INSTITUTO de ENSEÑANZAS a DISTANCIA de ANDALUCÍA

PAU

Mayores de 25 años

Contenidos

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales
Funciones: Cálculo de derivadas y aplicaciones

Como ya sabes una función describe o expresa la relación entre dos variables de forma inequívoca. Una función, por ejemplo, determinará la posición de un astro o la temperatura de un lugar de la atmósfera terrestre en un determinado instante. Otra función determinará la presión de un gas en relación con la temperatura, o el volumen de ventas de una empresa en relación con la inversión en publicidad...

Una función es la materia prima a partir de la cual pueden surgir nuevas cuestiones. Una sumamente importante es: ¿Podemos medir los cambios en la variable dependiente respecto de los cambios de la variable independiente? Así "un hombre del tiempo" se preguntará: ¿Se están produciendo cambios bruscos en la temperatura? O dicho de otra manera: ¿Se están produciendo grandes variaciones en la temperatura en pequeñas variaciones de tiempo? ¿Se está acelerando el cambio climático o el efecto invernadero? ¿Cuándo los ingresos de una empresa disminuyen?

Para responder a tales preguntas es necesario comparar la variación de la variable dependiente al variar la variable independiente. Esta es precisamente la idea de derivada.

Pero antes de comenzar te deseamos...

Imagen modificada en Flickr de ecastro bajo CC

Tasa de variación media

Fotografía en Flickr por Guillermo Puglia bajo CC

Imagínate que este viaje por las funciones lo hacemos en tren. En este medio de locomoción no tenemos la oportunidad de mirar el velocímetro como en un coche para saber a qué velocidad nos desplazamos. Pero si la curiosidad nos inunda podemos acudir a un simple cálculo, hacer el cociente entre el espacio recorrido y el tiempo que hemos tardado en recorrerlo, de esta forma, obtendremos la velocidad media entre dos instantes del viaje.

Esta velocidad media, nos permite comparar la variable dependiente (el espacio) y la variable independiente (el tiempo), es decir, nos podemos hacer una idea de si el vehículo circula rápido o lento en un determinado periodo de tiempo.

Reflexiona

Un vehículo hace el trayecto de Córdoba a Madrid. Sale a las 7 de la mañana y llega a las 12 del mediodía. ¿Cuál ha sido su velocidad media?

Mostrar retroalimentación

Si situásemos a Córdoba en el origen (km 0) para la determinación de la posición, Madrid estaría en el km 405. Su velocidad media o variación media en el intervalo de tiempo [7,12] sería, pues, $\frac{405-0}{12-7}=81\ km/h$

Importante

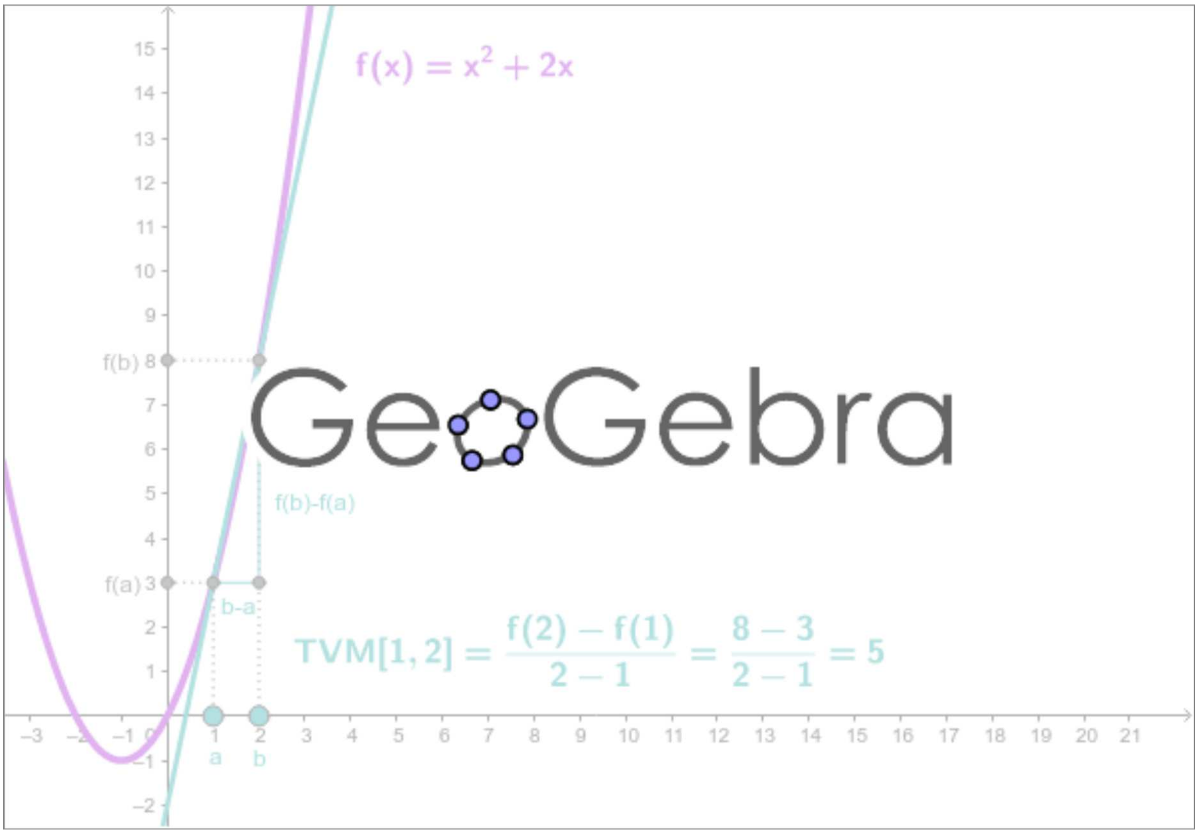
Dada una función $y=f(x)$ se llama **variación media** de f en un intervalo $[a,b]$ al cociente:

$$T.V.M._f\,[a,b]=\frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Al ser la variación media un cociente de variaciones las unidades en que se expresa son también cociente de unidades. Por ejemplo la velocidad media se mide en km/h, la temperatura media en ºC/h, el precio medio en €/kg…

En el siguiente vídeo de juanmemol puedes ver un ejemplo resuelto del cálculo de la tasa de variación media de la función $f(x)=x^2+3x+1$ en el intervalo [-2,1]:

Observa la siguiente escena de Geogebra. En ella puedes ver el cálculo de la tasa de variación media de dos puntos cualesquiera (solo tienes que manipular los puntos verdes) y la relación que guarda con la recta secante a la curva $f(x)=x^2+2x$ en esos dos puntos.



Importante

es la pendiente de la recta secante a la gráfica de f que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

Con frecuencia las variaciones medias en intervalos grandes son poco interesantes. Por ejemplo cuando la guardia civil de tráfico o un radar intenta medir la velocidad de un coche en un determinado punto de la carretera de nada serviría la velocidad media a lo largo de todo el recorrido. Intuitivamente sabemos que la velocidad es un concepto local, puntual y las medias nos proporcionan aproximaciones al mismo, que a veces pueden rayar en el absurdo. Si aplicamos el concepto de variación media a un vehículo que saliera de un determinado punto y volviera al mismo, deberíamos concluir que su velocidad media es 0 (comprueba qué ocurre en la escena anterior cuando a y b coinciden).

Tasa de variación instantánea o variación media centrada en un punto

¿Qué hace un radar en la carretera para calcular la velocidad de un vehículo? Toma dos fotografías en intervalo de tiempo reducido y a partir de ellas calcula la velocidad media que ha de ser bastante aproximada a la velocidad que llevaba el vehículo en cualquier instante intermedio. Algo similar se hace en matemáticas para calcular la tasa de variación de una función en un determinado instante. Se centra la consideración en dicho instante y se introducen pequeñas variaciones a partir del mismo.

Si ahora volvemos a las funciones y, teniendo en cuenta que b es mayor que a , se puede expresar b como $a+h$, donde h sería un número real y positivo, y de esta forma la tasa de variación media se podría expresar con la siguiente fórmula:

$$T.V.M._f\,[a, a+h] = \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Fotografía en Flickr por brewbooks bajo CC

Si h se aproxima a cero, el punto $b = a+h$ se aproximará al punto a y la tasa de variación media tenderá entonces a un valor que denominamos tasa de variación instantánea de la función f en el punto a . Que si hablamos en términos de velocidad, sería justo la que marca el velocímetro de nuestro coche en un determinado momento.

Importante

La tasa de **variación instantánea** de una función f en el punto a es:

$$\boxed{T.V.I._f(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$

Ejercicio resuelto

Calcula la tasa de variación instantánea de la función $f(x)=x^2$ en $x=2$

Mostrar retroalimentación

$$TVI=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^2-2^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{4+h^2+4h-4}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+4h}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(h+4)}{h}=\lim_{h\to 0}(h+4)=4$$

La tasa de variación instantánea de f en $x=2$ es 4.

2. Derivada de una función

En algunas ocasiones cuando intentamos explicar algo a alguien y nuestro receptor no nos entiende, procuramos utilizar otras palabras o expresiones para decir lo mismo.

En matemáticas ocurre algo parecido. Por ejemplo, si recurres a algún amigo que haya estudiado matemáticas en bachillerato y le preguntas por la tasa de variación instantánea, probablemente te diga que desconoce ese concepto, sin embargo, si le preguntas por la derivada de una función en un punto o por la pendiente de la recta tangente a esa función en ese punto, la respuesta será distinta.

En el siguiente vídeo, puedes redescubrir conceptos vistos en el apartado anterior:

Fotografía en Flickr por taivasalla bajo CC

Derivada en un punto

Como has visto en el vídeo anterior, el comportamiento estable de la variación media en el entorno de un punto permite definir "la tasa de variación instantánea" o lo que en lenguaje matemático se denomina derivada de la función en un punto.

Importante

Si tenemos una función $f(x)$ llamamos **derivada de la función en un punto** $x=a$ a la tasa de variación instantánea de la función f en el punto a y se denota por $f'(a)$. Así, según la definición tenemos que:

$$\boxed{f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$$

Recuerda que para que exista este límite, deben existir los límites laterales y coincidir. Así, de la misma forma, podemos definir las **derivadas laterales** como:

- Derivada por la derecha:

$$\boxed{f'(a^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$$

- Derivada por la izquierda:

$$\boxed{f'(a^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$$

En el caso de que ambos límites coincidan diremos que la función es **derivable** en el punto a.

Haciendo un simple cambio de variable $(x=a+h)$ la derivada de f en un punto $x=a$ podemos expresarla también de la siguiente forma:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Importante

Estudiar la **derivabilidad** de una función f en $x=a$ consiste en averiguar si la función es derivable en ese punto.

Ejercicio resuelto

Curso 2010/2011

(Continuación)

Estudie si la siguiente función es derivable en $x=3$:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-6 & \text{si} \quad x<3 \\ \frac{12}{x}-1 & \text{si} \quad x\geq 3 \end{cases}$$

Mostrar retroalimentación

En el tema anterior vimos que en $x=3$ la función es continua, que es un requisito indispensable para que la función sea derivable.

Además de la continuidad, se tiene que cumplir que la función sea derivable en $x=3$, es decir que exista $f'(3)=\lim\limits_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}$. Por tanto deben existir los límites laterales y ser iguales:

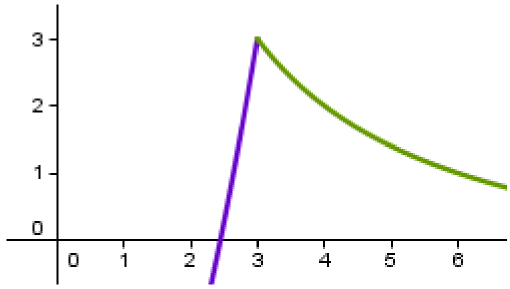
$$\lim_{x\to 3^+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3^-}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}$$

Estudiemos cada límite por separado:

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}\frac{\frac{12}{x}-1-3}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}\frac{12-4x}{x(x-3)}=\lim_{x\to 3^+}\frac{4(3-x)}{x(x-3)}=\lim_{x\to 3^+}\frac{-4}{x}=\frac{-4}{3}$$

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3^-}\frac{x^2-6-3}{x-3}=\lim_{x\to 3^-}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3^-}\frac{x+3}{1}=6$$

Como ambos límites no coinciden la función no es derivable en $x=3$.



Interpretación geométrica de la derivada

Geométricamente, **la derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en dicho punto**, ya que las rectas secantes en el entorno de un punto tienden a confundirse con la recta tangente en el punto a medida que los incrementos se hacen más pequeños.

Ejercicio resuelto

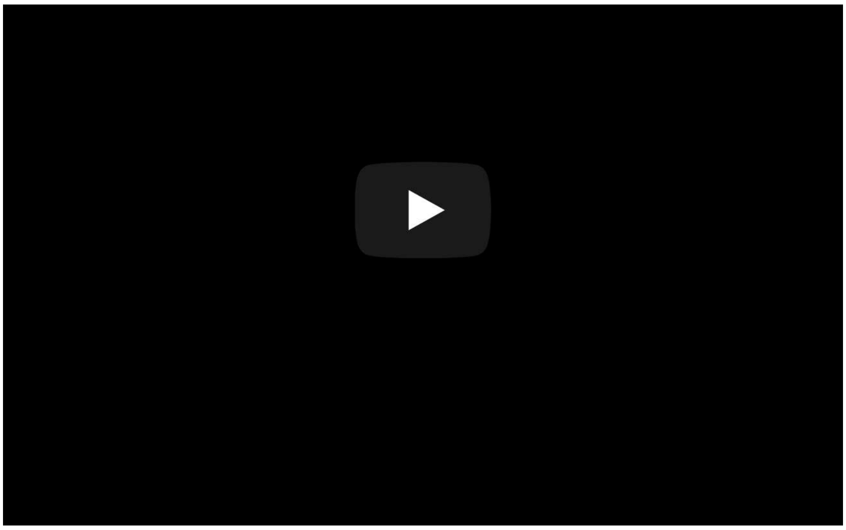
Halla la pendiente de la recta tangente a la gráfica

$$f(x)=\frac{1}{2x+1}$$

en el punto de abscisas $x=-2$.

