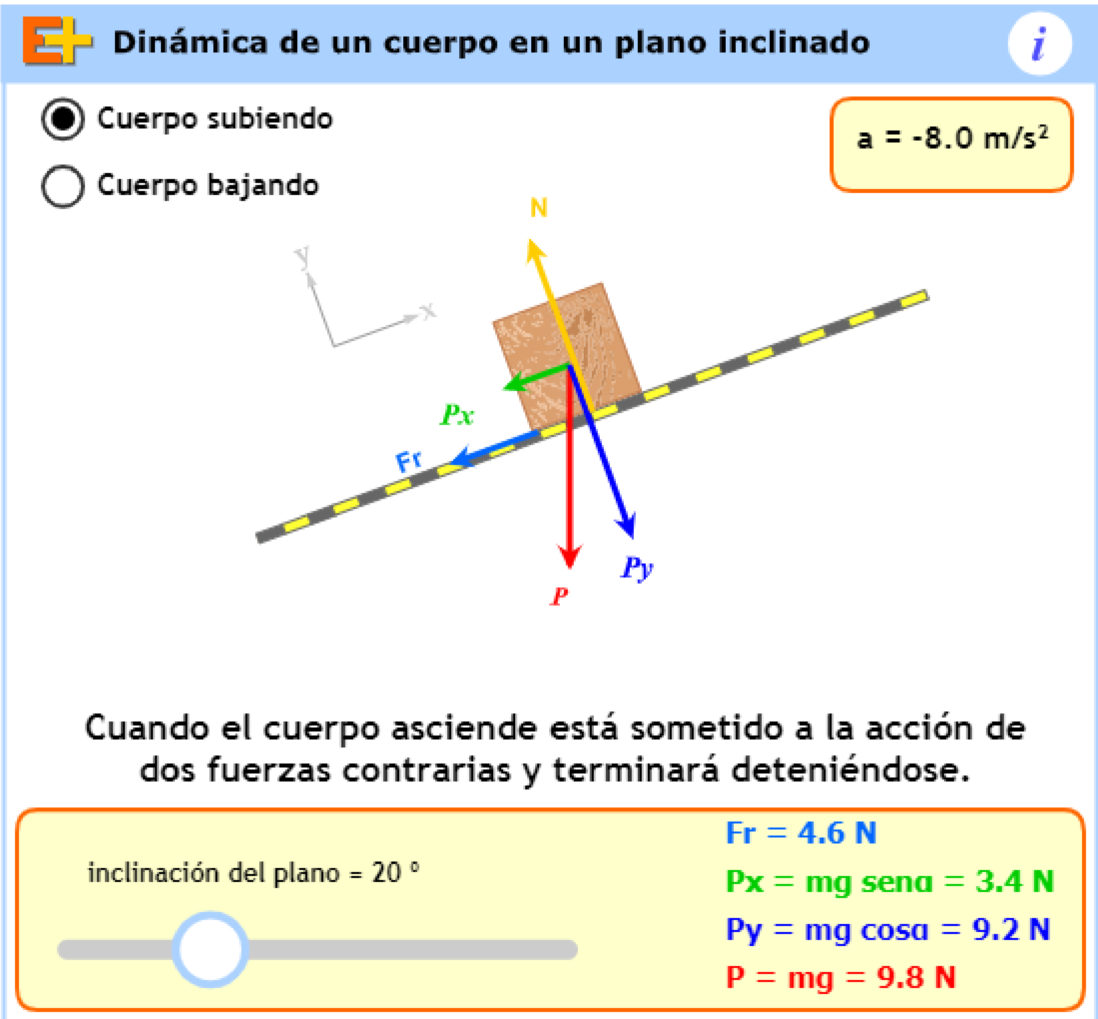
Sustituyendo la fuerza de rozamiento por su valor como producto del coeficiente de rozamiento por la normal, se obtiene un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$m \cdot g \cdot sen\alpha - \mu \cdot N = m \cdot a_x$$
$$N = m \cdot g \cdot \cos\alpha$$

Calculando el valor de la normal con la segunda ecuación y sustituyendo en la primera ecuación podemos despajar la aceleración del cuerpo. Dependiendo del ángulo de inclinación y del coeficiente de rozamiento tendremos una aceleración positiva o negativa.

Caso práctico

Vamos a analizar el caso de un cuerpo que asciende o desciende por un plano inclinado con rozamiento. Supongamos primero que el cuerpo está subiendo.



Simulación de Jesús Peñas en Educaplus

1. Fija un ángulo de 20°. En la dirección perpendicular al plano, ¿hay aceleración? ¿Qué puedes concluir gracias a este dato?

La aceleración en dirección perpendicular al plano es nula y por lo tanto las fuerzas que apuntan hacia arriba y hacia abajo son iguales. En conclusión sabemos que la Normal vale igual que la componente $mgcos\alpha$.

2. Al hacer crecer el ángulo de inclinación del plano inclinado, ¿cómo varía el valor de la Normal?

La Normal se hace más pequeña.

3. Al aumentar el ángulo de inclinación, ¿cómo varía la fuerza de rozamiento?

A medida que aumentamos el ángulo, la fuerza de rozamiento se hace menor puesto que la fuerza de rozamiento se calcula multiplicando el coeficiente de rozamiento dinámico por la normal y esta disminuye al crecer α.

4. ¿Por qué la aceleración en la dirección paralela al plano es negativa cuando el cuerpo asciende?

Porque las dos fuerzas presentes, la componente $mgsen\alpha$ y el rozamiento apuntan hacia abajo, en contra del movimiento del cuerpo.

5. Supón ahora que el cuerpo está descendiendo, ¿hacia adónde apunta ahora la fuerza de rozamiento?

Hacia arriba.

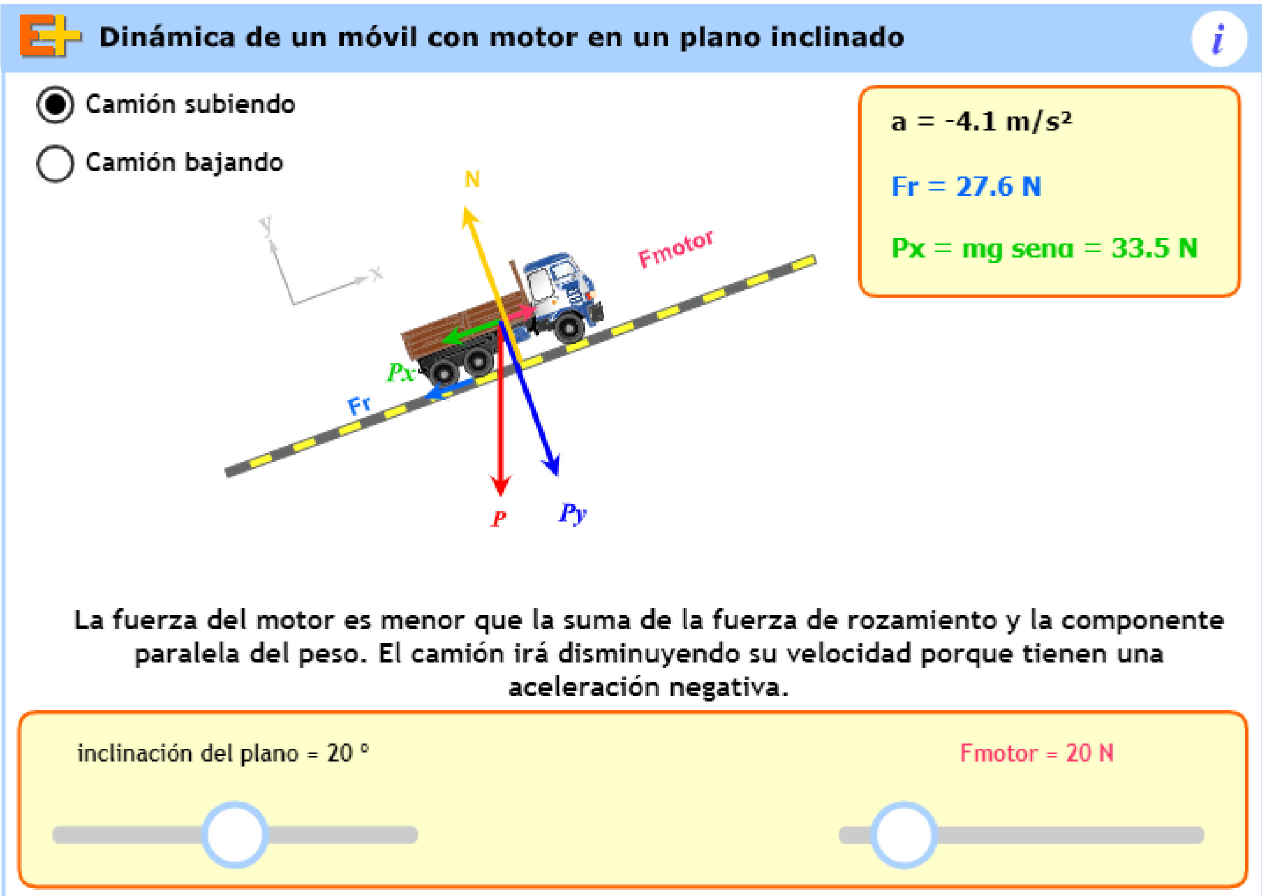
6. Modifica el ángulo de inclinación. ¿Qué ocurre con el signo de la aceleración?

