REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES.

1. $f(x)=\dfrac{x^2}{2x-2}$

D (f) = $\Re - \{1\}$. No tiene simetrías.

Puntos de corte: con el eje OX : $f(x)=0 \Leftrightarrow x^2=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow (0,0)$.

con el eje OY es el mismo punto.

Asíntotas:

Vertical en $x = 1$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2}{2(x-1)} = \frac{1}{2\cdot 0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2}{2(x-1)} = \frac{1}{2\cdot 0^+} = +\infty$$

No hay horizontal, ya que $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{2x-2} = \infty$.

Oblicua:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x(2x-2)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{2x^2-2x} = \frac{1}{2} = m \Rightarrow b = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{2x-2}-\frac{x}{2}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{2x-2} = \frac{1}{2},$$

así que la asíntota oblicua es $y=\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}$.

Situación de la gráfica respecto de la asíntota oblicua:

$$f(x)-\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2x-2}\begin{cases} >0 \text{ si } x\to+\infty \Rightarrow f \text{ se acerca por encima de la asíntota}\\ <0 \text{ si } x\Rightarrow-\infty \Rightarrow f \text{ se acerca por debajo de la asíntota}\end{cases}$$

Monotonía: $f'(x)=\dfrac{x^2-2x}{2(x-1)^2}=0 \Leftrightarrow x=0,\ x=2$, que son sus puntos críticos.

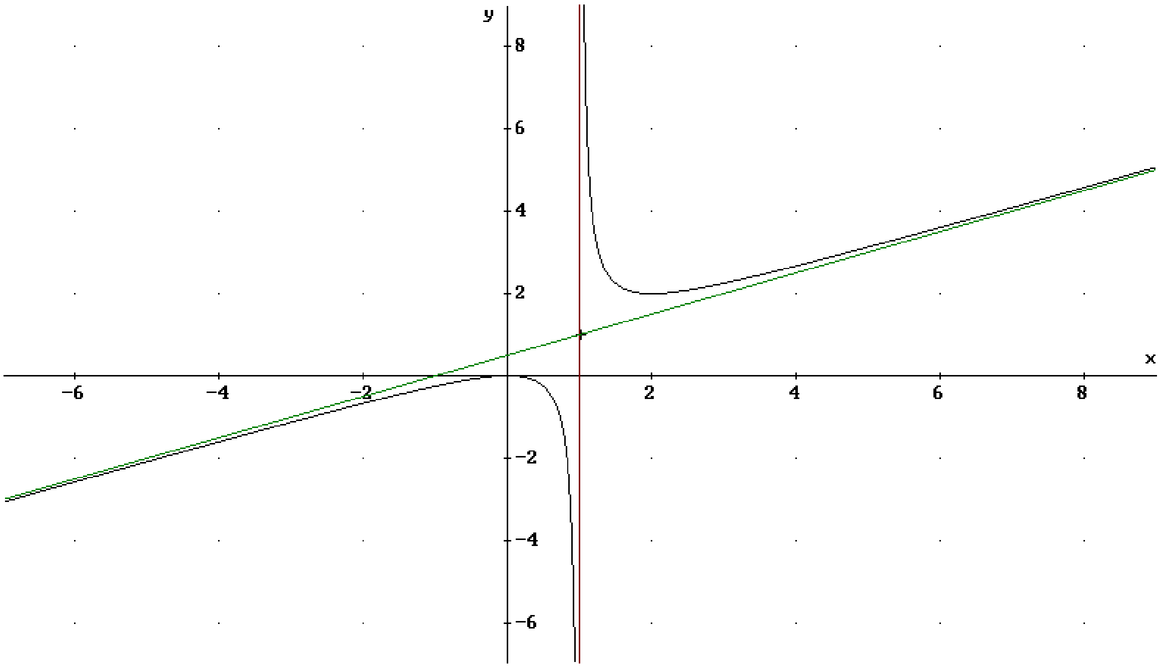
(–∞, 0)	(0, 1)	(1, 2)	(2, ∞)
$f'(-1) > 0$	$f'(1/2) < 0$	$f'(3/2) < 0$	$f'(3) > 0$
crece	decrece	decrece	crece