Mostrar retroalimentación

Recurrimos a la definición de derivada y calculamos $f'(-2)$:



Luego la pendiente de la recta tangente en $x = -2$ es $\frac{-2}{9}$.

Función derivada

Dado que la derivada es un concepto local, podría definirse la función derivada en aquellos puntos en que la función primera o primitiva es derivable.

Importante

Si tenemos una función $f(x)$ denominamos **función derivada de** f respecto a la variable x a una nueva función que para cada valor x nos proporciona la derivada de la función en el punto x . A la función derivada de $f(x)$ la denotaremos $f'(x)$, aunque también la puedes ver representada como $\frac{df(x)}{dx}$. De esta forma tenemos que:

$$\boxed{f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

Recuerda que con esta definición, la función derivada nos proporciona, para cada punto x , la pendiente de la recta tangente a la función en punto x .

Ejercicio resuelto

Calcula la función derivada de $f(x) = x^2 - 2x$

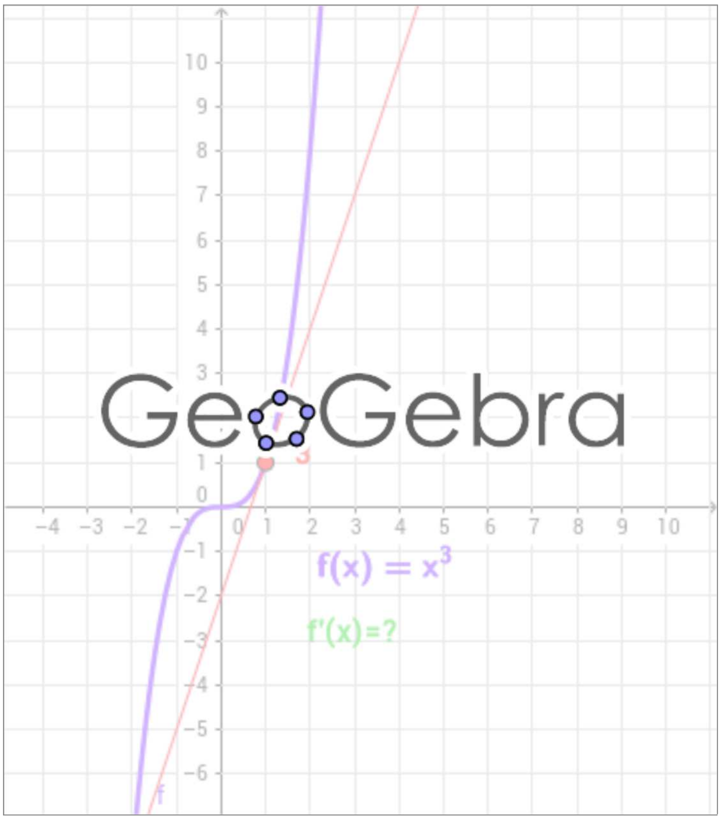
Para probarlo, vamos a obtener la derivada de $f(x)=x^2-2x$ en un punto cualquiera, x.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-2\cdot(x+h)-x^2+2x}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h^2+2xh-2h}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h\cdot(h+2x-2)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}(h+2x-2) = 2x-2$$

En la siguiente escena de Geogebra, distinguimos cómo va surgiendo la derivada de la función $f(x)=x^3$ de la manipulación de su pendiente.



Applet de GeoGebra por Patricia Pérez

Comprueba lo aprendido

Utilizando la escena anterior, rellena los siguientes espacios en blanco:

1. f'(x) le asociada a cada valor x la ____________ en el punto x, que es la ____________ de la recta tangente en x.

f'(x)				

3. La derivada de $f(x)=x^3$ es $f'(x)=$ [ ] (las potencias las insertaremos utilizando ^, por ejemplo x^5 lo expresamos x^5)

Enviar

El tiempo es oro

Fotografía en Flickr por Alexandre Moreau bajo CC

Te proponemos un reto, coge tu reloj y calcula una derivada mediante la definición, aunque dependerá de la función elegida el resultado seguro que es más del esperado. Pues bien en este apartado, nos dedicaremos a desarrollar unas fórmulas que nos permitan calcular derivadas de una forma más operativa, ya que la derivada de una función no deja de ser una herramienta que utilizaremos para diferentes aplicaciones.

Derivadas de funciones elementales

Todos los resultados que aparecen en la siguiente tabla son fruto de aplicar la definición de derivada de una función. Te recomendamos que para no tener que recurrir una y otra vez a esta definición, te aprendas el siguiente cuadro. No te asustes es más sencillo de lo que parece, el secreto está en la práctica.

Nombre	Expresión analítica	Derivada	Expresión abreviada
Constante	$f(x)=k$	$f'(x)=0$	$k'=0$
Identidad	$f(x)=x$	$f'(x)=1$	$x'=1$
Potencial	$f(x)=x^n$	$f'(x)=nx^{n-1}$	$(x^n)'=nx^{n-1}$
Raíz cuadrada	$f(x)=\sqrt{x}$	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$
Raíz	$f(x)=\sqrt[n]{x}$	$f'(x)=\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$(\sqrt[n]{x})'=\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
Exponencial	$f(x)=e^x$	$f'(x)=e^x$	$(e^x)'=e^x$
Exponencial de base a	$f(x)=a^x$	$f'(x)=\ln(a)a^x$	$(a^x)'=\ln(a)a^x$
Logarítmica	$f(x)=\ln(x)$	$f'(x)=\frac{1}{x}$	$\ln'(x)=\frac{1}{x}$
Logarítmica de base a	$f(x)=\log_a(x)$	$f'(x)=\frac{1}{\ln(a)x}$	$\ln'(x)=\frac{1}{\ln(a)x}$
Seno	$f(x)=sen(x)$	$f'(x)=cos(x)$	$sen'(x)=cos(x)$
Coseno	$f(x)=cos(x)$	$f'(x)=-sen(x)$	$\cos'(x)=-sen(x)$
Tangente	$f(x)=tg(x)$	$f'(x)=\frac{1}{1+tg^2(x)}$	$tg'(x)=\frac{1}{1+tg^2(x)}$

Imagen de elaboración propia

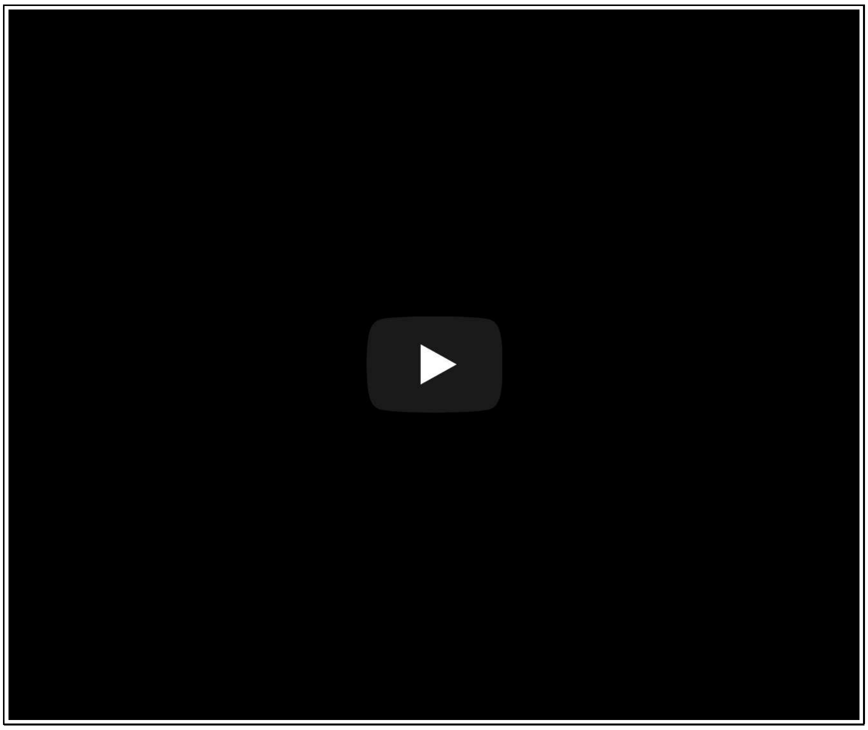
Importante

Suma	$(f+g)'=f'+g'$	La derivada de la suma de funciones es la suma de las derivadas de estas funciones.
Resta	$(f-g)'=f'-g'$	La derivada de la diferencia de funciones es la diferencia de las derivadas de estas funciones.
Producto	$(f\cdot g)'=f'\cdot g+g'\cdot f$	La derivada del producto de dos funciones es igual a la derivada de la primera por la segunda sin derivar más la segunda derivada por la primera sin derivar.
Cociente	$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'\cdot g-g'\cdot f}{g^2}$	La derivada del cociente de dos funciones es igual a la derivada del numerador por el denominador sin derivar menos la derivada del denominador por el numerador sin derivar, y todo ello dividido por el denominador al cuadrado.
Producto por un número	$(a\cdot f)'=a\cdot f'$	La derivada del producto de un número real por una función es igual al número real por la derivada de la función.
Composición	$(g\circ f)'=[g(f(x))]'=g'(f(x))\cdot f'(x)$	Regla de la cadena

Veamos unos ejemplos en la siguiente presentación

Presentación en Slideshare por Patricia_Perez

La mejor forma de aprender a derivar es derivando, así que aquí tienes unos vídeos del Profesor de la Escuela Técnica Superior de Ingeniería Juan Medina Molina. En concreto, la lista de reproducción tiene 109 vídeos, de menor a mayor dificultad. Paciencia y mucho ánimo:



Ejercicio resuelto

Universidades Públicas de Andalucía

Curso 2009/2010

Calcule la derivada de la función: $y=\sqrt{x-1}+\frac{1}{x^2+1}$

Mostrar retroalimentación

El primer paso para calcular esta derivada es recordar que la derivada de una suma es la suma de las derivadas. Por lo tanto, por un lado derivaremos la raíz y por otro el cociente.

$$y'=\left(\sqrt{x-1}\right)'+\left(\frac{1}{x^2+1}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}\cdot 1+\frac{0\cdot(x^2+1)-2x\cdot 1}{(x^2+1)^2}=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}\cdot 1+\frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

Ejercicio resuelto

Curso 2010/2011

Calcule las derivadas de las funciones: $f(x)=\frac{(2-x)^2}{3x}$ y $g(x)=(x^2-x)\cdot(x^3+2x)$

Mostrar retroalimentación

(1) **Derivada de un cociente**

$$f(x)=\frac{(2-x)^2}{3x}\rightarrow f'(x)=\frac{2\cdot(2-x)\cdot(-1)\cdot 3x-3(2-x)^2}{(3x)^2}$$

Aunque con esto ya habríamos contestado al ejercicio, es recomendable (siempre que haya tiempo y tengamos certeza en lo que hacemos) simplificar. De esta forma, la derivada quedaría:

$$f'(x)=\frac{-12x+6x^2-3\cdot(4+x^2-4x)}{9x^2}=\frac{-12x+6x^2-12-3x^2+12x}{9x^2}=\frac{3x^2-12}{9x^2}=\frac{x^2-4}{3x^2}$$

(2) **Derivada de un producto**

$$g(x)=(x^2-x)\cdot(x^3+2x)\rightarrow g'(x)=(2x-1)\cdot(x^3+2x)+(x^2-x)\cdot(3x^2+2)$$

Al igual que en el apartado anterior podemos simplificar la derivada:

$$g'(x)=2x^4+4x^2-x^3-2x+3x^4+2x^2-3x^3-2x=5x^4-4x^3+6x^2-4x$$

Para resolver este producto de polinomios podríamos haber optado por multiplicar primero y luego derivar, pero el resultado es el mismo.

Derivadas sucesivas

¿Cuál es el resultado de derivar una función? La respuesta es sencilla, una nueva función que llamamos función derivada. Por lo tanto, podemos derivar también la derivada, obteniendo otra función llamada **derivada segunda**. Si derivásemos esta nueva función, obtendríamos la **derivada tercera**, y así sucesivamente. Este proceso podemos repetirlo en ocasiones indefinidamente (prueba a hacerlo con $f(x)=e^{2x}$). Es como si de un efecto dominó se tratara.

Importante

A la derivada de una función también se la denomina **derivada primera**. Si volvemos a derivar la derivada primera de una función, obtenemos la llamada **derivada segunda**; la derivada de la derivada segunda se denomina **derivada tercera**; y así sucesivamente. Estas son las llamadas **derivadas sucesivas** de una función:

$$f \xrightarrow{D} f' \xrightarrow{D} f'' \xrightarrow{D} f''' \xrightarrow{D} \dots$$

Ejercicio resuelto

Curso 2012/2013

Calcule la derivada de la función: $f(x) = \frac{x^3+5x^2+6x-1}{x+1}$

Mostrar retroalimentación

Derivada de un cociente

$$f'(x) = \frac{(x^3+5x^2+6x-1)' \cdot (x+1) - (x^3+5x^2+6x-1) \cdot (x+1)'}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{(3x^2+10x+6) \cdot (x+1) - (x^3+5x^2+6x-1)}{(x+1)^2}$$

Este sería la derivada sin simplificar. Para obtener la simplificación tendríamos que desarrollador las operaciones que se encuentran en el numerador y simplificar.