Con poca inclinación la componente $mgsen\alpha$ es pequeña. Por contra la otra componente del peso es grande y por tanto el

rozamiento es grande. La fuerza a favor es menor que la fuerza en contra y en consecuencia la aceleración es negativa. El curso se va frenando hasta pararse.

Con un ángulo de inclinación alto, la componente $mgsen\alpha$ se hace mayor y la $mgcos\alpha$ por contra se hace más pequeña y con esta el rozamiento. En consecuencia la fuerza a favor es mayor que la fuerza en contra y la aceleración es positiva. El cuerpo cada vez se mueve con mayor velocidad.

Comprueba lo aprendido



Simulación de Jesús Peñas en Educaplus

Un camión se encuentra en una cuesta. El motor del camión ejerce una fuerza hacia arriba cuando este asciende.

Para una inclinación de 15°, si la fuerza del motor es ______, las fuerzas en contra del movimiento son ______ que las fuerzas a favor por lo que la aceleración es negativa . El camión irá ______ hasta pararse.

Para la misma inclinación, si la fuerza del motor es ______ , las fuerzas ___ ______ del movimiento son mayores que las fuerzas ___ ______ por lo que la aceleración es positiva . El camión irá subiendo cada vez con ___ ______ .

Para saber más

Habitualmente, en deportes como el ciclismo no se habla del ángulo de inclinación de una carretera o pista, sino que se indica en forma de porcentaje. Así, es normal escuchar cómo la parte más dura de un puerto tiene un desnivel del 12%, u observar una señal que indica pendiente prolongada del 5% durante los próximos 2 kilómetros. ¿Qué significan estos porcentajes?

Los topógrafos utilizan una fórmula que relaciona la distancia horizontal recorrida con la vertical:

% Pendiente = Distancia en vertical · 100/Distancia en horizontal

Sin embargo, no es sencillo calcular la distancia en horizontal que hemos recorrido, por lo que, dado que los ángulos en carretera no suelen ser muy grandes, puede tomarse el espacio recorrido sobre ella en lugar de la distancia en horizontal, ya que el error en estos casos es mínimo. Así, la fórmula habitual para calcular el ángulo a partir del desnivel es:

sen α = (metros ascendidos / metros recorridos) → α = arcsen (metros ascendidos / metros recorridos)

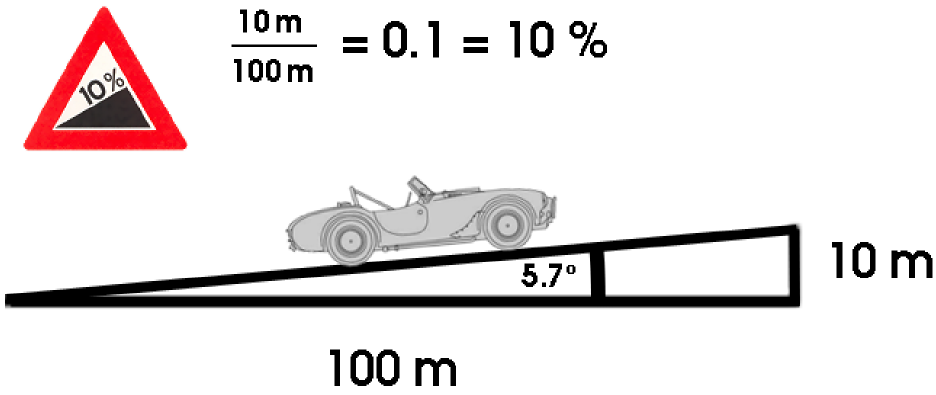


Imagen de Staycoolandbegood en Wikipedia. CC0

Caso práctico

Una motorista se encuentra ascendiendo un puerto con una pendiente constante del 5%. Si la masa total del conjunto motorista-moto es de 300 kg, responde a las siguientes cuestiones:

a) ¿Cuál es el ángulo de inclinación de la carretera respecto a la horizontal?

Según se ha visto, que la pendiente sea del 5% significa que por cada 100 metros recorridos se ascienden 5 metros. Por lo tanto se cumplirá que sen $\alpha = 5/100 = 0.05$, y entonces $\alpha = 2.87°$

b) Dibuja el esquema de fuerzas que actúan sobre el sistema.

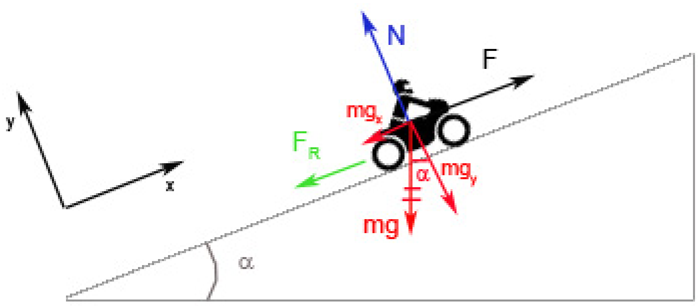


Imagen de elaboración propia

c) Calcula el valor mínimo del coeficiente de rozamiento entre las ruedas y el asfalto para que la moto, con el motor apagado y completamente frenada, no comience a deslizarse hacia abajo.

Al tratarse de un problema de plano inclinado en ausencia de fuerzas externas, se ha demostrado que el coeficiente de rozamiento mínimo para que no exista deslizamiento debe ser $\mu_{es} = \tan \alpha = \tan 2.87° = 0.05$

d) Determina la fuerza que deberá realizar el motor para subir con velocidad constante, supuesto un coeficiente de rozamiento $\mu_{di} = 0.5$

Si la moto sube con velocidad constante, esto significa que su aceleración es nula ($a_x = 0$) y por lo tanto las ecuaciones quedan:

$N - m \cdot g \cdot \cos \alpha = 0 \rightarrow N = m \cdot g \cdot \cos \alpha$

$F - m \cdot g \cdot \text{sen } \alpha - F_R = 0 \rightarrow F = m \cdot g \cdot \text{sen } \alpha + \mu_{di} \cdot N = m \cdot g \cdot \text{sen } \alpha + \mu_{di} \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha = 300 \cdot 9.8 \cdot \text{sen } 2.87° + 0.5 \cdot 300 \cdot 9.8 \cdot \cos 2.87° = 147 + 1468 = 1615 \text{ N}$

---

3. Cuerpos enlazados

Imagen de Paco Lozano en Flickr. CC

Hasta ahora se han tratado casos de sistemas dinámicos simples en los que existía un único cuerpo, pero ésta no es la situación más común que podemos encontrarnos. La mayor parte de dispositivos y máquinas que podemos observar a nuestro alrededor están formadas por distintas partes interrelacionadas entre sí, de tal forma que algún fallo o problema en cualquiera de ellas lleva asociado que el sistema en su conjunto deje de funcionar. Estos sistemas dinámicos formados por más de un cuerpo, son más complejos de estudiar que los sistemas de un único cuerpo.