Extremos relativos: $f''(x)=\dfrac{1}{(x-1)^3} \Rightarrow \begin{cases} f''(0)=-1<0 \Rightarrow (0,0) \text{ es máximo relativo}\\ f''(2)=1>0 \Rightarrow (2,2) \text{ es mínimo relativo}\end{cases}$

Curvatura y puntos de inflexión: $f'' \neq 0\ \forall\, x \in \Re \Rightarrow$ no existen puntos de inflexión.

$(-\infty, 1)$	$(1, \infty)$
$f''(0) < 0$	$f''(2) > 0$
cóncava	convexa

La representación gráfica de la función es:



2. $f(x) = x^2 e^x$

D (f) = $\Re$. No tiene simetrías.

Puntos de corte: con el eje OX : $x^2 e^x = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0$, pues $e^x \neq 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (0, 0)$.
con el eje OY es el mismo punto.

Asíntotas: no tiene verticales.

Horizontal: $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 e^x = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 e^x = 0$, así que hay asíntota horizontal

en y = 0, pero sólo por la izquierda.

No tiene oblicuas porque $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 e^x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} x e^x = \infty$.

Monotonía: $f'(x) = e^x \left(x^2 + 2x\right) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Rightarrow$ $x = -2$, $x = 0$, que son sus puntos críticos.

$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, \infty)$
$f'(-3) > 0$	$f'(-1) < 0$	$f'(1) > 0$
crece	decrece	crece

Extremos relativos:

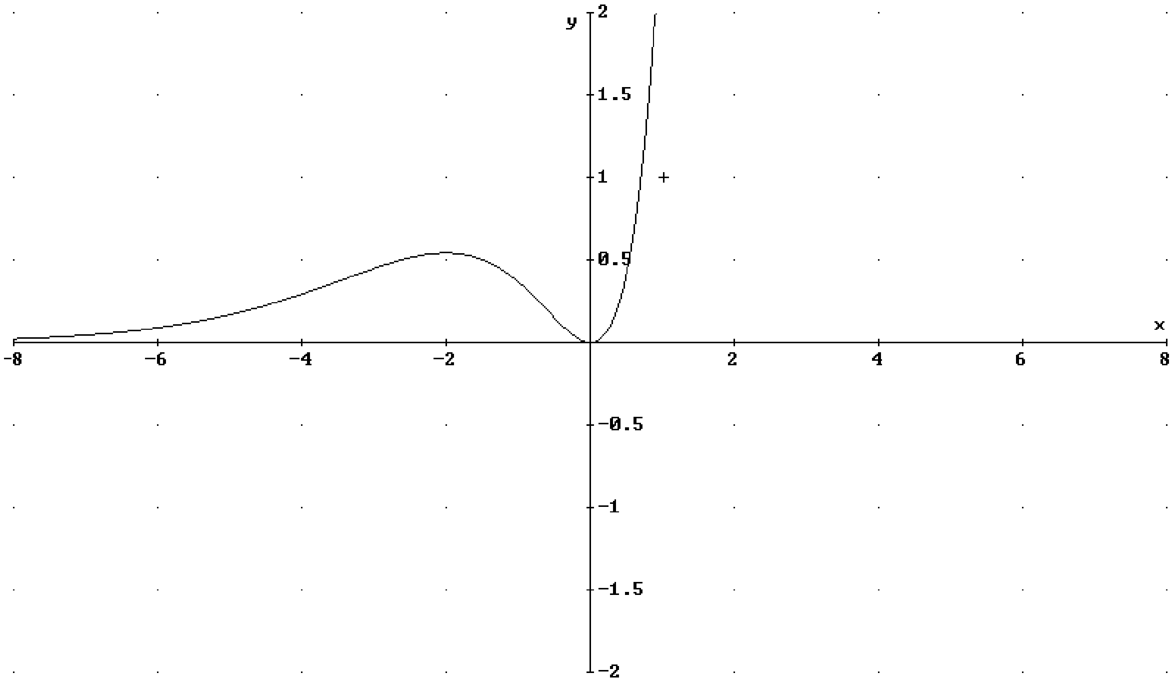
$$f''(x) = e^x\left(x^2 + 4x + 2\right) \Rightarrow \begin{cases} f''(0) = 2 > 0 \Rightarrow (0,0) \text{ es mínimo relativo} \\ f''(-2) = -2e^{-2} < 0 \Rightarrow \left(-2, 4e^{-2}\right) \text{es máximo relativo} \end{cases}$$