3. Estudio de funciones

En el apartado anterior has aprendido a derivar una función. Pero ¿para qué sirve derivar? Como has visto a lo largo de todo el curso, hemos intentado enseñarte las aplicaciones prácticas de todo lo que estás estudiando, y esta vez no iba a ser menos. Ya conoces alguna de las aplicaciones, como puede ser averiguar la ecuación de la velocidad de un móvil derivando la del espacio que recorre, o la ecuación de la aceleración a partir de la velocidad. En este apartado veremos algunas otras aplicaciones relacionadas con la representación gráfica de funciones.

3.1. Dominio, simetría, cortes y asíntotas

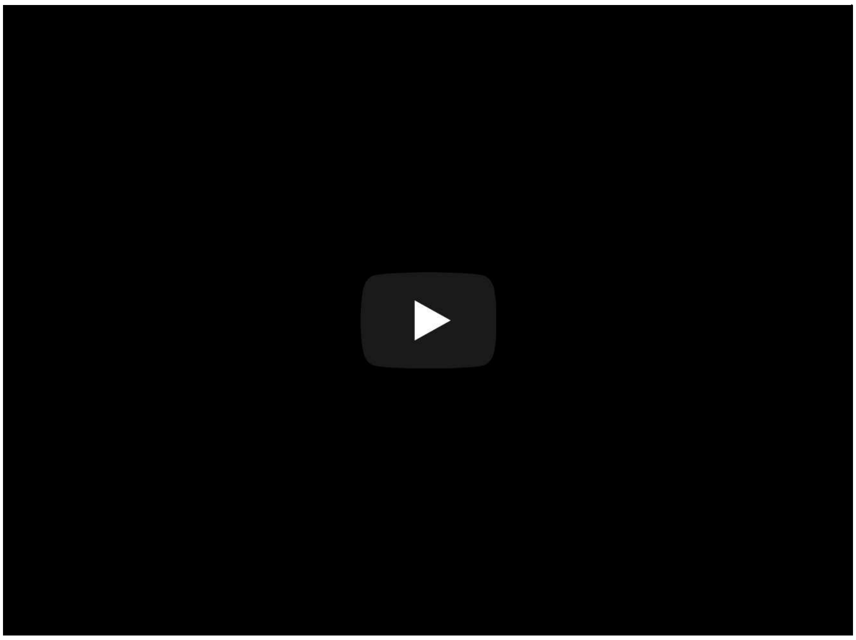
Fotografía en Flickr por
Meet The Chumbeques bajo CC

Vamos a comenzar el estudio completo de una función que desembocará en la representación gráfica de la misma. Pero antes hazte la idea de que eres un pintor profesional, y que estás a punto de realizar un trabajo que se te ha encargado. Supongo que si consigues meterte en situación, ya estarás pensado en tu lienzo y en el boceto. Pues bien, si es ese el caso ya estás listo para comenzar:

Dominio de una función. Tamaño del lienzo

El estudio del dominio de una función, va ligado a todas sus características. Influye en el estudio de la continuidad de la función y por lo tanto en las asíntotas, monotonía (crecimiento y decrecimiento)... Es por ello por lo que siempre es el primer paso que tenemos que dar.

¿Recuerdas cómo se calculaba el dominio de una función? Aunque suponemos que sí, para hacer memoria puedes ver el siguiente vídeo:



Si leíste en su momento las orientaciones del alumnado, quizás te llamara la atención la siguiente frase: "*El orden y la claridad de exposición así como la capacidad de síntesis son factores que serán tenidos en cuenta* [...]". Por eso es conveniente que te acostumbres a utilizar la notación adecuada en cada momento.

Importante

Notación

El dominio de una función se indica en forma de intervalo o entre llaves.

De esta forma, si una función f tiene por dominio los puntos comprendidos entre a y b (con b no incluido), lo expresamos como $Dom\ f=[a,b)$.

ejemplo, si escribimos $Dom\ f=\mathbb{R}-\{-1\}$ entonces el dominio de nuestra función serán todos los números reales excepto el punto $x=-1$.

Observa que para hablar de todos los números reales utilizamos la letra $\mathbb{R}$ (como ya vimos en la unidad 1).

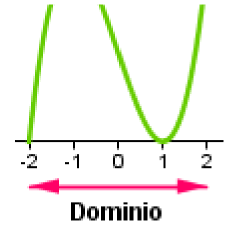


Imagen de elaboración propia

Ejercicio resuelto

Consideramos la siguiente función racional: $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x^2-4}$

Perseguimos realizar la representación gráfica de esta función. Para ello, en esta ocasión te pedimos que calcules el dominio de la misma.

Mostrar retroalimentación

Dominio: dado que es una función racional su dominio son todos los números reales que no anulen el denominador.

Calculamos los valores que anulan el denominador:

$$x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-2 \end{cases}$$

Así el dominio de $f(x)$ es $\mathbb{R}-\{-2,2\}=(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,+\infty)$, es decir todos los números reales menos el -2 y el 2.

Y ahora a trazar las primeras líneas y puntos.

Simetría de la función

Recuerda que otro de los aspectos que estudiamos de las funciones es la simetría.

Importante

Una función es **simétrica respecto al eje de ordenadas (OY)**, si para todo valor, x , de su dominio se cumple que: $f(-x)=f(x)$. En este caso decimos que la función es **Par**.

Una función es **simétrica respecto al origen de coordenadas**, si para todo valor, Aunque existen funciones de los dos tipos descritos, **Par** e **Impar**, lo más frecuente es que una función no presente ningún tipo de simetría.

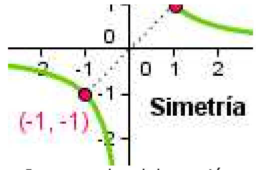
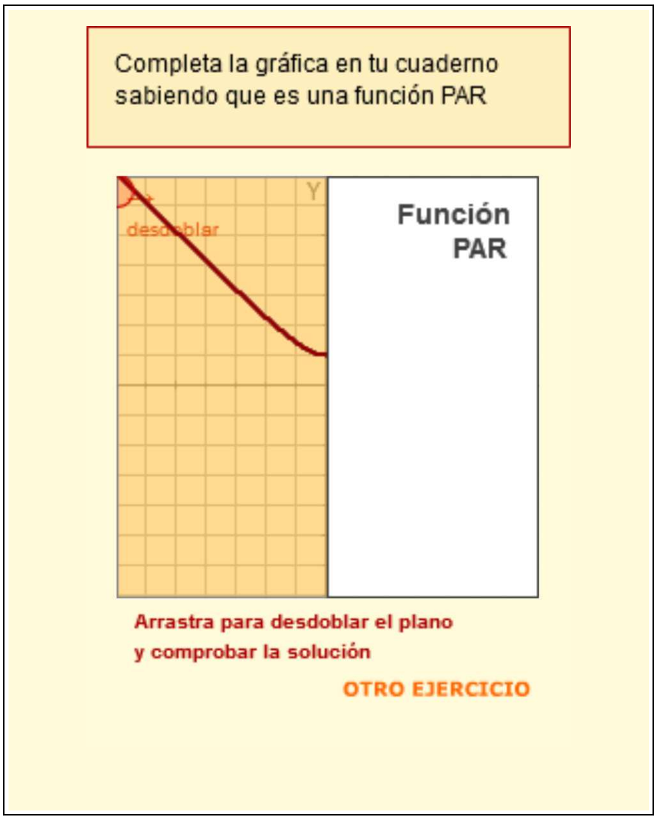


Imagen de elaboración propia

Puedes practicar con el siguiente applet de Descartes el concepto de función Par/Impar.



Escena de María José García Cebrian en **Proyecto Descartes**. Licencia **CC**

Ejercicio resuelto

Consideramos la siguiente función racional: $f(x)=\frac{x^2-9}{x^2-4}$

Te pedimos que estudies la simetría de la misma.

Mostrar retroalimentación

Simetría: Calculamos

$$f(-x)=\frac{(-x)^2-9}{(-x)^2-4}=\frac{x^2-9}{x^2-4}=f(x)$$

Puntos de corte con los ejes

Hay unos puntos que tienen especial interés, aquellos en los que la gráfica corta a los ejes de coordenadas.

Importante

El punto de corte de la función con el eje vertical, el de **ordenadas**, es aquel en el que la variable se hace cero. Por lo tanto, basta anular la variable en la función para obtener la ordenada del punto de corte. Es decir, en la función $y = f(x)$ será un punto de la forma $(0\,,\,f(0))$.

Por su parte, el corte de la gráfica de la función con el eje de **abscisas**, el horizontal, corresponderá a un valor de x que anule la función. Es decir, si se verifica que $f(a) = 0$, entonces el punto de corte con el eje horizontal será $(a\,,\,0)$.

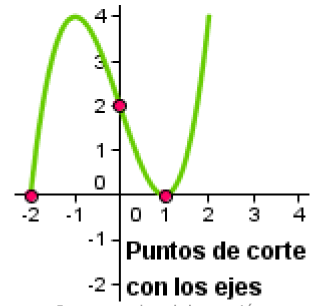


Imagen de elaboración propia

Si pinchas en la siguiente imagen puedes practicar el cálculo de los puntos de corte con los ejes de varias funciones, todas ellas correspondientes a líneas rectas.

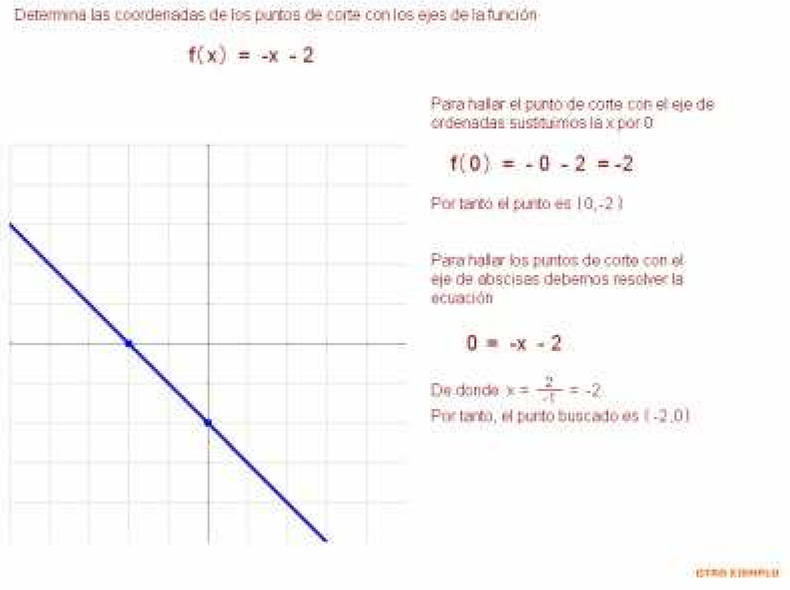


Imagen de elaboración propia

Ejercicio resuelto

Consideramos la siguiente función racional: $f(x)=\frac{x^2-9}{x^2-4}$

Calcula los puntos de corte con los ejes.

Mostrar retroalimentación

Puntos de corte con los ejes:

Puntos de corte con el eje OX: Para calcular estos puntos resolvemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} y=f(x) \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\frac{x^2-9}{x^2-4} \\ y=0 \end{cases}$$

Así, tenemos que:

$$\frac{x^2-9}{x^2-4}=0 \Rightarrow x^2-9=0 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ x=3 \end{cases}$$

Por tanto los puntos de corte son $P=(-3,0)$ y $Q=(3,0)$.

Punto de corte con el eje OY: Para calcular este punto de corte resolvemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} y=f(x) \\ x=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y=\frac{x^2-9}{x^2-4} \\ x=0 \end{cases}$$

Por tanto tenemos que $y=\frac{0^2-9}{0^2-4}=\frac{9}{4}$.

Por tanto, el punto de corte es $H=\left(0,\ \frac{9}{4}\right)$.

Asíntotas

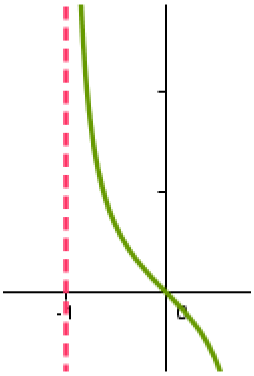
El estudio de las asíntotas y ramas infinitas ya lo realizamos en el tema anterior junto con los límites de una función. Pero al ser una característica imprescindible para su representación, vamos a darle un pequeño repaso.

Si te fijas en las representaciones de rectas que hemos puesto como ejemplo durante estos temas nos hemos encontrado varias veces con ramas infinitas, es decir, tramos de curva que se alejan indefinidamente. Cuando una rama infinita se aproxima a una recta, a esta se le llama asíntota de la curva y a la rama correspondiente rama asintótica.

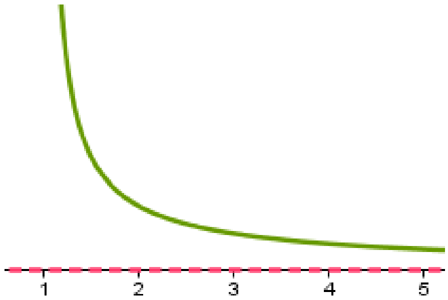
Importante

Dada una función $y=f(x)$ cuya gráfica es la curva C se dice que la recta r es una asíntota de $f(x)$ si la curva C se acerca a r indefinidamente sin llegar a coincidir con la propia r.