Piensa en el caso de un vehículo con remolque. La fuerza de tracción del vehículo se transmite mediante el uso de un cable, cuerda o cadena. Esto ocurre porque el cuerpo que une al vehículo y al remolque se **tensa**.

Importante

Denominaremos **tensión** a la fuerza de interacción ejercida entre dos cuerpos cuando uno de ellos transmite un movimiento a otro mediante un dispositivo material. Esta tensión se representará por **T** y se trata de una fuerza de acción-reacción sobre el intermediario, normalmente una cuerda o cable.

Para simplificar el estudio, las cuerdas y cables utilizados en toda esta sección serán "ideales", es decir no tendrán masa y serán inextensibles y capaces de soportar cualquier tensión.

Importante

Los cuerpos que están enlazados se mueven con la misma velocidad y aceleración, coincidiendo por tanto el espacio recorrido por cada uno de ellos. Además las tensiones en los extremos de la cuerda son iguales y de sentido contrario.

Para simplificar el estudio, las cuerdas y cables utilizados en toda esta sección serán "ideales" con las siguientes características:

- No tendrán masa (luego no habrá fuerza peso)
- Serán inextensibles (y por lo tanto no almacenarán energía elástica en su interior y las distancias serán constantes)
- No se romperán (capaces por tanto de soportar cualquier tensión)

Evidentemente, esto no es así en la vida real, pero supone una simplificación aceptable en cuanto permite el estudio de los cuerpos enlazados con unas ecuaciones mucho más sencillas, ya que con estas condiciones podemos afirmar que las tensiones son iguales en los extremos.

Veamos la razón:

Imagen de elaboración propia

La ecuación correspondiente a la cuerda es T - T' = m·a, pero dado que la cuerda no tiene masa (m = 0), entonces T = T' y por tanto las tensiones son exactamente iguales.
En resumen, podemos afirmar:

Importante

Los cuerpos que están enlazados se mueven con la misma velocidad y aceleración, coincidiendo por tanto el espacio recorrido por cada uno de ellos. Además las tensiones en los extremos de la cuerda son iguales y de sentido contrario.

3.1 Plano horizontal

El ejemplo más sencillo de cuerpos enlazados es el conjunto vehículo-remolque. Esta situación se presenta en situaciones como en un tren, entre la locomotora y los vagones que arrastra, o en un coche que remolca una caravana.

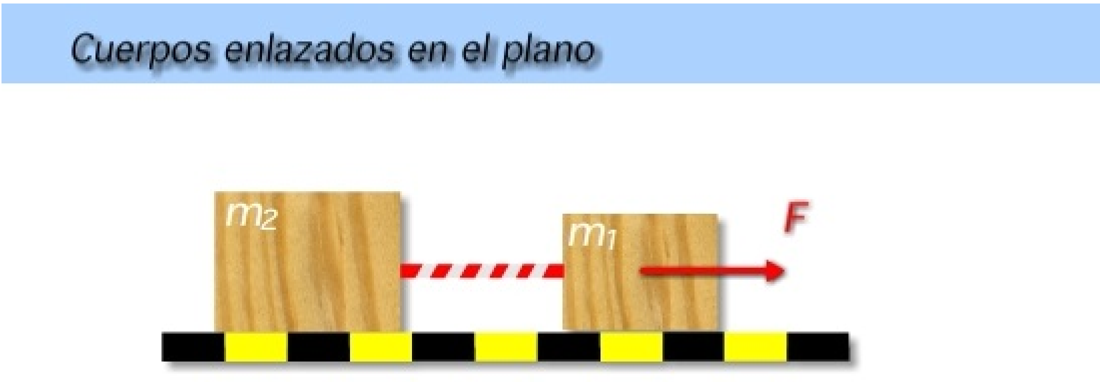


Imagen de elaboración propia

Importante

A la hora de resolver un problema de aplicación de las leyes de la dinámica en un sistema de cuerpos enlazados, es importante que sigas ordenadamente las siguientes pautas:

1. Identifica los distintos cuerpos que intervienen en el problema (recuerda que, en lo que a este tema se refiere, las cuerdas no son cuerpos como tales, sino simplemente el medio transmisor de la fuerza de Tensión)
2. Identifica las fuerzas que se ejercen sobre cada cuerpo, así como su origen, tipo y dirección. Ten en cuenta que la Tensión es una fuerza de acción y reacción aplicada en ambos extremos de la cuerda con sentido contrario en cada cuerpo.
3. Dibuja un diagrama de fuerzas lo más simple posible, pero que contenga toda la información que se haya suministrado. El punto

de aplicación de todas las fuerzas será el centro geométrico del cuerpo sobre el que actúan.

4. Escoge un sistema de referencia cartesiano de forma que uno de los ejes coincida con la dirección esperada de movimiento del conjunto. Este sistema de referencia debe ser el mismo para todos los cuerpos intervinientes.
5. Descompón todas las fuerzas en sus componentes según los ejes del sistema de referencia.
6. Aplica la segunda ley de Newton para cada uno de los cuerpos por separado y en cada uno de los ejes.

¿Qué cambia respecto al tratamiento que hemos dado al problema de un cuerpo sobre una superficie horizontal? Pues evidentemente ahora tenemos dos cuerpos por lo que tendremos que aplicar la 2ª ley de Newton a ambos cuerpos y además tenemos una fuerza nueva, la Tensión de la cuerda, que actúa sobre ambos cuerpos. De hecho la cuerda tira hacia atrás del cuerpo 1 en reacción a la fuerza hacia delante que ejerce este sobre la cuerda, y esta fuerza se transmite íntegramente (por eso decimos que la cuerda se comporta de forma ideal) al segundo cuerpo.

Si dibujamos todas las fuerzas el diagrama quedaría como muestra la siguiente imagen:

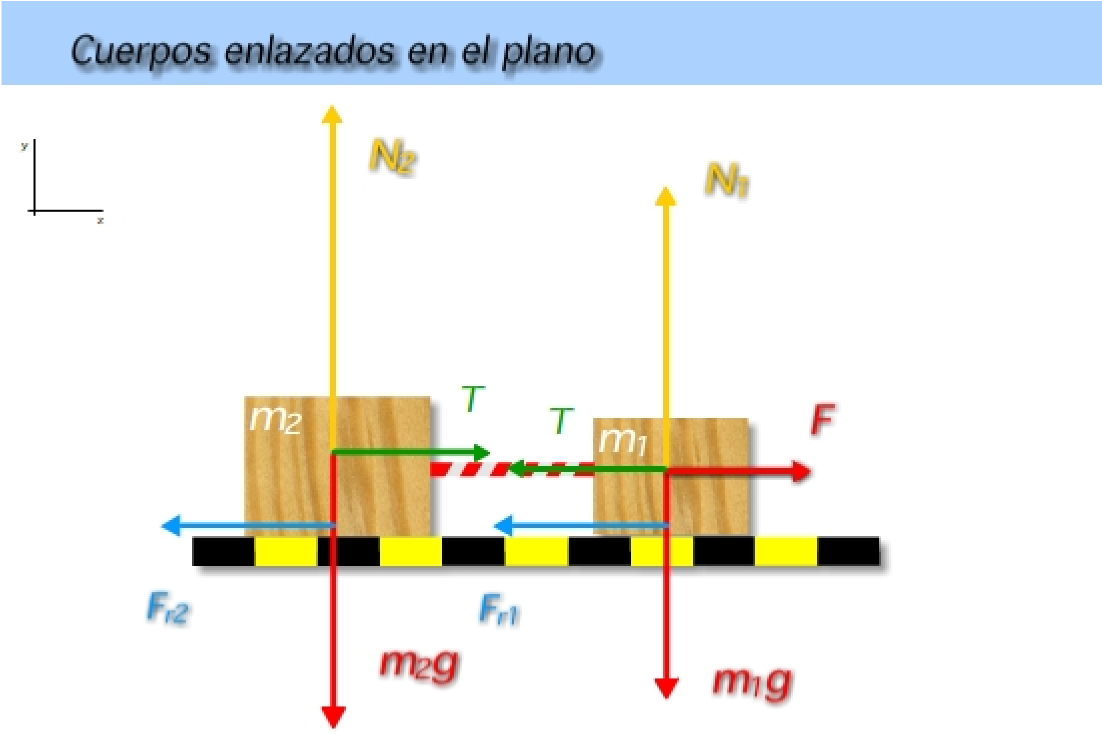


Imagen de elaboración propia

En este caso todas las fuerzas son horizontales o verticales por lo que tomando como sistema de referencia los ejes en dirección paralela y perpendicular al plano, no necesitamos descomponer ninguna de las fuerzas presentes. Ahora tenemos hacer un balance de las fuerzas a favor y en contra en cada cuerpo y en cada eje. Supondremos si hay desplazamiento este ocurrirá en la dirección paralela al plano por lo que la aceleración vertical es cero. Según esto, se pueden escribir las ecuaciones dinámicas de cada uno de los cuerpos:

Cuerpo 1:

$$F - T - F_{r1} = m_1 \cdot a_1$$
$$N_1 - m_1 \cdot g = 0$$

Cuerpo 2:

$$T - F_{r2} = m_2 \cdot a_2$$
$$N_2 - m_2 \cdot g = 0$$

Suponiendo que el conjunto de ambos cuerpos se mueve, sabemos que existe una relación entre la fuerza normal y la fuerza de rozamiento:

$$F_{r1} = \mu \cdot N_1$$
$$F_{r2} = \mu \cdot N_2$$

Si sustituimos en las ecuaciones anteriores obtendremos:

Cuerpo 1:

$$F - T - \mu \cdot N_1 = m_1 \cdot a_1$$
$$N_1 - m_1 \cdot g = 0$$

Cuerpo 2:

$$T - \mu \cdot N_2 = m_2 \cdot a_2$$
$$N_2 - m_2 \cdot g = 0$$

Normalmente la fuerza F será un dato del problema y tendremos que determinar la aceleración de ambos cuerpos. Si te fijas tenemos 4 ecuaciones y 5 incógnitas (T, N_1, N_2, a_1, a_2). ¿Imposible de resolver? No, suponemos que ambos cuerpos, al estar unidos por la cuerda, se desplazan de forma solidaria y por lo tanto tenemos una única aceleración. De la segunda y la cuarta ecuación podemos despejar el valor de las normales N_1 y N_2 y sustituir en las ecuaciones 1 y 3.

Cuerpo 1:

$$N_1 = m_1 \cdot g$$
$$F - T - \mu \cdot m_1 \cdot g = m_1 \cdot a$$

Cuerpo 2:

$$N_2 = m_2 \cdot g$$
$$T - \mu \cdot m_2 \cdot g = m_2 \cdot a$$

Si te fijas ahora tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, la tensión (T) y la aceleración (a).

$$F - T - \mu \cdot m_1 \cdot g = m_1 \cdot a$$
$$T - \mu \cdot m_2 \cdot g = m_2 \cdot a$$

Despejando la tensión de una...

$T = m_2 \cdot a + \mu \cdot m_2 \cdot g$

y sustituyendo en la otra podríamos despejar la aceleración y conocida esta podríamos determinar el valor de todas las demás fuerzas desconocidas.

$$F - m_2 \cdot a - \mu \cdot m_2 \cdot g - \mu \cdot m_1 \cdot g = m_1 \cdot a$$

$$F - \mu \cdot m_2 \cdot g - \mu \cdot m_1 \cdot g = m_1 \cdot a + m_2 \cdot a = (m_1 + m_2) \cdot a$$

$$F - \mu \cdot (m_1 + m_2) \cdot g = (m_1 + m_2) \cdot a$$

$$a = \frac{F - \mu \cdot (m_1 + m_2) \cdot g}{(m_1 + m_2)}$$

Ten en cuenta de que en los problemas que tengas que resolver, normalmente, sustituirás los valores de cada dato y no tendrás que manejar expresiones tan complejas. Lo importante es que entiendas el procedimiento general que esencialmente consiste en dibujar las fuerzas a los dos cuerpos, aplicar la 2ª ley de Newton a ambos y resolver el problema matemático que no es nada complejo.

Caso práctico

Un camión ligero de masa 10000 kg arrastra un remolque cargado cuya masa total es de 5000 kg. El motor del camión ejerce una fuerza de 80000 N. Si el coeficiente de rozamiento dinámico entre el suelo y los neumáticos es μ_d = 0.4:

a) Dibuja el diagrama de fuerzas correspondiente y escribe las ecuaciones dinámicas.

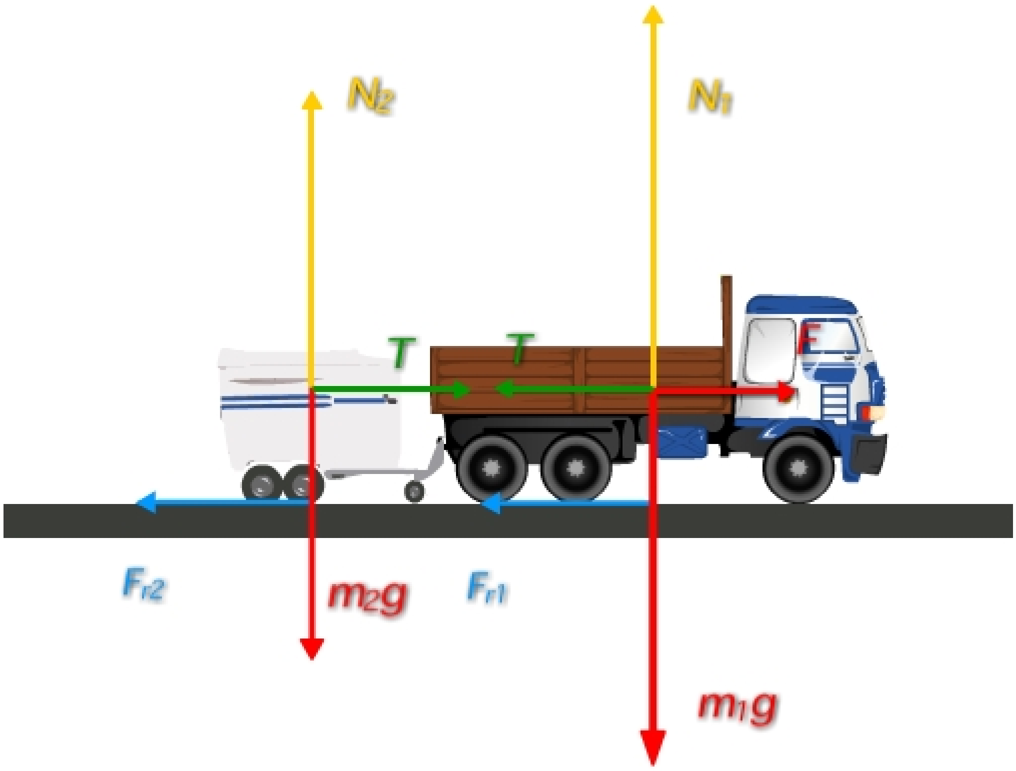


Imagen de elaboración propia

Las ecuaciones dinámicas correspondientes serán:

- Para el camión:

$$F - F_{r1} - T = m_1 \cdot a$$
$$N_1 = m_1 \cdot g$$

- Para el remolque:

$$T - F_{r2} = m_2 \cdot a$$
$$N_2 = m_2 \cdot g$$

b) Calcula la aceleración con que se mueve el conjunto.

Tenemos que resolver las ecuaciones dinámicas de nuestro caso de estudio. Como se mueven, existe una relación entre las fuerzas de rozamiento y las fuerzas normales:

$$F_{r1} = \mu . N_1$$

F_{r2}=μ. N_2

Sustituyendo en las ecuaciones anteriores, el valor de las fuerzas de rozamiento, obtenemos:

- Para el camión:

F - μ. N_1 -T = m_1·a
N_1 = m_1·g

- Para el remolque:

T - μ. N_2 = m_2·a
N_2 = m_2·g

Despejando las normales y sustituyendo su valor en las ecuaciones 1 y 3 obtenemos:

F - μ. m_1·g -T = m_1·a

T - μ. m_2·g = m_2·a

Sustituyamos los valores que nos da el problema:

F=80000 N
m_1=10000 kg
m_2=5000 kg
μ=0.4
g=10 m/s^2

en las ecuaciones

80000 - 0.4. 10000·10 -T = 10000·a → 80000 - 40000 -T = 10000·a → 40000 -T = 10000·a → T = 40000 - 10000·a

T - 0.4. 5000·10 = 5000·a → T - 20000 = 5000·a

Una vez que se despeja la tensión de la primera ecuación, sustituyéndola en la segunda:

$$40000 - 10000 \cdot a - 20000 = 5000 \cdot a$$

$$20000 = 5000 \cdot a + 10000 \cdot a$$

$$20000 = 15000 \cdot a$$

$$a = 20000 : 15000$$

$$a = 1.33 \ m/s^2$$

c) ¿Cuál es la tensión que soporta el enganche entre el camión y el remolque?