Curvatura y puntos de inflexión:

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 + \sqrt{2} \cong -0.59,\ x = -2 - \sqrt{2} \cong -3.41$,
luego los puntos de inflexión son (aproximadamente) (–3.41, 0.38) y (–0.59, 0.19).

$(-\infty,-2-\sqrt{2})$	$(-2-\sqrt{2},-2+\sqrt{2})$	$(-2+\sqrt{2},+\infty)$
$f''(-4) > 0$	$f''(-1) < 0$	$f''(0) > 0$
convexa	cóncava	convexa

La representación gráfica de la función es:



3. $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

D (*f*) = $\Re$. No tiene simetrías.
Puntos de corte: con el eje OX : $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1, x = 2$ y $x = -1 \Rightarrow$ los puntos de corte son (1, 0), (2, 0) y (–1,0).

con el eje OY : $f(0) = 2 \Rightarrow (0, 2)$.

No tiene asíntotas porque es un polinomio.

Monotonía: $f'(x) = 3x^2 - 4x - 1 = 0 \Rightarrow\ x = \dfrac{2+\sqrt{7}}{3} \cong 1.5$, $x = \dfrac{2-\sqrt{7}}{3} \cong -0.2$,
que son sus puntos críticos.

$\left(-\infty, \frac{2-\sqrt{7}}{3}\right)$	$\left(\frac{2-\sqrt{7}}{3}, \frac{2+\sqrt{7}}{3}\right)$	$\left(\frac{2+\sqrt{7}}{3}, +\infty\right)$
$f'(-1) > 0$	$f'(0) < 0$	$f'(2) > 0$
crece	decrece	crece

Extremos relativos:

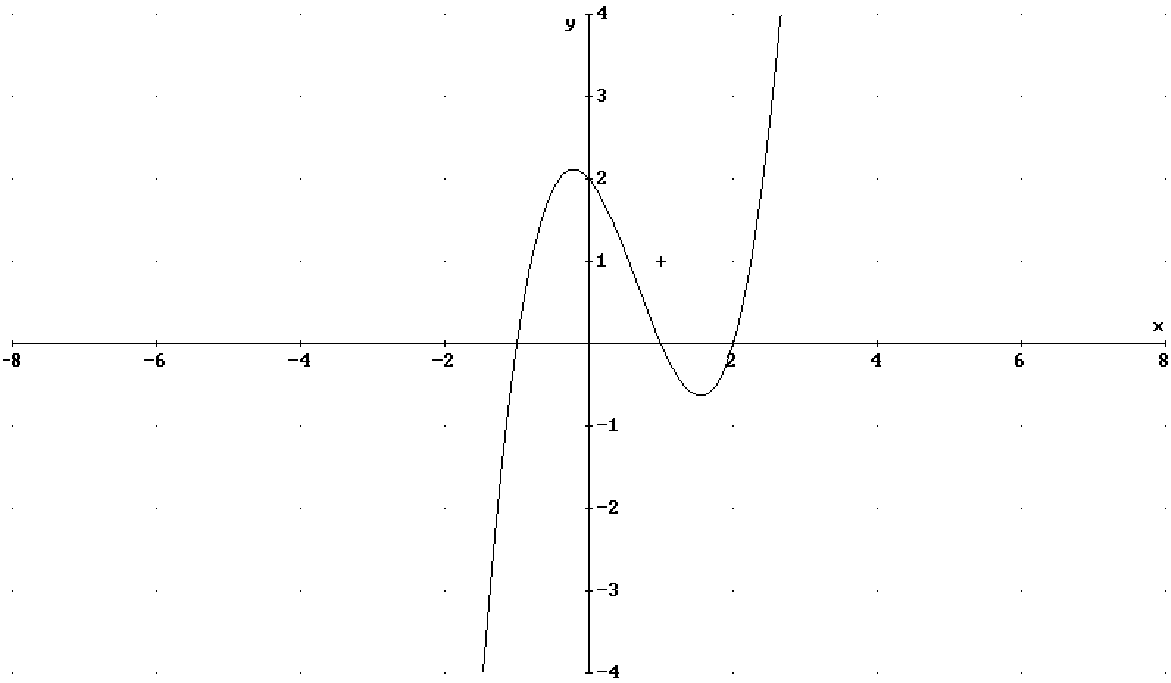
$$f''(x) = 6x - 4 \Rightarrow \begin{cases} f''(-0.2) \cong -5.2 < 0 \Rightarrow (-0.2, 2.1) \text{ es máximo relativo} \\ f''(1.5) \cong 5 > 0 \Rightarrow (1.5, -0.6) \text{ es mínimo relativo} \end{cases}$$

Curvatura y puntos de inflexión:

$f''(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3} \Rightarrow \left(\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right)$ es el punto de inflexión.

$\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$	$\left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$
$f''(0) < 0$	$f''(1) > 0$
cóncava	convexa

La representación gráfica de la función es:



4. $f(x) = \dfrac{1-x}{x^2}$

D (f) = $\Re - \{0\}$. No tiene simetrías.
Puntos de corte: con el eje OX : $f(x) = 0 \Rightarrow 1 - x = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow (1, 0)$.
con el eje OY no existe punto de corte.

Asíntotas:
Vertical en $x = 0$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1-x}{x^2} = \frac{1}{(0^-)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1-x}{x^2} = \frac{1}{(0^+)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Horizontal en $y = 0$, ya que $\lim_{x\to\infty} \frac{1-x}{x^2} = 0$.

Situación de la gráfica respecto de la asíntota horizontal:

$$f(x) - 0 = \frac{1-x}{x^2}\begin{cases} < 0 \text{ si } x \to +\infty \Rightarrow f \text{ se acerca por debajo de la asíntota} \\ > 0 \text{ si } x \Rightarrow -\infty \Rightarrow f \text{ se acerca por encima de la asíntota} \end{cases}$$

No tiene asíntotas oblicuas.

Monotonía: $f'(x) = \frac{x-2}{x^3} = 0 \Leftrightarrow x = 2$, que es su único punto crítico.