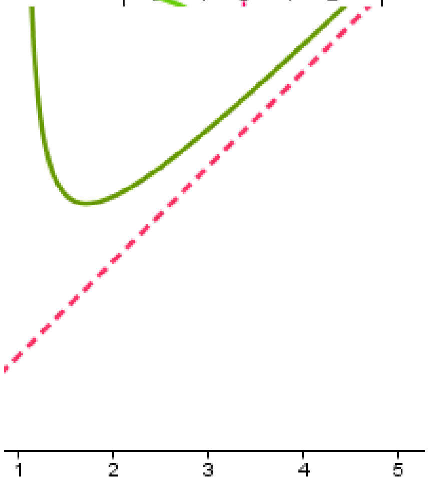
Como una asíntota es una recta, tenemos hasta tres posiciones distintas de una recta con relación a los ejes.



A. Vertical



A. Horizontal



A. Oblicua

Por ello, para cada función pueden existir hasta tres tipos distintos de asíntota.

La vertical existirá si el límite de la función tiende a infinito cuando x tiende a un valor finito a, su valor será $x=a$.

La horizontal y la oblicua las encontraremos cuando estudiemos lo que ocurre cuando la variable independiente tienda a más o menos infinito.

En el caso de funciones racionales podemos hacer un estudio particular para saber qué tipos de asíntotas tendrán según sean el numerador y el denominador. Veámoslo en el siguiente pdf.

Ejercicio resuelto

Dada la función $f(x)=\frac{x}{x^2-1}$, calcular sus asíntotas verticales y horizontales.

Mostrar retroalimentación

Asíntotas verticales

Tendremos que estudiar para que valores el denominador x^2-1 es 0, es decir, el dominio de la función.

En este caso las posibles asíntotas verticales son $x=1$ y $x=-1$.

$\boxed{x=1}$

Tenemos que calcular el límite cuando $x\to 1^-$ y el límite cuando $x\to 1^+$ de la función.

- $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x}{x^2-1}=-\infty$ ya que cuando tomamos valores muy próximos a 1 por la izquierda (valores menores que 1), el numerador tiende a 1 y el denominador a 0, pero por la izquierda, es decir, valores negativos. Por lo

- $\lim_{x \to 1^+} \frac{x}{x^2-1} = +\infty$ ya que cuando tomamos valores muy próximos a 1 por la derecha (valores mayores que 1), el numerador tiende a 1 y el denominador a 0, pero por la derecha, es decir, valores positivos. Por lo tanto, el límite es más infinito. Cuando nos acercamos a $x = 1$ por la derecha la gráfica de $f(x)$ tiende a $+\infty$.

$\boxed{x = -1}$

Tenemos que calcular el límite cuando $x \to 1^-$ y el límite cuando $x \to 1^+$.

- $\lim_{x \to -1^-} \frac{x}{x^2-1} = -\infty$. Cuando nos acercamos a $x = -1$ por la izquierda la gráfica de $f(x)$ tiende a $-\infty$.
- $\lim_{x \to -1^+} \frac{x}{x^2-1} = +\infty$. Cuando nos acercamos a $x = -1$ por la derecha, la gráfica de $f(x)$ tiende a $+\infty$.

Asíntota horizontal

Para calcular la asíntota horizontal, estudiamos el límite de la función en el infinito:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{x^2-1} = \frac{\infty}{\infty}$$

Para resolver este límite dividimos numerador y denominador por la mayor potencia, en este caso x^2 .

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{x^2-1} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}} = \frac{0}{1} = 0$$.

Por lo tanto, existe una asíntota horizontal en $y = 0$.

A continuación, en la representación gráfica de la función puedes ver cómo las ramas asintóticas se aproximan a las rectas $x = 1$ y $x = -1$.

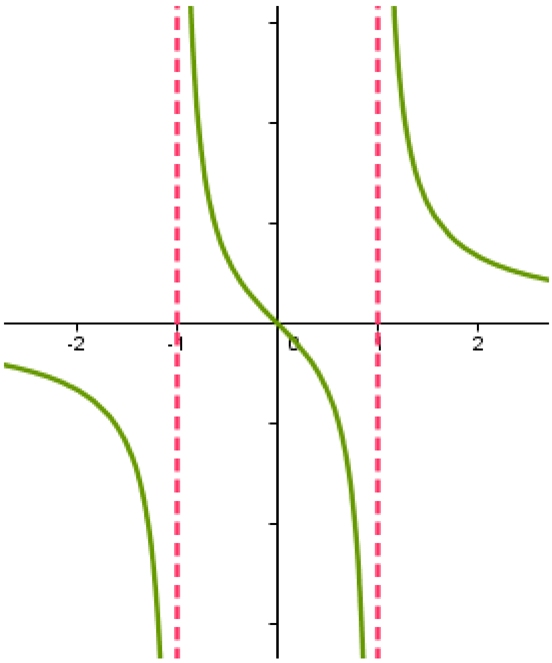


Imagen de elaboración propia

Ejercicio resuelto

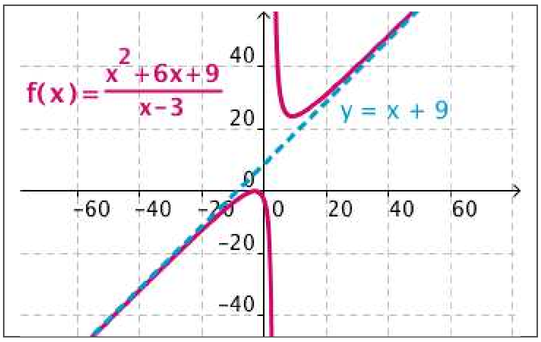
Calcula la asíntota oblicua de las siguientes funciones:

$$(a)\quad f(x)=\frac{x^2+6x+9}{x-3}$$

$$(b)\quad g(x)=\frac{2x^2+1}{x-3}$$

Mostrar retroalimentación

(a) Como la función es racional y el grado del numerador es una unidad mayor que el del denominador, nuestra función tiene una asíntota oblicua. Como sabemos que la función es racional tiene la misma asíntota oblicua por los dos lados. Vamos a calcularla en $+\infty$.

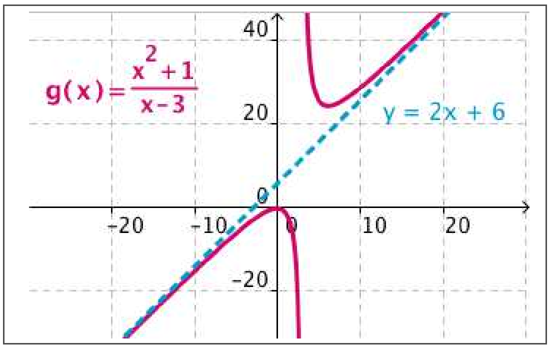


$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+6x+9}{x^2-3x}=1$$

$$n=\lim_{x\to+\infty}f(x)-1\cdot x=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+6x+9}{x-3}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+6x+9-(x^2-3x)}{x-3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{9x+9}{x-3}=9$$

Por lo tanto, la asíntota oblicua que buscamos es $y=x+9$

(b) Igual que en el apartado a, tenemos una función racional donde el grado del numerador es una unidad mayor que el del denominador, por lo que nuestra función tiene una asíntota oblicua. Vuelve a tener la misma asíntota oblicua por los dos lados al ser una función racional. Vamos a calcularla en $+\infty$.

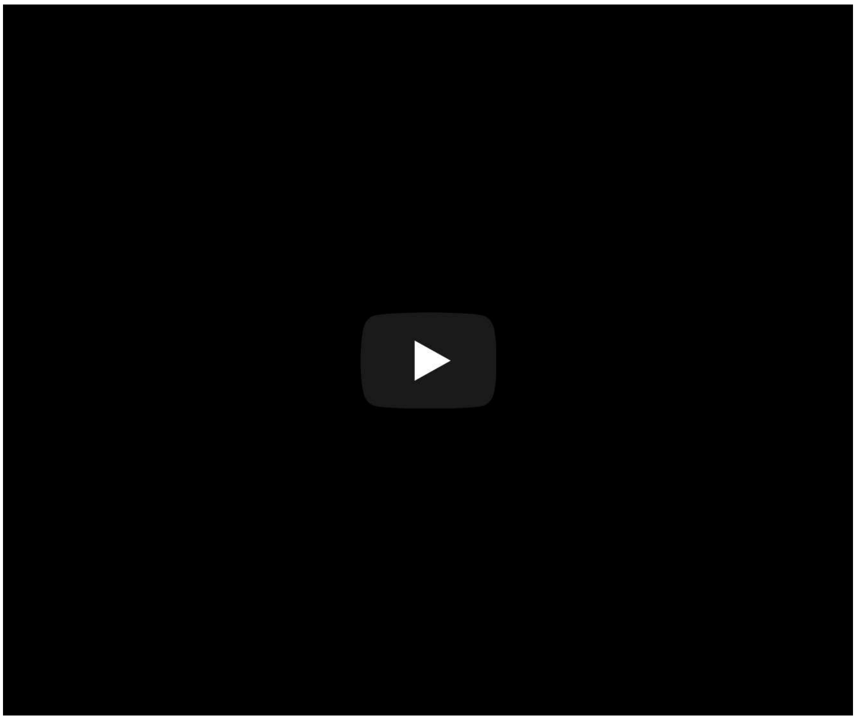


$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+1}{x^2-3x}=2$$

$$n=\lim_{x\to+\infty}g(x)-2\cdot x=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+1}{x-3}-2x=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+1-(2x^2-6x)}{x-3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x+1}{x-3}=6$$

Por lo tanto, la asíntota oblicua que buscamos es $y=2x+6$

Para terminar un vídeo de juanmemol donde se estudian los tres tipos de asíntotas para una misma función.



Monotonía (Crecimiento y decrecimiento)

Seguro que en los últimos meses (si no años) has oído cientos de veces expresiones como "es necesario promover el **crecimiento**" o "estamos abocados hacia un **decrecimiento**...".

Imagen de elaboración propia

Sí, son ideas asociadas a la economía y extrapolables a otros muchos ámbitos de nuestra vida diaria y como no, a las funciones que, por cierto, ya deberían formar parte de esa cotidianidad.

Ambos conceptos están relacionados con la monotonía. Cuando a algo le damos la cualidad de monótono, queremos decir que no cambia, que no varía, que siempre tiene un mismo tono. Ya sabes, asociamos algo monótono a algo aburrido, precisamente por eso, porque mantiene unas mismas características, sin variación alguna.

Pues bien, en Matemáticas, cuando hablamos de estudiar la monotonía de una función, lo que buscamos es analizar los intervalos en los que no se produce cambio alguno entre crecimiento y decrecimiento.

Estudio de las características de f a través del análisis de su derivada

El crecimiento y el decrecimiento de una función son conceptos que ya hemos estudiado antes ¿lo recuerdas? Básicamente una función es **creciente** si, al aumentar la variable independiente, x , también aumenta el valor de la función, $f(x)$. Es **decreciente**, si al aumentar el valor de x , disminuye el de $f(x)$. No olvides que las gráficas se "leen" de izquierda a derecha.

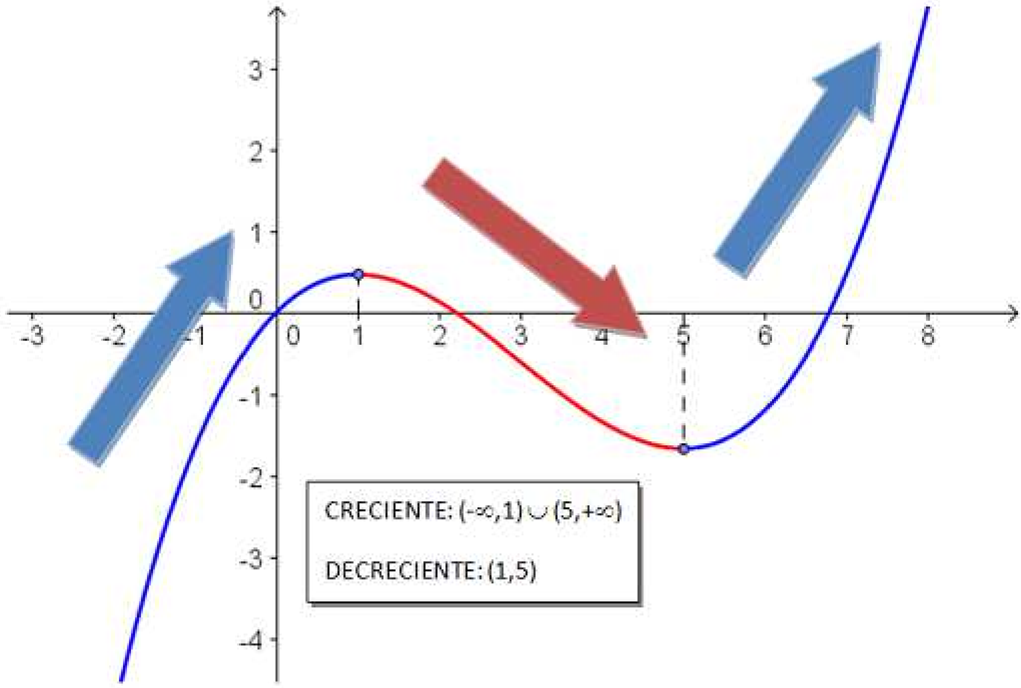


Imagen de elaboración propia

Veamos un ejemplo real: las siguientes gráficas representan la velocidad y la aceleración de un coche. Si te fijas en la primera gráfica, la velocidad aumenta hasta el minuto 10 y comienza a disminuir desde entonces.