Para calcular la Tensión basta con sustituir los valores en la primera ecuación despejada anteriormente:

$$T = 40000 - 10000 \cdot a = T = 40000 - 10000 \cdot 1.33 = 26700 \ N$$

Reflexiona

El conjunto camión y remolque del ejercicio anterior circula sobre una placa de hielo que provoca la desaparición de las fuerzas de rozamiento. Si la fuerza realizada por el motor sigue siendo la misma, ¿qué aceleración alcanzará el conjunto? ¿Cuál será la tensión del enganche en esta situación?

En este caso sigue siendo válido el diagrama del problema resuelto anteriormente, con la única diferencia que ahora no existen fuerzas de rozamiento.

Las ecuaciones dinámicas correspondientes serán:

- Para el camión: $F - T = m_1 \cdot a$ ($N = m_1 \cdot g$ en el eje y)
- Para el remolque: $T = m_2 \cdot a$ ($N_2 = m_2 \cdot g$ en el eje y)

Sustituyendo de nuevo la ecuación del remolque en la del camión obtenemos:

$$F - m_2 \cdot a = m_1 \cdot a$$

$$a \cdot (m_1 + m_2) = F$$

$$a = F / (m_1 + m_2)$$

y por lo tanto la aceleración resulta ser:

$$a = 80000 / (10000 + 5000) = 80000/15000 = 5.3 \text{ m/s}^2$$

La tensión se obtiene automáticamente sustituyendo en

$$T = m_2 \cdot a = 5000 \cdot 5.3 = 26650 \text{ N}$$

Puede observarse que es la misma que en el caso con rozamiento, ya que en el caso de cuerpos enlazados en movimiento horizontal la tensión de la cuerda es independiente del rozamiento existente.

3.2 Movimiento vertical

Dentro del conjunto de sistemas dinámicos formados por cuerpos enlazados, otro caso de particular interés es el de la polea, que nos permite elevar un cuerpo más cómodamente al poder aplicar la fuerza hacia abajo.

La polea más sencilla es la polea simple, que transmite directamente la fuerza realizada sobre la cuerda hasta el cuerpo, tal y como se indica en la imagen.

De nuevo la cuerda no tiene masa, es inextensible y no existe rozamiento de ningún tipo entre la polea y la cuerda.

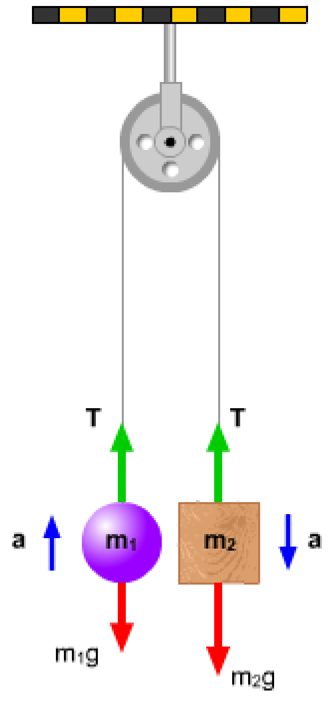
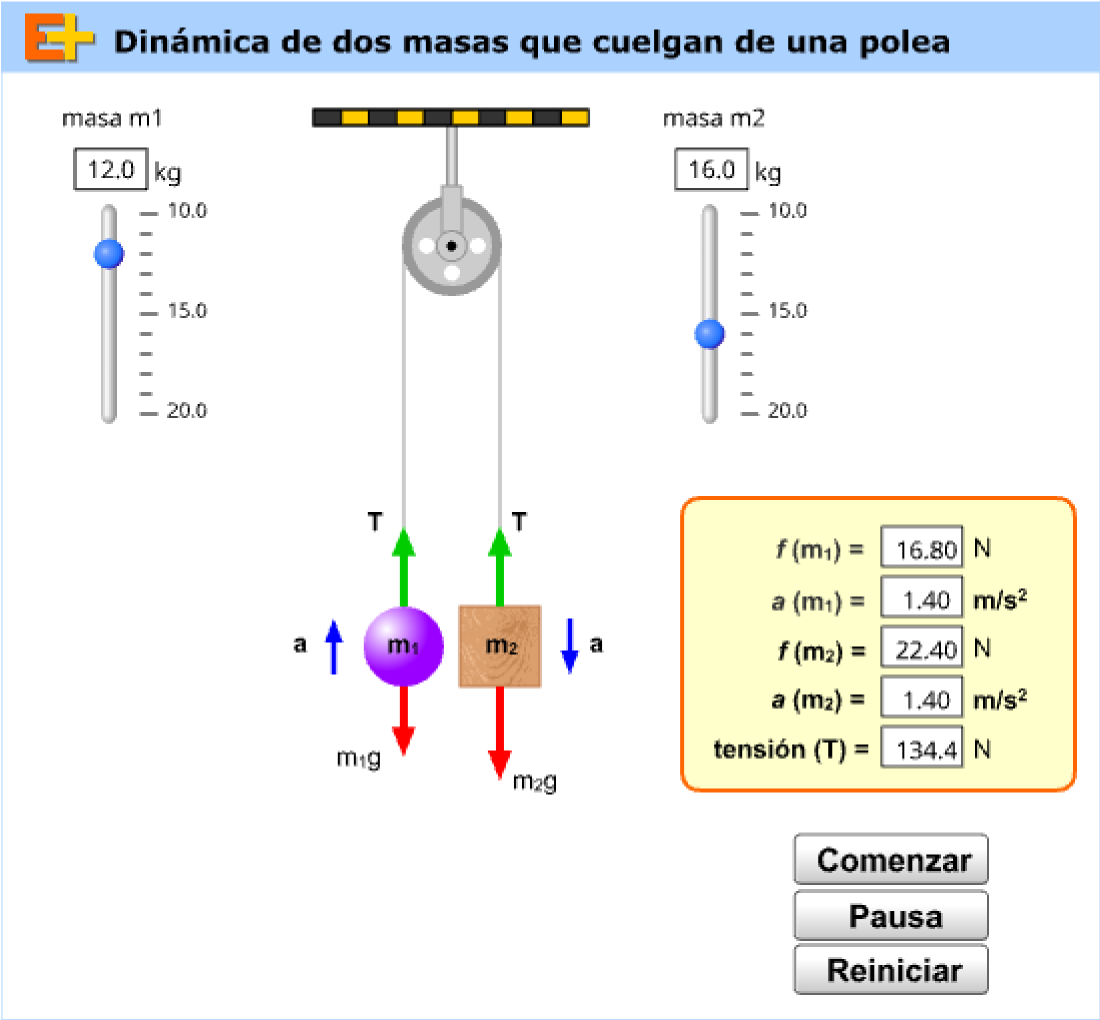


Imagen de elaboración propia

Caso práctico

Vamos a experimentar un poco con el siguiente simulador.



Simulación de Jesús Peñas en Educaplus

Fija la masa del primer cuerpo en 15 kg y varía la masa del segundo. ¿Cómo varía la tensión?

La tensión es tanto mayor cuanta mayor es la masa del segundo cuerpo.

¿Hacia adónde se mueve el sistema?

El sistema se acelera hacia el cuerpo 1 mientras la masa del segundo es menor que la de este. Cuando la masa del segundo cuerpo supera la del primero, el sistema se acelera en sentido contrario.

¿Qué ocurre cuando las dos masas son iguales?

Las fuerzas peso son iguales e iguales a la tensión por lo que el sistema permanecerá en reposo.