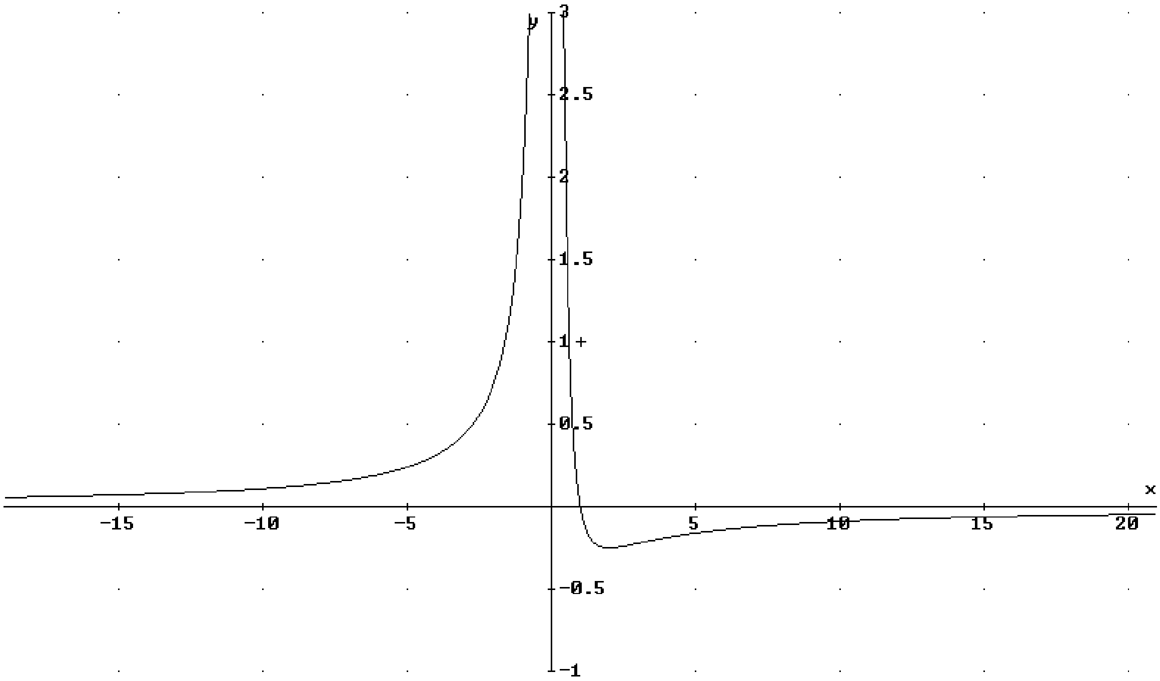
$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, +\infty)$
$f'(-1) > 0$	$f'(1) < 0$	$f'(3) > 0$
crece	decrece	crece

Extremos relativos: $f''(x) = \frac{6-2x}{x^4} \Rightarrow f''(2) = \frac{1}{8} > 0 \Rightarrow \left(2, -\frac{1}{4}\right)$ es mínimo relativo

Curvatura y puntos de inflexión: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow \left(3, -\frac{2}{9}\right)$ es punto de inflexión.

$(-\infty, 0)$	$(0, 3)$	$(3, +\infty)$
$f''(-1) > 0$	$f''(1) > 0$	$f''(4) < 0$
convexa	convexa	cóncava

La representación gráfica de la función es:



5. $f(x) = L(x^2 - 4)$

$D(f)$: la condición es $x^2 - 4 > 0 \Rightarrow D(f) = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

Simetría: $f(-x) = L((-x)^2 - 4) = L(x^2 - 4) = f(x)$, así que la función es par.

Puntos de corte:
con el eje OX: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{5} \in D(f) \Rightarrow \left(-\sqrt{5}, 0\right)$ y $\left(\sqrt{5}, 0\right)$.
con el eje OY no hay puntos de corte, ya que no existe $f(0)$.

Asíntotas:

Verticales en $x = -2^-$ y $x = 2^+ \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to -2^-} L(x^2 - 4) = L(0^+) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+} L(x^2 - 4) = L(0^+) = -\infty \end{cases}$

No hay asíntota horizontal, ya que $\lim\limits_{x\to\infty} L(x^2 - 4) = +\infty$.

Tampoco hay oblicua, porque $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{L(x^2-4)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{2x}{x^2-4}}{1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x}{x^2-4} = 0$.

Monotonía: $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 4} = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \notin D(f) \Rightarrow$ no hay extremos.