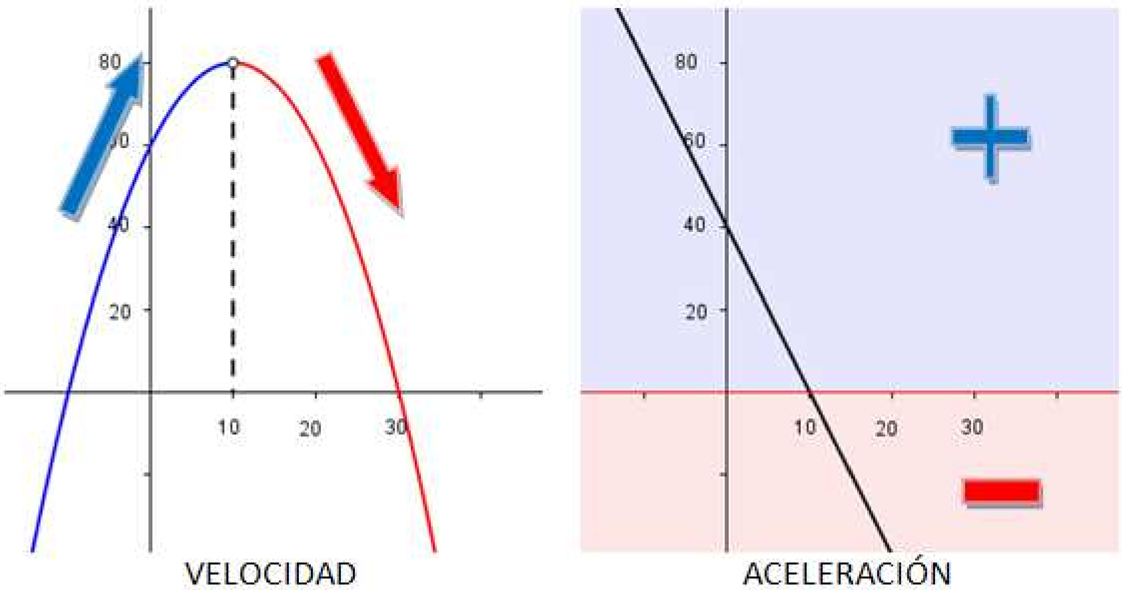


Imagen de elaboración propia

Mira ahora la gráfica de la aceleración ¿qué ocurría hasta el minuto 10? Que la aceleración era **positiva** (pues su gráfica queda por encima del eje de abscisas), y si la aceleración es positiva quiere decir que el coche acelera y por tanto su velocidad **aumenta**.

A partir del minuto 10, la aceleración es **negativa** (su gráfica queda por debajo del eje de abscisas), por tanto está decelerando y la velocidad **disminuye**.

Seguro que en física has estudiado que la aceleración es la derivada de la velocidad. Acabamos de ver una relación entre el signo de la aceleración, y el crecimiento y el decrecimiento de la velocidad. Esta misma relación se da entre cualquier función derivable, y su derivada.

Importante

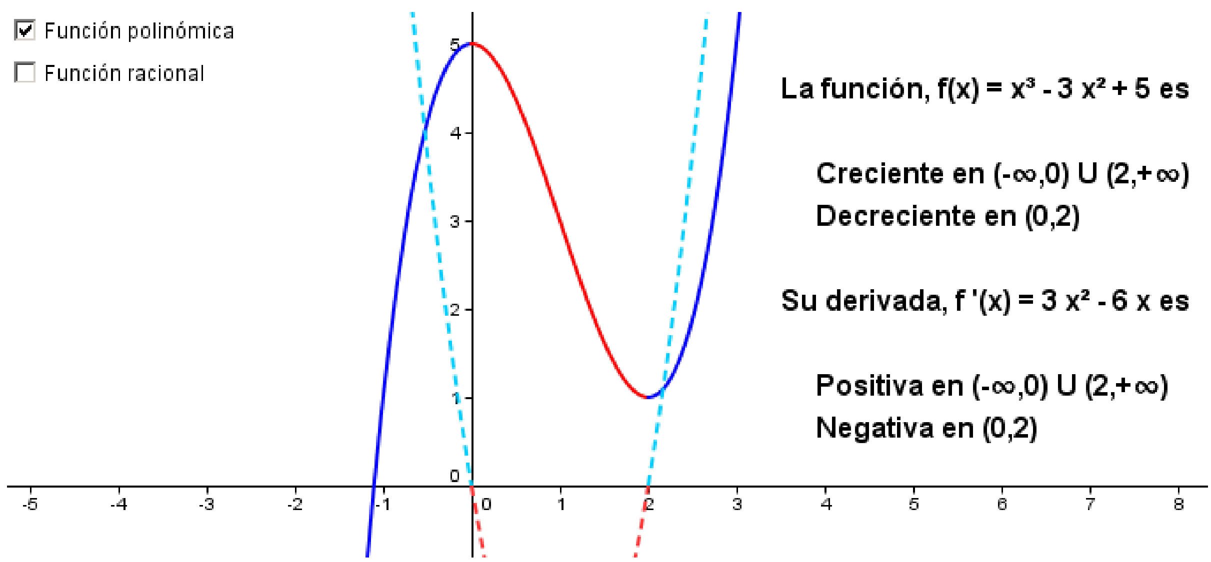
Cuando hablamos de **monotonía**, nos estamos refiriendo al comportamiento de una función respecto a su crecimiento o decrecimiento.

Sea f una función derivable en un intervalo (a, b), entonces es:

- **Creciente** en el intervalo (a, b) si $f'(x)>0$ en todo el intervalo (a, b)
- **Decreciente** en el intervalo (a, b) si $f'(x)<0$ en todo el intervalo (a, b)

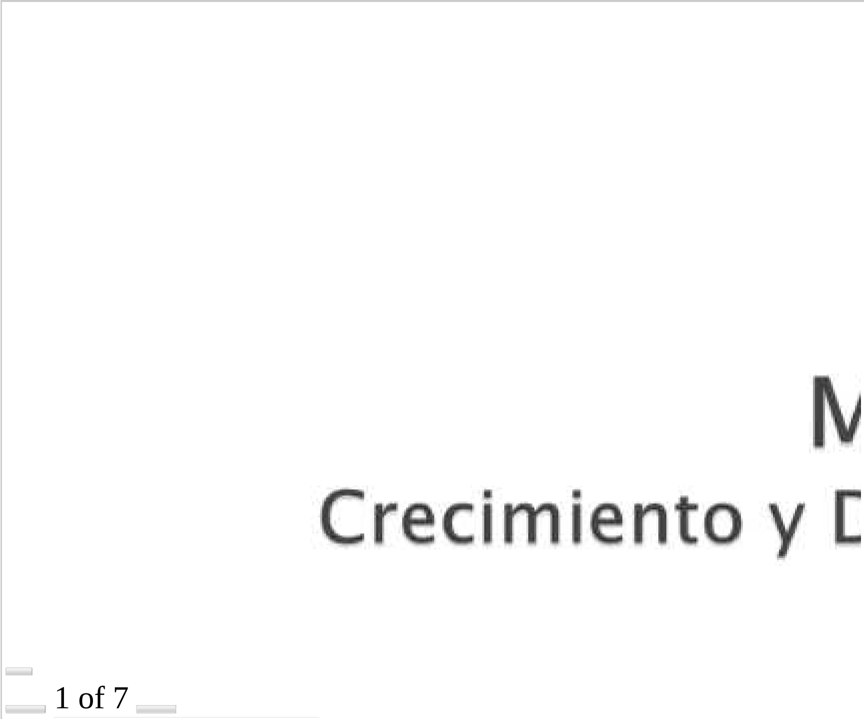
Si pinchas en la siguiente imagen, descubrías una escena de geogebra con dos ejemplos, una función polinómica y una racional, en la que puedes comprobar que se cumple lo que acabamos de ver:

Función f(x)	Derivada f ' (x)
Creciente	Positiva (con línea discontinua)
Decreciente	Negativa (con línea discontinua)



Captura de pantalla de una escena de GeoGebra de Saúl Valverde

Como ya hemos comentado, lo relevante del importante anterior, es que ya no es necesario dibujar la gráfica para estudiar la monotonía. A continuación tienes un ejercicio resuelto para que veas cómo hacerlo. Después hay uno que tendrás que resolver tú.



Presentación en Slideshare por saulvalper.

Comprueba lo aprendido

En una empresa están teniendo pérdidas económicas, por lo que deciden poner en marcha una serie de medidas a lo largo de los próximos 6 meses con las que pretenden remontar y obtener beneficios al finalizar dicho periodo.

Según sus cuentas, los beneficios obtenidos por la empresa al poner en marcha el plan vienen dados por la función $f(x)=2x^4-24x^3+92x^2-120x+60$ donde x es el número de meses.

Vamos a comprobar si con este plan de medidas la empresa mejorará los beneficios. Para ello tendrás que estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de los beneficios de la empresa.

- Función derivada:

  Para comenzar, calcula la derivada de la función f(x) y completa los espacios en blanco (incluye los signos correspondientes):
  f ' (x) = $\square$ x$^{\square}$ $\square$ x$^{\square}$ $\square$ x $\square$

- Obtener las raíces de la derivada:

  Resuelve la ecuación f ' (x) = 0 para obtener las raíces. Como es un polinomio de grado mayor que dos, tendrás que resolver con la Regla de Ruffini.

  Las soluciones son (de menor a mayor) x= $\square$, x= $\square$, x= $\square$.

- Estudiar el signo de la derivada:

  Hemos obtenido cuatro intervalos. Estudia el signo de la función derivada

En el intervalo (,) la derivada es (positiva/negativa) .

En el intervalo (,) la derivada es (positiva/negativa) .

En el intervalo (,+∞) la derivada es (positiva/negativa) .

- Estudiar la monotonía:

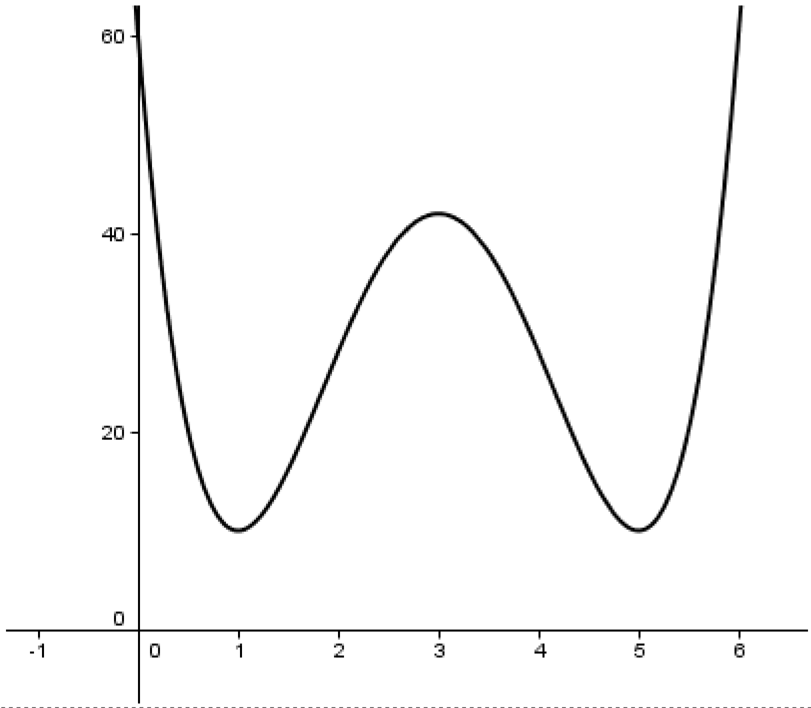
  Teniendo en cuenta los resultados del apartado anterior, podemos decir que en (-∞,)U(,) la función es (creciente/decreciente) , y que en (,)U(,+∞) la función es .

- Solución del problema:

  Como estamos en una situación real, donde el estudio se ha hecho para ver los resultados en 6 meses, podemos decir que la empresa comienza (disminuyendo/aumentando) beneficios. A la vista de cómo evolucionan los beneficios al finalizar los 6 meses ¿Crees que las medidas tomadas han sido efectivas? (sí/no) .