Caso práctico

La máquina de Atwood es una máquina simple de primera especie cuyo esquema se indica en la figura. Las masas que cuelgan de la máquina miden 20 y 10 kg respectivamente.

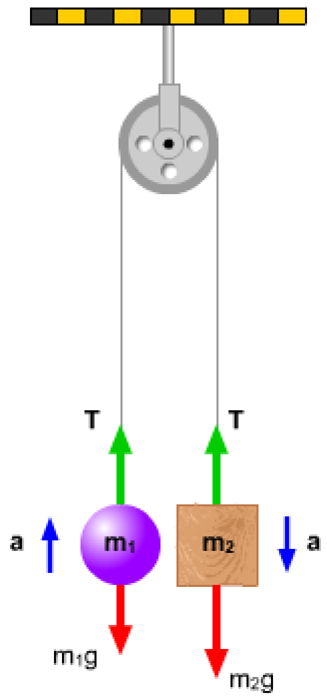


Imagen de elaboración propia

a) Escribe las ecuaciones del movimiento del sistema.

En este tipo de problemas la primera decisión no es tanto escoger el sistema de referencia (básicamente es un problema unidimensional), sino elegir un sentido de giro de la polea, determinado por el sentido de movimiento de la masa mayor. En este caso gira en el sentido de las agujas del reloj, de forma que el sentido del movimiento será el de la fuerza $m_2 \cdot g$. Las ecuaciones serán:

Cuerpo 1: $T - m_1 \cdot g = m_1 \cdot a$

Cuerpo 2: $m_2 \cdot g - T = m_2 \cdot a$

b) ¿Cuál será el valor de la aceleración?

Sustituyendo los datos del problema obtenemos:

Cuerpo 1: $T - 10 \cdot 10 = 10 \cdot a \rightarrow T - 100 = 10 \cdot a$

Cuerpo 2: $20 \cdot 10 - T = 20 \cdot a \rightarrow 200 - T = 20 \cdot a$

Sumando ambas ecuaciones, desapare la tensión y obtenemos el valor de la aceleración:

$$T - 100 + 200 - T = 20 \cdot a + 10 \cdot a$$
$$100 = 30 \cdot a$$
$$a = \frac{100}{30}$$

$$a = 3{,}33 m/s^2$$

c) ¿Cuánto vale la tensión de la cuerda?

Basta con sustituir el valor de la aceleración en cualquiera de las dos ecuaciones:

$T - 100 = 10 \cdot 3.33$

$T - 100 = 33.3$

$T = 133.3 N$

Comprueba lo aprendido

Tenemos una máquina de Atwood en la que las masas de los cuerpos son, respectivamente, $m_1 = 2$ kg y $m_2 = 8$ kg.

¿Qué aceleración experimentará el sistema al dejarlo en libertad?

- 10.25 m/s^2
- 11.76 m/s^2
- 5.88 m/s^2

¡Incorrecto!

¡Incorrecto!

¡Correcto! Aplicando la fórmula calculada anteriormente: $a = (M - m) \cdot g/(M + m) = (8 - 2) \cdot 9.8/(8 + 2) = 6 \cdot 9.8/10 = 5.88$ m/s^2

Solución

1. Incorrecto
2. Incorrecto
3. Opción correcta

¿Cuál será la tensión de la cuerda?

Sugerencia

- ○ 28.56 N
- ○ 31.36 N
- ○ 20.45 N

¡Incorrecto!

¡Correcto! Sustituyendo tenemos T = m·(g + a) = 2·(9.8 + 5.88) = 31.36 N

¡Incorrecto!

Solución

1. Incorrecto
2. Incorrecto
3. Opción correcta

3.3 Plano inclinado

Una vez vistos los ejemplos generales de cuerpos enlazados en una dimensión, es momento de ver el caso más complejo que trataremos en esta unidad: dos cuerpos enlazados en un plano inclinado. Este problema no exige ningún conocimiento especial distinto de los que ya se han estudiado, únicamente presenta una mayor dificultad en el sentido de que algunas fuerzas no actúan en las direcciones de los ejes elegidos, y exige aplicar lo aprendido tanto en el estudio de los planos inclinados como en el de la dinámica de cuerpos enlazados. Por ello resulta un buen candidato para finalizar el tema y servir de repaso de lo anterior.

Para facilitar su estudio y poder practicar, nos serviremos de una animación, de funcionamiento muy sencillo. Te invito a que interactúes con ella. Cambiando los parámetros (ángulos y masas) podrás ver cómo se mueve el sistema en cada caso (una flecha encima de la polea te dará el sentido del movimiento) y además, obtener los valores de cada una de las fuerzas.

https://www.geogebra.org/material/iframe/id/vcKgKkaf/width/700/height/700/border/888888/s

Animación de Enrique García de Bu

Para resolver analíticamente el caso que ves, basta con considerar el estudio del sistema en dos planos inclinados, teniendo en cuenta que la tensión y la aceleración serán las mismas para cada uno de los cuerpos.

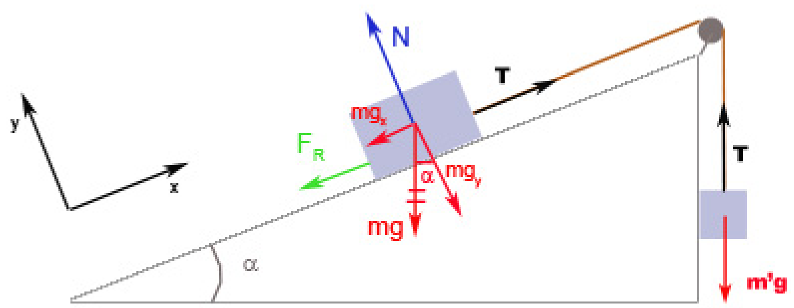


Imagen de elaboración propia

Pero vas a resolver un caso algo más simple, en el que una de las paredes es perpendicular al suelo. El esquema de fuerzas será similar al que puedes observar al lado de estas líneas.

En esta ocasión los ángulos serán $\alpha = 30°$, $\beta = 90°$.

En primer lugar se escriben las ecuaciones correspondientes a cada uno de los cuerpos; para el cuerpo situado en el plano inclinado, éstas serán las generales del plano inclinado que ya se calcularon sin más que sustituir F por la tensión T, resultando:

$$T - m \cdot g \cdot sen\alpha - \mu \cdot N = m \cdot a$$
$$N = m \cdot g \cdot cos\alpha$$

Para el segundo cuerpo, las ecuaciones son mucho más simples por tratarse de un sistema en una única dirección. Lo único que debe tenerse en cuenta es que, como se ha tomado como sentido positivo en el primer cuerpo el de la tensión, en el segundo cuerpo el sentido positivo será aquel en el que la aceleración es hacia abajo, ya que según hemos visto deberán ser iguales. Por todo ello las ecuaciones quedarán:

$$m' \cdot g - T = m' \cdot a$$

en la hay que destacar que tanto la tensión (T) como la aceleración (a) son iguales para ambos cuerpos.

Caso práctico

En el problema descrito anteriormente ($\alpha = 30°$, $\beta = 90°$) las masas de los cuerpos son m = 8 kg y m' = 5 kg. Si los coeficientes de rozamiento son $\mu_{es} = 0.5$ y $\mu_{di} = 0.2$,

a) ¿El sistema se moverá o permanecerá en reposo? ¿Cuál será el valor de la tensión de la cuerda(T)? Comprueba los resultados con el simulador.

En primer lugar, debes encontrar el valor límite en el que el sistema comienza a moverse, lo cual ocurre cuando a = 0. En ese momento, puedes obtener el valor de la tensión a partir de las ecuaciones del segundo cuerpo: $T = m' \cdot g = 5 \cdot 9.8 = 49$ N.

El cuerpo no se moverá siempre que la fuerza de rozamiento máxima sea mayor que el resto de fuerzas en su mismo eje; en este caso, cuando se cumpla. $F_R > T - m \cdot g \cdot \text{sen}\ \alpha \rightarrow \mu_{es} \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha > T - m \cdot g \cdot \text{sen}\ \alpha \rightarrow 0.5 \cdot 8 \cdot 9.8 \cdot \cos 30° > 49 - 8 \cdot 9.8 \cdot \text{sen}\ 30° \rightarrow 33.95 \text{ N} > 9.8 \text{ N}$.