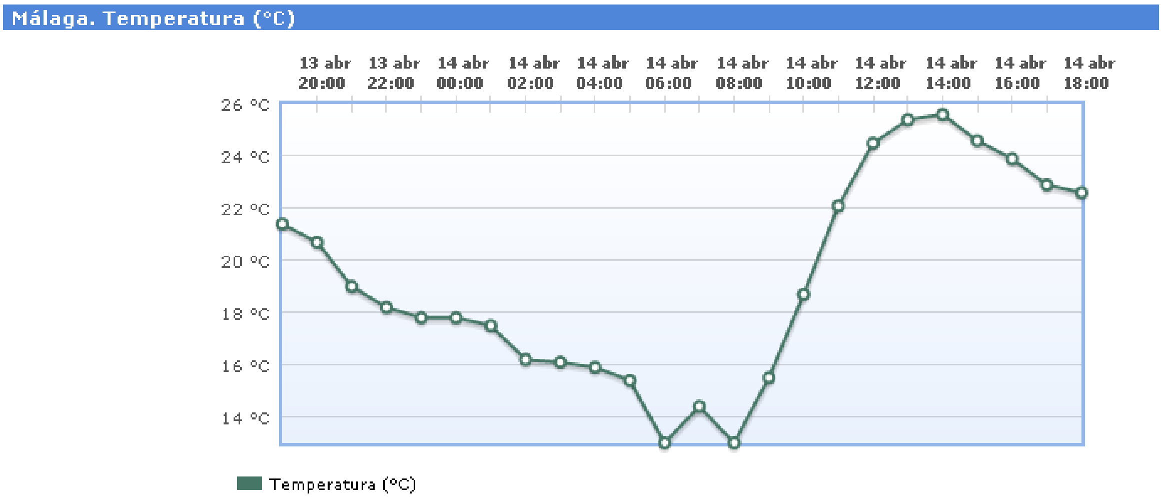
Enviar

Puedes comprobar tus resultados con la gráfica de la función



Extremos (máximos y mínimos)

Estamos acostumbrados a oir hablar de temperaturas máximas y mínimas todos los días en las noticias. De hecho, es una frase muy habitual la de "se ha alcanzado una máxima de 40º de temperatura". En la siguiente gráfica, de la AEMET, en la que podemos ver la temperatura que ha hecho en Málaga desde las 19h del 13 de abril a las 18h del día siguiente. Puedes comprobar que:



Captura de pantalla del AEMET del 14/04/12 en Málaga

- La temperatura **máxima** se alcanza a las 14h del 14 de abril (25,6ºC).
- La temperatura **mínima** se alcanza a las 6h y a las 8h del 14 de abril (13ºC).
- A las 7h del 14 de abril hay un **máximo relativo**, pues es la temperatura más alta en un pequeño periodo de tiempo (de las 6 a las 8h).

Para poder averiguar la temperatura máxima o mínima necesitamos una tabla de datos observados o una gráfica como la anterior, pues la temperatura local no la podemos expresar con una función derivable.

Veamos por tanto qué ocurre en la siguiente función, y comparemos con su derivada:

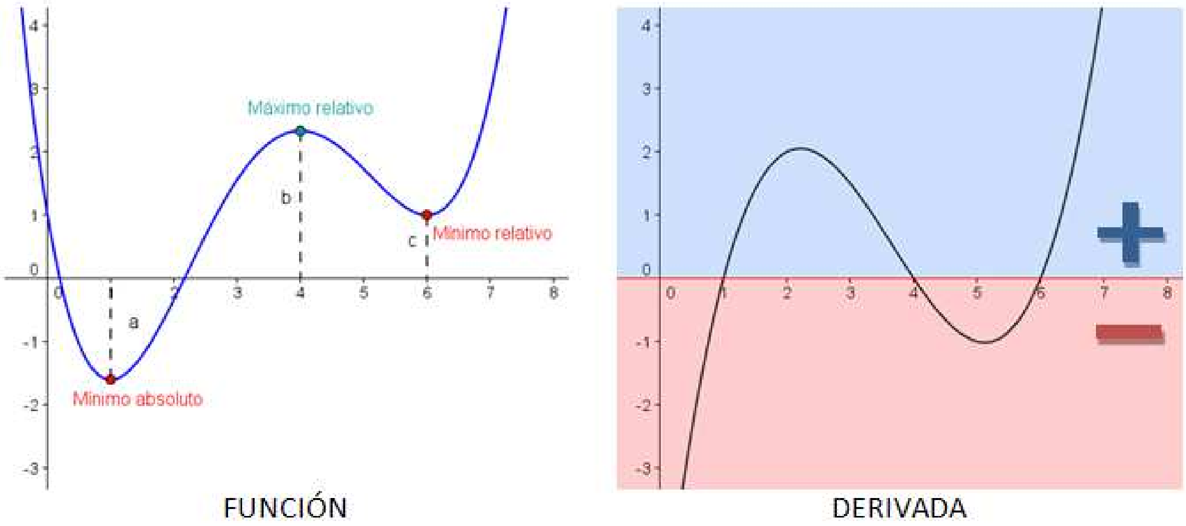


Imagen de elaboración propia

A la izquierda tenemos una función $f(x)$ y a la derecha su derivada $f'(x)$.

- **Mínimo**: si te fijas en los dos mínimos, a su izquierda la función es decreciente y a la derecha es creciente ¿qué quiere decir eso para la derivada? Como vimos en el apartado anterior, equivale a que a la izquierda la derivada es negativa y a la derecha positiva (como puedes ver en la gráfica de la derivada). Pues si en ese punto la derivada pasa de negativa a positiva, quiere decir que debe ser **nula**.
- **Máximo**: en el máximo pasa algo parecido, pero en este caso pasamos de función creciente a decreciente, es decir, de derivada positiva a negativa. Al igual que antes, en ese punto la

derivada debe ser **nula**.

Importante

Una función f , continua y derivable en un intervalo $(a\,,b)$, alcanza sus máximos y mínimos relativos en los puntos del intervalo $(a\,,b)$ en los que $f'(x)=0$. Además, si estudiamos la segunda derivada:

- Máximo relativo: $f'(x)=0$ y $f''(x)<0$.
- Mínimo relativo: $f'(x)=0$ y $f''(x)>0$.

Para que veas cómo podemos hallar máximos y mínimos con la derivada, mira los siguientes ejemplos:

Vídeo en YouTube por juanmemol

Presentación en Slideshare por saulvalper

Comprueba lo aprendido

Una conocida compañía de telefonía va a poner a la venta un nuevo modelo de teléfono móvil para el que prevé unas ventas para los primeros años que vienen dadas por la función $f(x)=\frac{40x}{x^2+1}$, donde x es el número de meses transcurridos desde que se saca a la venta y $f(x)$ se mide en millones de unidades vendidas.

a) Determina los posibles máximos o mínimos de la función.

- [ ] $x=-1$
- [ ] $x=0$
- [ ] $x=1$
- [ ] $x=2$

Mostrar retroalimentación

Solution

1. Correcto
2. Incorrecto
3. Correcto
4. Incorrecto

b) ¿En qué mes se alcanzará el mayor número de ventas?

El primer mes.

El segundo mes.

Mostrar retroalimentación

Solution

1. Incorrecto
2. Correcto
3. Incorrecto

La función tiene un mínimo, pero no aporta información relevante a nuestro problema, porque:

No es un dato necesario para la empresa.

El punto en el que se alcanza no pertenece al dominio del problema.

El punto en el que se alcanza no pertenece al dominio de la función.

Mostrar retroalimentación

Solution

1. Incorrecto
2. Correcto
3. Incorrecto

¿Qué número de unidades se prevé vender en el momento de máximas ventas?

10 millones de unidades.

20 millones de unidades.

40 millones de unidades.

Mostrar retroalimentación

Solution

1. Incorrecto
2. Correcto
3. Incorrecto

Ejercicio resuelto

Curso 2009/2010

Dada la función $f(x)=x-\frac{3}{x+2}$ determine las regiones de crecimiento y decrecimiento de la función.

Mostrar retroalimentación

Para estudiar el crecimiento y decrecimiento de una función, es decir, la monotonía, vamos a dividir el trabajo en cuatro pasos:

Paso 1: Cálculo del dominio de una función

Al estudiar cualquier característica de una función, es IMPRESCINDIBLE conocer antes su dominio, ya que este puede condicionar dicho estudio.

En nuestro caso, estamos hablando de una función racional, por lo que los únicos puntos conflictivos son aquellos que anulan el denominador. Es decir, tenemos que preguntarnos para qué valores de la x, $x+2=0$. La respuesta es sencilla, para $x=-2$. Por lo que $Dom\ f=\mathbb{R}-\{-2\}$.

Paso 2: Cálculo de la derivada

Al ser la suma de dos funciones, la derivada será la suma de las derivadas.

$$f'(x)=1-\frac{0\cdot(x+2)-1\cdot 3}{(x+2)^2}=1-\frac{-3}{(x+2)^2}=1+\frac{3}{(x+2)^2}$$

Paso 3: Cálculo de los puntos críticos

Estudiamos en qué puntos de la función la derivada se anula, es decir, $f'(x)=0$

$$1+\frac{3}{(x+2)^2}=0\rightarrow\frac{3}{(x+2)^2}=-1\rightarrow 3=-(x+2)^2\rightarrow 3=-x^2-4-4x\rightarrow x^2+4x+7=0$$

Si resolvemos la ecuación utilizando la fórmula para las ecuaciones de segundo grado, descubrimos que obtenemos una raíz cuadrada cuyo radicando es negativo, por lo que la ecuación no tiene solución. Por lo que la función no presenta ni máximos ni mínimos. Lo que no significa que no pueda haber cambios en su monotonía, ya que tenemos un punto donde la función no está definida.

Paso 4: Determinación de los intervalos de monotonía

Al no tener extremos los intervalos de crecimiento y decrecimiento nos los condiciona el dominio: $(-\infty,-2)$ y $(-2,+\infty)$.

¿Qué ocurre en $(-\infty,-2)$?

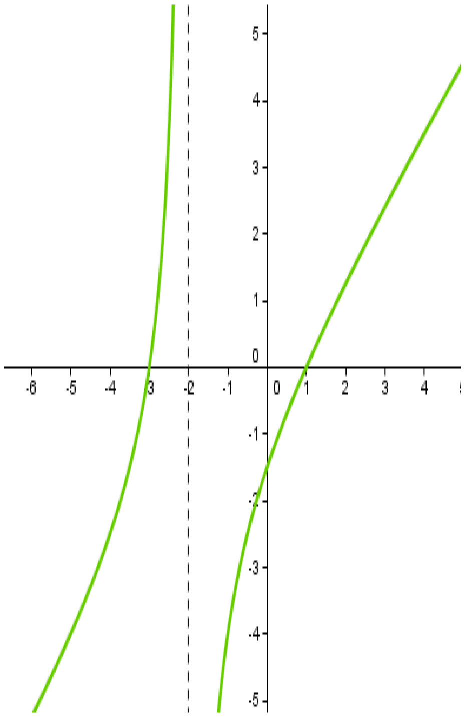
Para saberlo, elijamos un punto del intervalo y sustituimos en la derivada.

$f'(-3)=4$, al ser la derivada positiva, la función en ese intervalo es creciente.

Ahora tomamos un punto de este intervalo, por ejemplo x=-1 y sustituimos en la derivada.

$f'(-1)=4$ que, como en el caso anterior, la derivada es positiva, por lo que la función en este intervalo también es creciente.

En la siguiente representación de la función pues comprobar que los resultamos obtenidos son correctos:



Curvatura y puntos inflexión

Mira las curvas de las fotos. Otra de las características de las funciones es su curvatura, y los objetos que aparecen en las imágenes de abajo tienen diferente curvatura.

Cóncavo

Fotografía en Flickr por tutty bajo CC

Cóncavo (abajo) y Convexo (arriba)

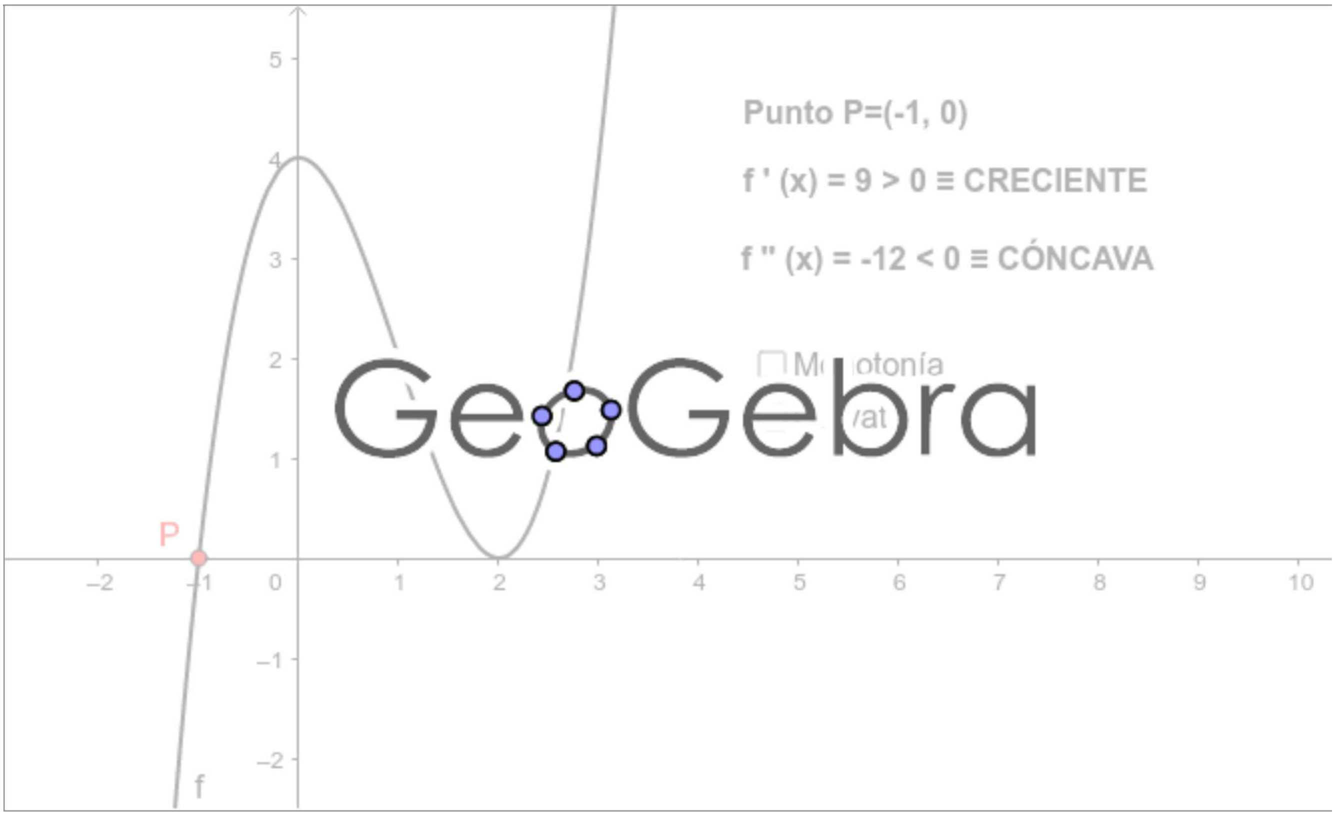
Fotografía en Flickr por MS-R bajo CC

Convexo

Fotografía en Flickr por jackace bajo CC

Si coges dos puntos de la parte superior del puente y los unes con una cuerda, esta quedará por debajo de la curva (es **cóncavo**). En el caso de la rampa, si unimos dos puntos la cuerda queda por encima (es **convexa**).

La curvatura de una función también se puede estudiar a partir de las derivadas. En la siguiente escena de geogebra, mueve el punto P a lo largo de la función para ver cómo varía la monotonía y la curvatura de la función.



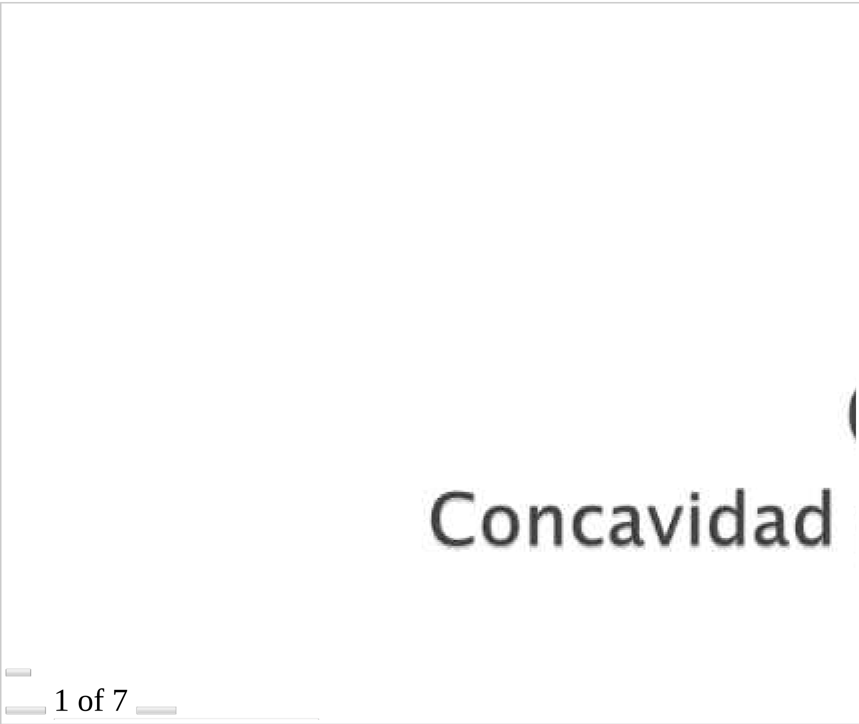
Observa el cambio en la primera y segunda derivada en los puntos de abscisa $x=-1$, $x=0$, $x=1$, $x=2$ y $x=3$, e intenta averiguar la relación. Pulsando las casillas de monotonía y curvatura verás los intervalos en los que cambian estas dos características.

Importante

En una función dos veces derivable, podemos estudiar la curvatura de la siguiente forma:

- **Convexa** (U): será convexa en los intervalos donde $f''(x)>0$.
- **Cóncava** (∩): será cóncava en los intervalos en los que $f''(x)<0$.
- **Puntos de inflexión**: son los puntos donde cambia la curvatura. Por tanto se cumple que $f''(x)=0$.

Y ahora, como hemos hecho en los apartados anteriores, veremos un ejercicio resuelto.



Presentación en Slideshare por saulvalper

¿Te atreves a estudiar la curvatura de una función? Aquí tienes un problema sencillo.

Comprueba lo aprendido

Necesitamos estudiar la curvatura de la función $f(x)=\dfrac{x^5+5x^4}{10}$ para un proyecto que estamos realizando. Completa los campos en blanco con los resultados que

- La segunda derivada es f ''(x) = ☐ x^3+ ☐ x^2
- La función f(x) es cóncava en (-∞, ☐)
- La función f(x) es convexa en (☐ ,+∞)
- Tiene un punto de inflexión en P=(☐ , ☐)
- ¿Existe punto de inflexión en x=0? (sí/no) ☐

Enviar

Observa que en x=0 se cumple que f ''(0)=0, pero como no cambia la curvatura, no hay punto de inflexión en dicho punto.

Ejercicio resuelto

¡Cuidado con los picos! Todo lo que hemos visto funciona perfectamente si estamos trabajando con funciones continuas y derivables, pero por desgracia no siempre podemos contar con que nuestra función tenga esas condiciones... Por ejemplo, observa la siguiente gráfica:

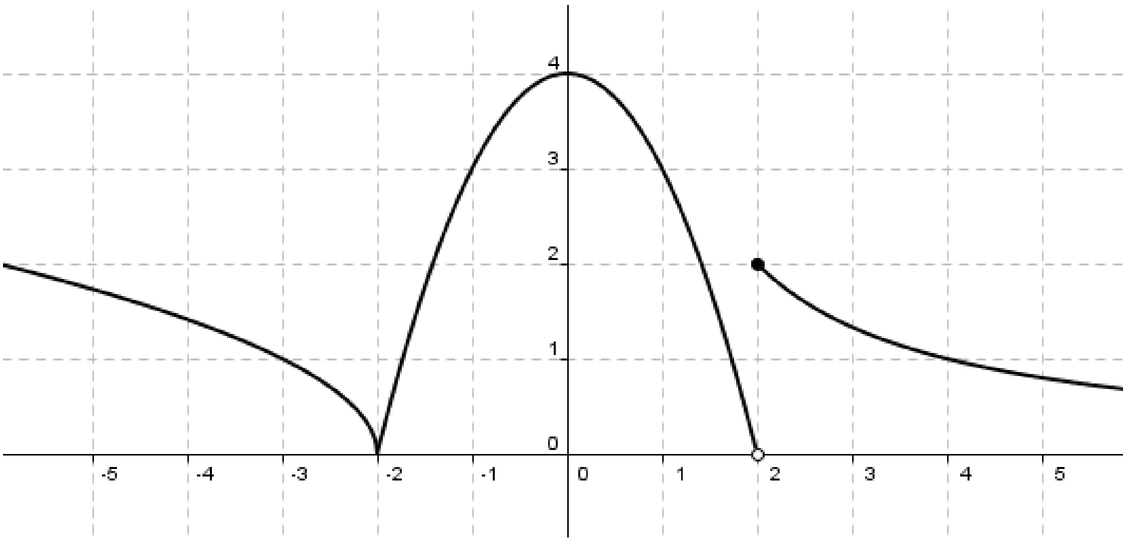


Imagen de elaboración propia

Por la gráfica, ¿cuáles son sus máximos y mínimos absolutos y relativos? (La parte de la izquierda no tiene ningúna asíntotal horizontal, y por tanto no se estabiliza alrededor de ningún valor).

Mostrar retroalimentación

Mínimo absoluto: en $x=-2$, ya que en $x=2$ el valor obtenido no es 0 sino 2.

Máximo relativo: en $x=0$ se alcanza un máximo relativo, y en $x=2$ otro (es el punto más alto en un pequeño entorno).

Mínimo relativo: no existe.

¿En qué intervalos es creciente y en cuáles decreciente?

Mostrar retroalimentación

Decreciente: en (-∞,-2)U(0,+∞)

Creciente en (-2,0)

¿Dónde es cóncava y dónde convexa?

Mostrar retroalimentación

Es cóncava en (-∞,2) y convexa en (2,+∞).

La función que tenemos representada es:

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{-x-2} & si \quad x<-2\\ 4-x^2 & si \quad -2\le x<2\\ \dfrac{4}{x} & si \quad x\ge 2\end{cases} \qquad f'(x)=\begin{cases}\dfrac{-1}{2\sqrt{-x-2}} & si \quad x<-2\\ -2x & si \quad -2<x<2\\ -\dfrac{4}{x^2} & si \quad x>2\end{cases}$$

Esta función es continua en $\mathbb{R}-\{2\}$ y derivable en $\mathbb{R}-\{-2,2\}$.

Sabemos que los máximos y los mínimos cumplen que $f'(x)=0$, pero en $x=-2$ no existe derivada, y sin embargo tenemos un mínimo. Igualmente nos ocurre en $x=2$. Si igualamos a cero la derivada, en sus tres trozos, sólo obtendremos un punto posible: $x=0$ ¿Qué ocurre entonces?

Para estudiar los máximos y mínimos de una función que no es derivable, hay que estudiar:

- Los puntos en los que se anula la primera derivada en la parte que sea una función derivable.
- Los puntos donde la función no es derivable.

Nos ocurrirá lo mismo para los puntos de inflexión.

Estudia el crecimiento y decrecimiento con la primera derivada en cada uno de los trozos de la función.

Mostrar retroalimentación

- En el primer trozo la función derivada es siempre negativa, por lo que f es decreciente si $x<-2$.
- En el segundo trozo la función derivada es positiva en (-2,0) y negativa en (0,2), luego es creciente en (-2,0) y decreciente en (0,2).
- En el tercer trozo la función derivada siempre es negativa, luego f es

La representación gráfica de funciones se ha convertido en un ejercicio clásico. Lo encontramos en las aulas y en las pruebas de acceso a distintas enseñanzas. El motivo de la recurrencia a este tipo de ejercicios, es que para resolverlo es necesario que el alumno o el examinado desarrolle y demuestre muchas y diferentes destrezas. Por ejemplo:

- Conocimientos. Conozca los protocolos de actuación para enfrentarse a este tipo de problemas. Es decir, si por ejemplo quiero estudiar la monotonía debo recurrir a la primera derivada.
- Cálculo. Debe saber derivar, resolver ecuaciones, calcular límites...
- Sea capaz de sintetizar la información que ha obtenido en una representación.

Y todo esto en una única actividad. Por todo ello es IMPRESCINDIBLE que seas meticuloso y cuidadoso en todos los pasos que des.

Nosotros estamos dispuestos a ayudarte con varios recursos:

¿Cómo enfrentarse a un problema de representación de funciones?

PASO 1: Detectar qué tipo de función nos traemos entre manos.

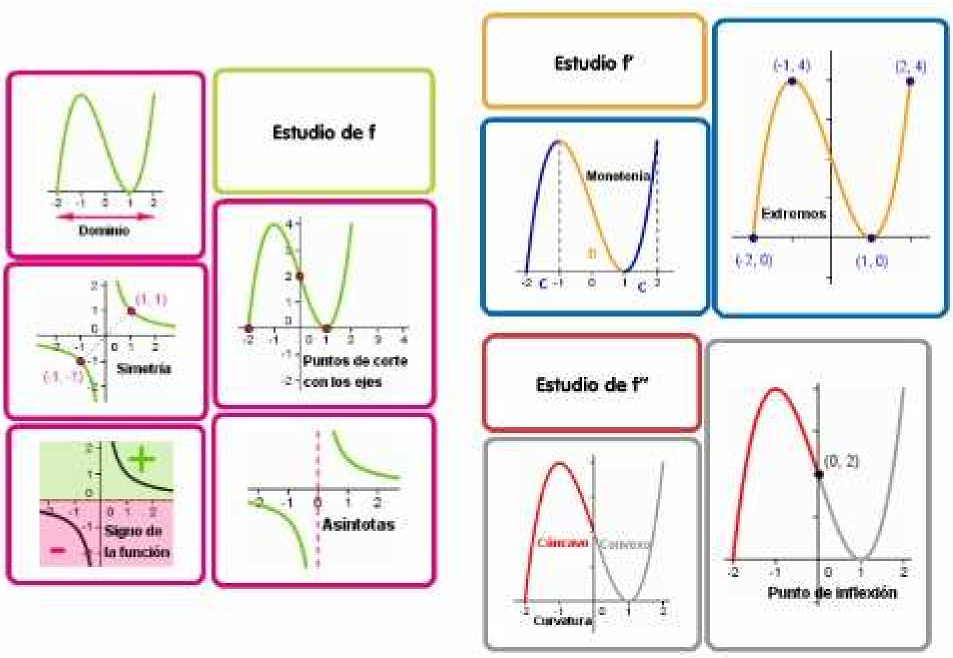
Ya vimos en el tema 1, que para representar una función no siempre hay que recurrir al estudio de sus características a través de la primera y segunda derivada. Por ejemplo, para representar una función polinómica de grado 2 (parábola), basta con averiguar su vértice, su orientación y algunos puntos de la función.

PASO 2: Hacer un análisis del tiempo del que disponemos

Aunque lo ideal sería que estudiáramos todas las características de la función, no podemos dejar a un lado que la representación de funciones puede resultar un ejercicio largo. Por eso en caso de no disponer de mucho tiempo, debemos priorizar unas propiedades frente a otras. Nunca podemos olvidar: Dominio de la función, asíntotas y monotonía, estas tres características nos permitirán tener un esbozo fiable de nuestra función.

¿Qué no debes olvidar?