Así pues, la fuerza de rozamiento es mayor y el sistema no presentará movimiento. Introduciendo los datos en el simulador obtenemos la siguiente pantalla, que confirma los resultados indicando que el sistema está en equilibrio.

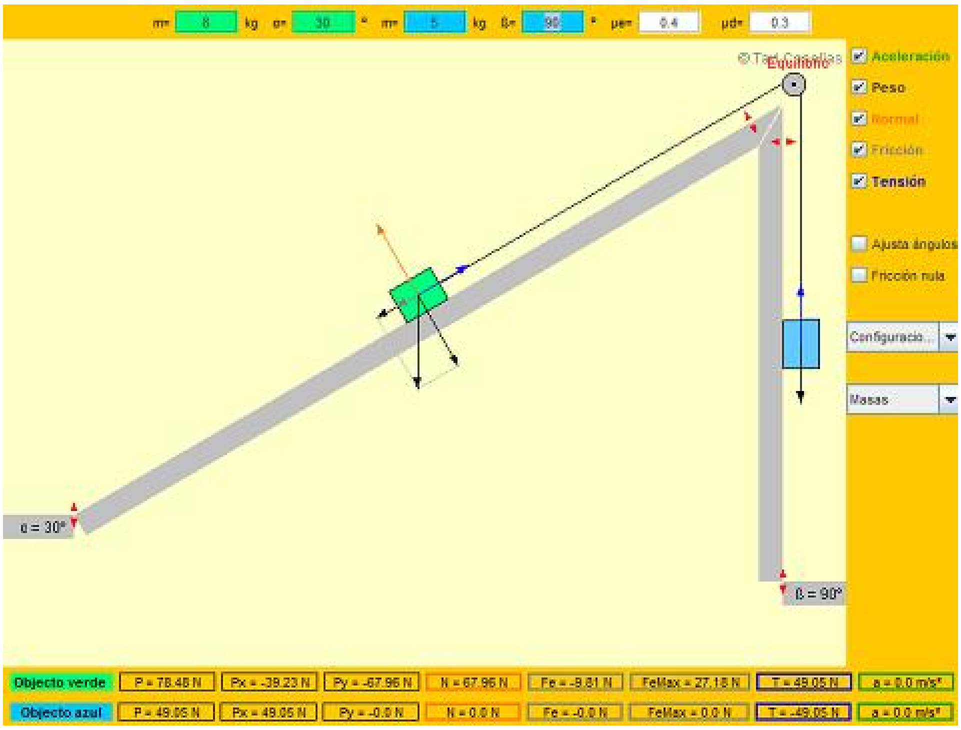


Imagen 24 de elaboración propia a partir de FisLab

b) Si se duplica la masa que cuelga (ahora m' = 10 kg), ¿se moverá el sistema? En caso afirmativo, ¿cuál será ahora la tensión de la cuerda? ¿Con qué aceleración se moverá? Comprueba los resultados con el simulador.

De nuevo, para comprobar si existe movimiento, se calcula el valor límite en el que el sistema comienza a moverse, lo cual ocurre cuando a = 0. Entonces la tensión tomaría un valor, a partir de las ecuaciones del segundo cuerpo, de: T = m'·g = 10·9.8 = 98 N.

El cuerpo no se moverá siempre que la fuerza de rozamiento máxima sea mayor que el resto de fuerzas en su mismo eje, en este caso, cuando se cumpla. F_R > T - m·g·sen α → μ_{es}·m·g·cos α > T - m·g·sen α → 0.5·8·9.8·cos 30° > 98 - 8·9.8·sen 30° → 33.95 N > 58.8 N, lo cual evidentemente es falso y el sistema se moverá.

Se deberá por tanto utilizar el conjunto de ecuaciones, que resulta ser un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, la tensión y la aceleración, teniendo en cuenta que el coeficiente de rozamiento será ahora el dinámico por existir movimiento.

$T - m \cdot g \cdot \text{sen}\ \alpha - \mu_{di} \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha = m \cdot a$

$m' \cdot g - T = m' \cdot a$

Sustituyendo en la primera ecuación T por su valor en la segunda $T = m' \cdot g - m' \cdot a$, obtenemos:

$m' \cdot g - m' \cdot a - m \cdot g \cdot \text{sen}\ \alpha - \mu_{di} \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha = m \cdot a \rightarrow a = (m' \cdot g - m \cdot g \cdot \text{sen}\ \alpha - \mu_{di} \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha) / (m + m') \rightarrow$
$\rightarrow a = (10 \cdot 9.8 - 8 \cdot 9.8 \cdot \text{sen}\ 30° - 0.2 \cdot 8 \cdot 9.8 \cdot \cos 30°) / (8 + 10) \rightarrow a = 45.22/18 \rightarrow a = 2.51\ m/s^2$

Para calcular la tensión utilizamos la expresión anterior:

$T = m' \cdot g - m' \cdot a = 10 \cdot 9.8 + 10 \cdot 2.51 = 98 - 25.1 = 72.9\ N$

Introduciendo los datos en el simulador obtenemos la siguiente pantalla, que confirma los resultados:

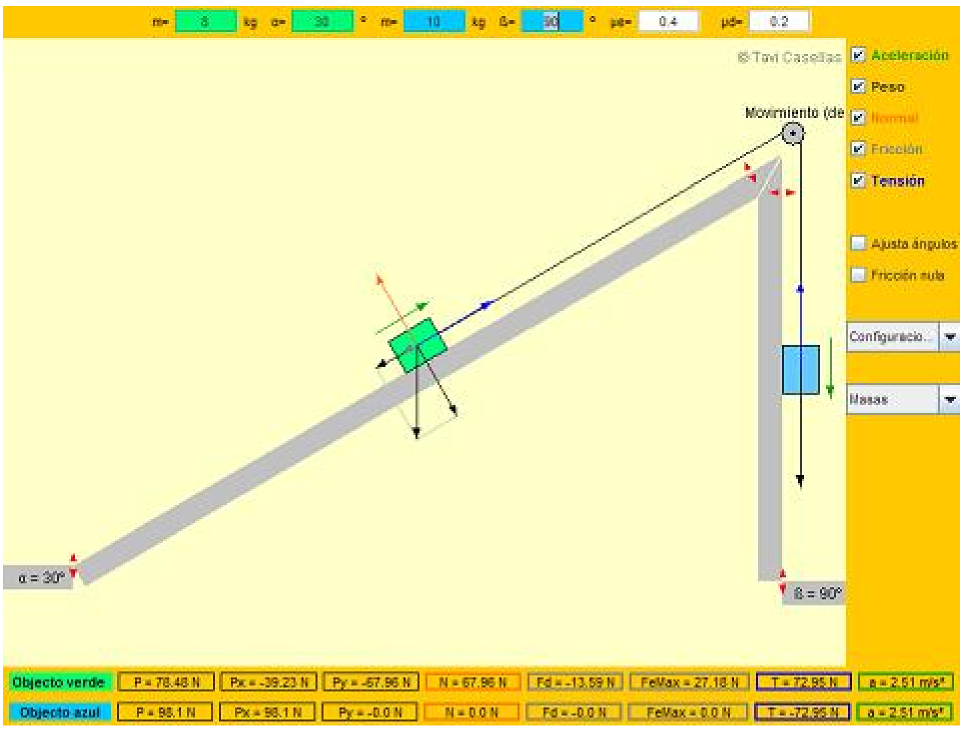


Imagen 25 de elaboración propia a partir de Fislab

Reflexiona

Con la configuración del plano inclinado anterior (α = 30°, β = 90° y coeficientes de rozamiento μ_{es} = 0.5 y μ_{di} = 0.2) colocamos un sistema enlazado de cuerpos en el que el cuerpo colgante tiene una masa m' = 1 kg. En el plano inclinado vamos colocando sucesivamente pesas de 1 kg. ¿Cuál será la masa (m) mínima del cuerpo situado en el plano inclinado para que el sistema comience a moverse hacia la izquierda, es decir, para que el cuerpo colgante comience a subir? Utiliza el simulador para encontrar la solución.

Una vez introducidos los parámetros en el simulador puedes observar que hasta m = 14 kg el sistema permanece en equilibrio, mientras que cuando m = 15 kg ya adquiere aceleración. Por tanto, serán necesarios 15 kg para que el cuerpo comience a moverse descendiendo la rampa. Este resultado puede observarse en las siguientes capturas de pantalla para los valores de 14 y 15 kg:

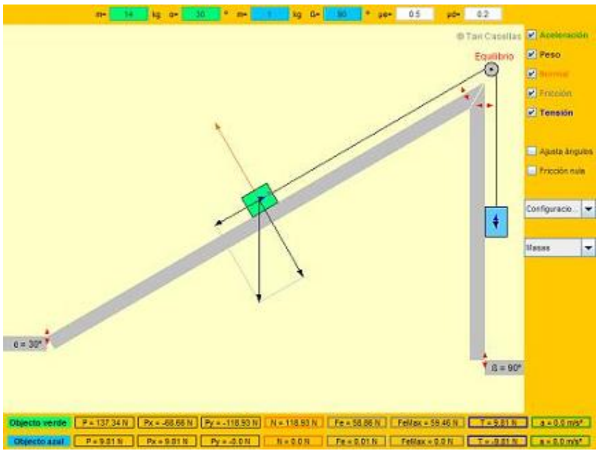


Imagen de elaboración propia a partir de Fislab

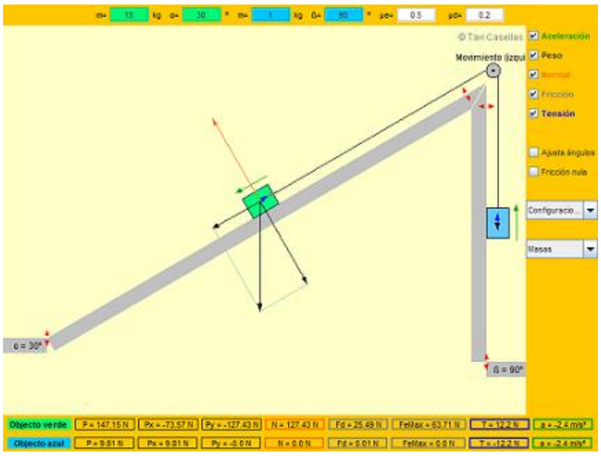


Imagen de elaboración propia a partir de Fislab

Para encontrar el valor exacto en el que el cuerpo empieza a deslizar, basta con resolver las ecuaciones, buscando de nuevo el valor límite en el que la aceleración toma el valor cero. Como en este caso la dirección esperada de movimiento es la contraria a la de los problemas anteriores, tomaremos el eje en sentido contrario, con lo que T será negativa y el rozamiento tendrá la misma dirección de T:

$T = m' \cdot g = 1 \cdot 9.8 = 9.8$ N

$F_R > m \cdot g \cdot sen\ \alpha - T \rightarrow \mu_{es} \cdot m \cdot g \cdot cos\ \alpha > m \cdot g \cdot sen\ \alpha - T \rightarrow m \cdot (\mu_{es} \cdot g \cdot cos\ \alpha - g \cdot sen\ \alpha) > -T \rightarrow m > -T / (\mu_{es} \cdot g \cdot cos\ \alpha - g \cdot sen\ \alpha) \rightarrow m > -9.8 / (0.5 \cdot 9.8 \cdot cos\ 30° - 9.8 \cdot sen\ 30°) \rightarrow m > -9.8 / -0.66 \rightarrow m > 14.92$ kg

valor que coincide con el resultado del simulador.

Resumen

Importante

Cuando tengas que resolver un problema de aplicación de las leyes de la dinámica, es importante que sigas ordenadamente las siguientes pautas:

1. Identifica las fuerzas que se ejercen sobre el cuerpo, así como su origen, tipo y dirección.
2. Dibuja un diagrama de fuerzas lo más simple posible, pero que contenga toda la información que se haya suministrado. El punto de aplicación de todas las fuerzas será el centro geométrico del cuerpo sobre el que actúan.
3. Escoge un sistema de referencia cartesiano de forma que uno de los ejes coincida con la dirección esperada de movimiento del cuerpo. La componente perpendicular al plano de movimiento se denomina **Normal** mientras que la paralela al mismo es la componente **Tangencial**.
4. Descompón todas las fuerzas en sus componentes según los ejes del sistema de referencia.
5. Aplica la segunda ley de Newton en cada uno de los ejes.
6. Resolución matemática del sistema de ecuaciones que resulta para conocer los datos que se nos piden.

Importante

Por fuerza de rozamiento se entiende toda fuerza que se opone al deslizamiento de un objeto debido a las interacciones entre las superficies de contacto y/o el medio en el que se desplaza.

El valor de la fuerza de rozamiento es variable. Mientras no haya deslizamiento, la fuerza de rozamiento coincide con las fuerzas aplicadas en la dirección del deslizamiento hasta alcanzar un valor máximo:

$$F_{Re\ max} = \mu_e \cdot N$$

Cuando se produce deslizamiento la fuerza de rozamiento se puede calcular como:

$$F_{Rd} = \mu_d \cdot N$$

Se cumple que para un mismo par de superficies que el coeficiente de rozamiento dinámico es menor que el estático.

Importante

En los problemas con rozamiento debes recordar siempre que existen dos tipos de coeficiente de rozamiento (μ), y utilizar uno u otro en función del caso que tengas que resolver:

- Si el cuerpo no ha comenzado a moverse la fuerza de rozamiento tiene un valor desconocido y será una de las incógnitas del problema.
- Si el cuerpo está a punto de moverse o quieres calcular en qué momento comienza a hacerlo utilizarás el coeficiente de rozamiento estático (μ_e).
- Si el cuerpo ya se encuentra en movimiento, utilizarás el coeficiente de rozamiento dinámico (μ_d).

Importante

Denominaremos **tensión** a la fuerza de interacción ejercida entre dos cuerpos cuando uno de ellos transmite un movimiento a otro mediante un dispositivo material. Esta tensión se representará por **T** y se trata de una fuerza de acción-reacción sobre el intermediario, normalmente una cuerda o cable.

Los cuerpos que están enlazados se mueven con la misma velocidad y aceleración, coincidiendo por tanto el espacio recorrido por cada uno de ellos. Además las tensiones en los extremos de la cuerda son iguales y de sentido contrario.

Los cuerpos que están enlazados se mueven con la misma velocidad y aceleración, coincidiendo por tanto el espacio recorrido por cada uno de ellos. Además las tensiones en los extremos de la cuerda son iguales y de sentido contrario.

Importante

A la hora de resolver un problema de aplicación de las leyes de la dinámica en un sistema de **cuerpos enlazados**, es importante que sigas ordenadamente las siguientes pautas:

1. Identifica los distintos cuerpos que intervienen en el problema (recuerda que, en lo que a este tema se refiere, las cuerdas no son cuerpos como tales, sino simplemente el medio transmisor de la fuerza de Tensión)
2. Identifica las fuerzas que se ejercen sobre cada cuerpo, así como su origen, tipo y dirección. Ten en cuenta que la Tensión es una fuerza de acción y reacción aplicada en ambos extremos de la cuerda con sentido contrario en cada cuerpo.

3. Dibuja un diagrama de fuerzas lo más simple posible, pero que contenga toda la información que se haya suministrado. El punto de aplicación de todas las fuerzas será el centro geométrico del cuerpo sobre el que actúan.
4. Escoge un sistema de referencia cartesiano de forma que uno de los ejes coincida con la dirección esperada de movimiento del conjunto. Este sistema de referencia debe ser el mismo para todos los cuerpos intervinientes.
5. Descompón todas las fuerzas en sus componentes según los ejes del sistema de referencia.
6. Aplica la segunda ley de Newton para cada uno de los cuerpos por separado y en cada uno de los ejes.

Imprimible

Descarga aquí la versión imprimible de este tema.

Si quieres escuchar el contenido de este archivo, puedes instalar en tu ordenador el lector de pantalla libre y gratuito NDVA.

Aviso legal

Las páginas externas no se muestran en la versión imprimible

http://www.juntadeandalucia.es/educacion/permanente/materiales/index.php?aviso#space