A continuación, un resumen:



Imágenes de elaboración propia. Haz clic en la imagen para ampliar

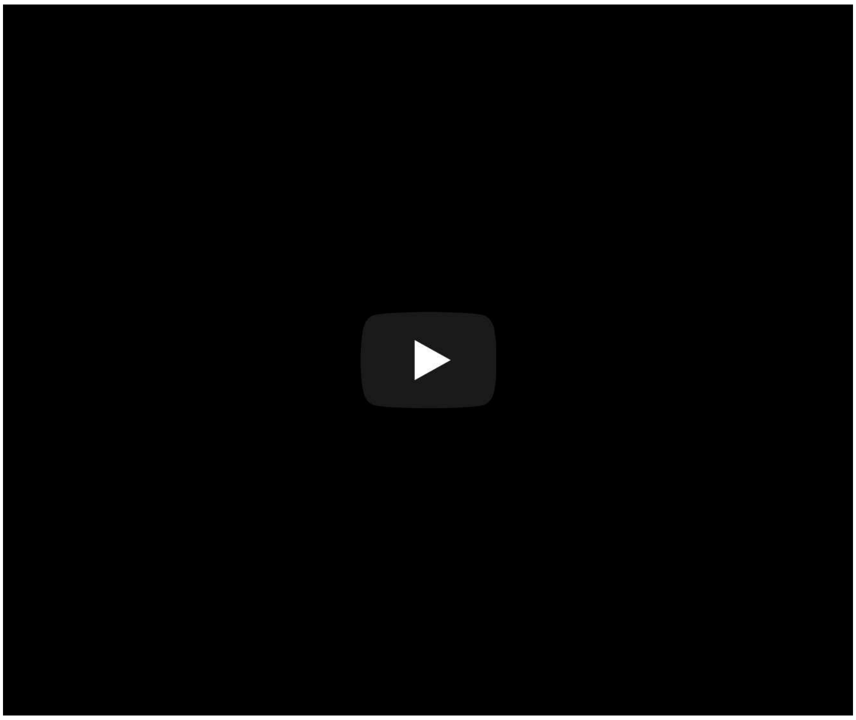
¿Cómo debes hacerlo?

Como mencionábamos anteriormente, para representar funciones elementales no es necesario realizar un estudio analítico profundo.

Sin embargo, como ya habrás imaginado este sistema no es lo suficientemente eficaz para otro tipo de funciones que pueden presentar discontinuidades, asíntotas, cambios en su monotonía... ya que podríamos estar perdiendo información.

En la siguiente presentación, puedes ver cómo si a la expresión analítica de una función, la sometemos a un estudio pormenorizado de sus propiedades, conseguiremos una representación fiel de la función:

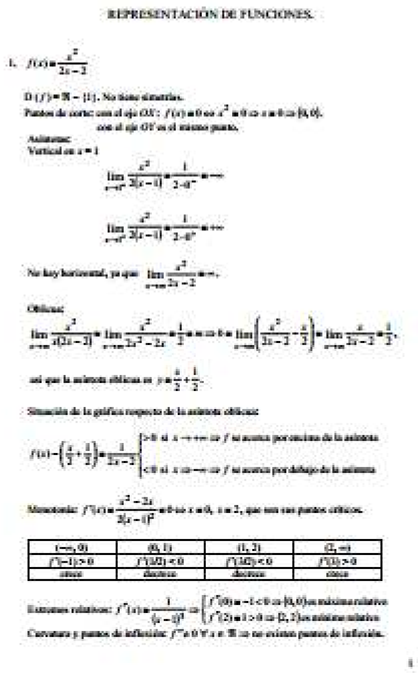
Presentación en Google Docs por Patricia Pérez



Vídeo en YouTube por juanmemol

Y ahora a practicar...

En el siguiente pdf puedes encontrar 12 ejercicios resueltos con funciones de distintos tipos: racionales, exponenciales, logarítmicas... explicados con todo lujo de detalle.



REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES.

1. $f(x)=\dfrac{x^2}{2x-2}$

$D(f)=\mathbb{R}-\{1\}$. No tiene simetrías.

Puntos de corte: con el eje OX: $f(x)=0 \Leftrightarrow x^2=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow (0,0)$.
con el eje OY es el mismo punto.

Asíntotas:
Vertical en $x=1$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2}{2(x-1)}=\frac{1}{2\cdot 0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2}{2(x-1)}=\frac{1}{2\cdot 0^+}=+\infty$$

No hay horizontal, ya que $\lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2}{2x-2}=\infty$.

Oblicuas:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x(2x-2)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{2x^2-2x}=\frac{1}{2}=m \Rightarrow b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2}{2x-2}-\frac{x}{2}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{2x-2}=\frac{1}{2},$$

así que la asíntota oblicua es $y=\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}$.

Situación de la gráfica respecto de la asíntota oblicua:

$$f(x)-\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2x-2}\begin{cases}>0 \text{ si } x\to+\infty \Rightarrow f \text{ se acerca por encima de la asíntota}\\ <0 \text{ si } x\to-\infty \Rightarrow f \text{ se acerca por debajo de la asíntota}\end{cases}$$

Monotonía: $f'(x)=\dfrac{x^2-2x}{2(x-1)^2}=0 \Leftrightarrow x=0,\ x=2$, que son sus puntos críticos.

$(-\infty,0)$	$(0,1)$	$(1,2)$	$(2,\infty)$
$f'(-1)>0$	$f'(1/2)<0$	$f'(3/2)<0$	$f'(3)>0$
crece	decrece	decrece	crece

Extremos relativos: $f''(x)=\dfrac{1}{(x-1)^3} \Rightarrow \begin{cases} f''(0)=-1<0 \Rightarrow (0,0) \text{ es máximo relativo}\\ f''(2)=1>0 \Rightarrow (2,2) \text{ es mínimo relativo}\end{cases}$

Curvatura y puntos de inflexión: $f''\neq 0\ \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow$ no existen puntos de inflexión.

1

Haz clic en la imagen para descargar

Si has reparado en los exámenes de otros años, habrás descubierto que el cálculo de derivadas o aplicaciones, es una pregunta recurrente en las pruebas, por eso es imprescindible que adquieras soltura y desarrolles destrezas en este campo y así evitar errores.

Como en unidades anteriores en este apartado te ofrecemos, unas aplicaciones concretas de Wiris y GeoGebra al cálculo de derivadas y a la representación de funciones. Además, puedes ampliar conocimientos con las "Curiosidades" y "Para saber más".

Importante

Recuerda la relación existente entre los distintos conceptos que hemos visto en el tema.

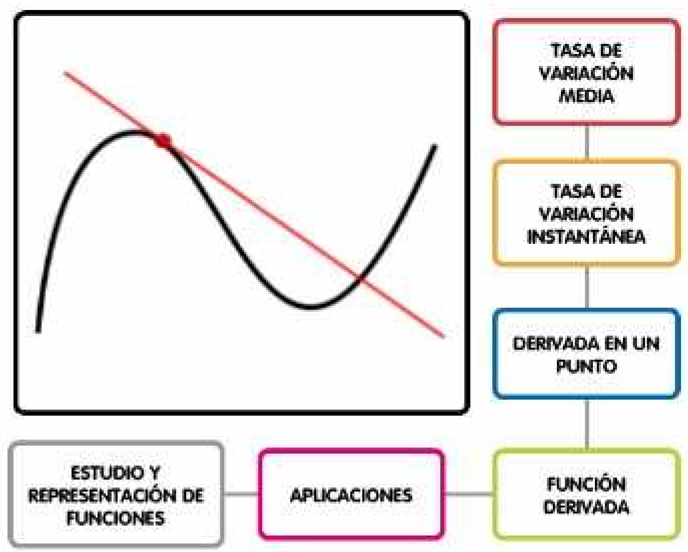


Imagen de elaboración propia

Como ya sabes no dispondremos de estas herramientas en la prueba, pero si en algún momento decides practicar con ejercicios de los que no tengas la solución, esto te ayudará a corregirlos.

Derivar

Es necesario aprender a derivar manualmente, pero en la actualidad hay multitud de programas que nos simplifican y nos ayudan a realizar comprobaciones. A continuación, tenemos dos enlaces a una página del INTEF, donde podemos encontrar un pequeño manual de cómo derivar con Geogebra y algunos ejercicios:

Derivar con:
GeoGebra

¿Nos animamos a comprobar los resultados de los vídeos anteriores en ambos programas?

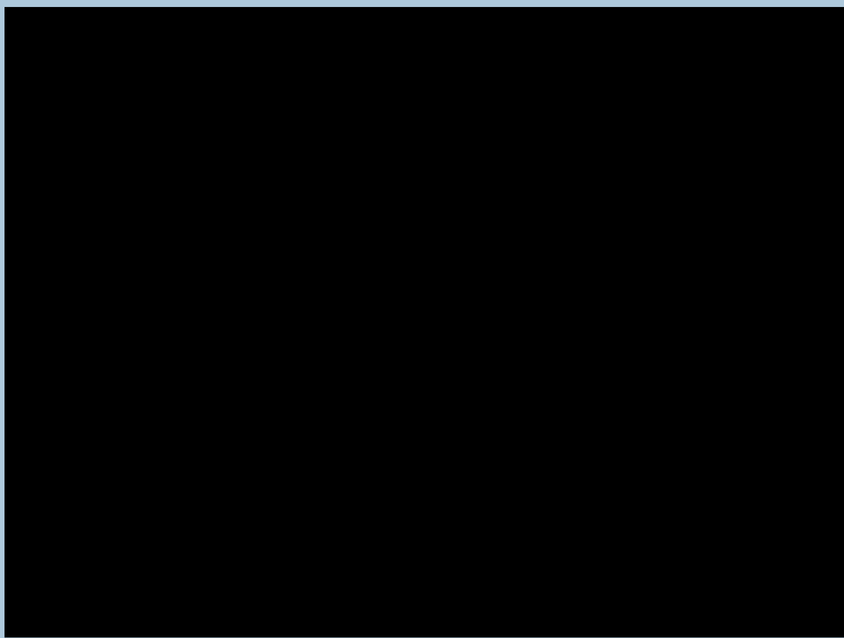
Representar funciones con GeoGebra

Tutorial de GeoGebra para representar funciones por **Jesús Fernández**

Curiosidad

Derivadas y aplicaciones

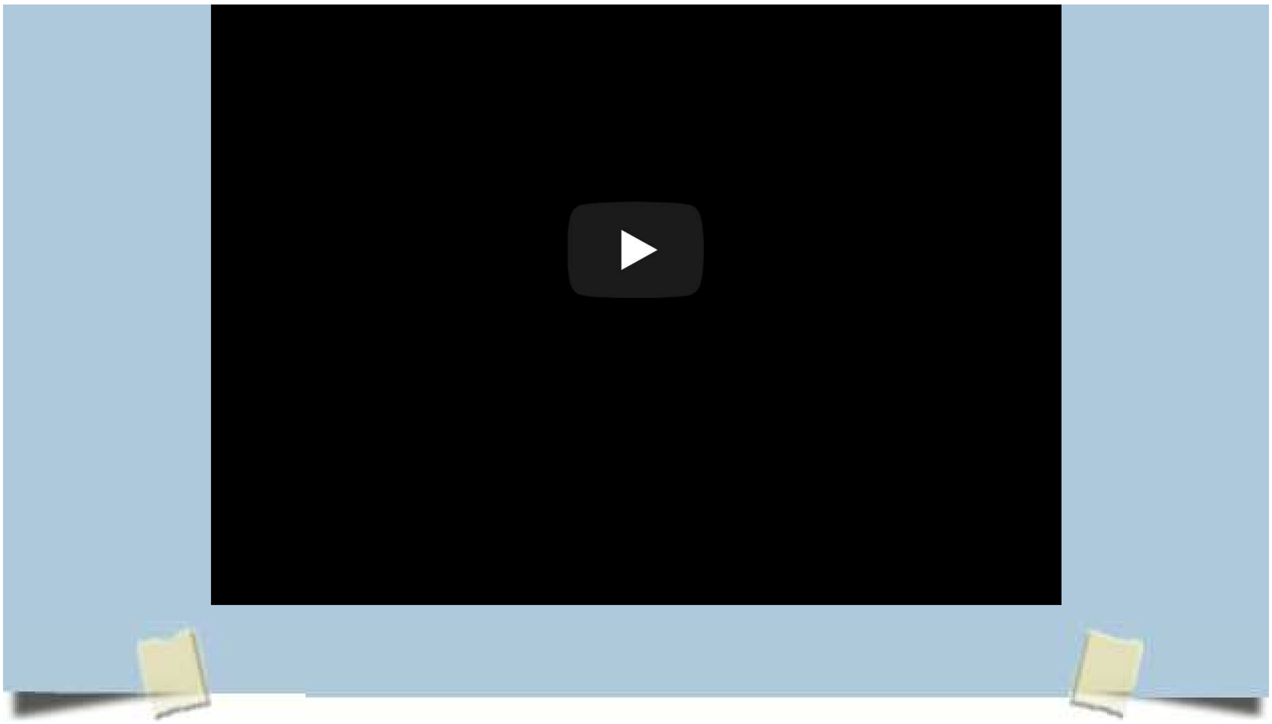
Un poco de música que desearás no olvidar para poder tararearla en la prueba:



Curiosidad

Crecimiento y decrecimiento

Aquí te dejamos un vídeo en el que se aplicarán las funciones al estudio de una población marina. Podrás repasar los conceptos de crecimiento y decrecimiento en un contexto cotidiano:



Para saber más

- En el siguiente cuadro puedes observar un resumen gráfico de casi todo lo tratado a lo largo del tema. Pulsa sobre los botones que aparecen, que te guiarán por el resumen:

- En el siguiente enlace al Proyecto Descartes, puedes practicar más y ampliar tus conocimientos con distintos problemas de aplicaciones de la derivada que podrás resolver con ayuda de escenas interactivas de Descartes:

Aplicaciones de la derivada