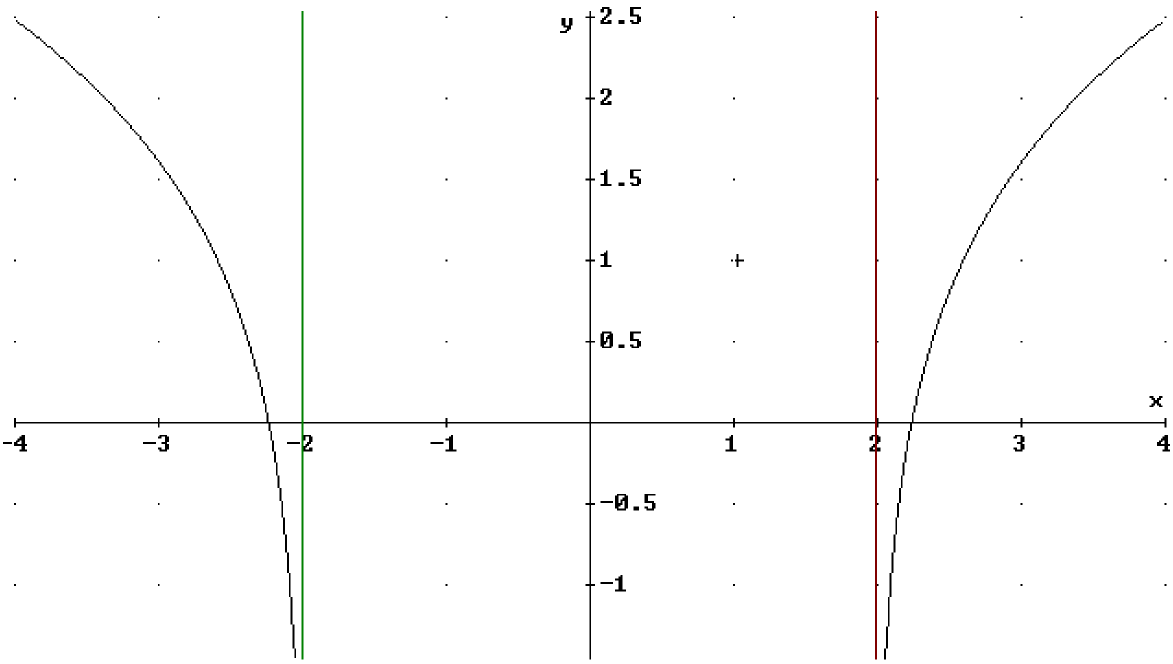
$(-\infty, -2)$	$(2, +\infty)$

$f'(-3) < 0$	$f'(3) > 0$
decrece	crece

Curvatura y puntos de inflexión: $f''(x) = \dfrac{-2x^2 - 8}{\left(x^2 - 4\right)^2} = 0 \Leftrightarrow -2x^2 - 8 = 0$, lo cual es imposible, luego no hay puntos de inflexión.

Además, $f''(x) < 0 \ \forall x \in D(f) \Rightarrow$ la función es siempre cóncava.

La representación gráfica de la función es:



6. $f(x) = \dfrac{x^2}{1 + x^2}$

$D(f) = \Re$, pues el denominador no se anula nunca.

$f(-x) = f(x) \Rightarrow$ la función es par.

Puntos de corte: con el eje OX: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (0, 0)$.
con el eje OY es el mismo punto.

Asíntotas: no tiene verticales.

Horizontal en $y = 1$, ya que $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2}{1 + x^2} = 1$.

Situación de la gráfica respecto de la asíntota horizontal:

$f(x)-1=\frac{-1}{1+x^2}<0\ \ \forall x\in\Re \Rightarrow$ la función se acerca a la asíntota por debajo en todo su dominio.

No tiene oblicuas.

Monotonía: $f'(x)=\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}=0 \Leftrightarrow x=0$, que es su único punto crítico.

(−∞, 0)	(0, +∞)
$f'(-1)<0$	$f'(1)>0$
decrece	crece

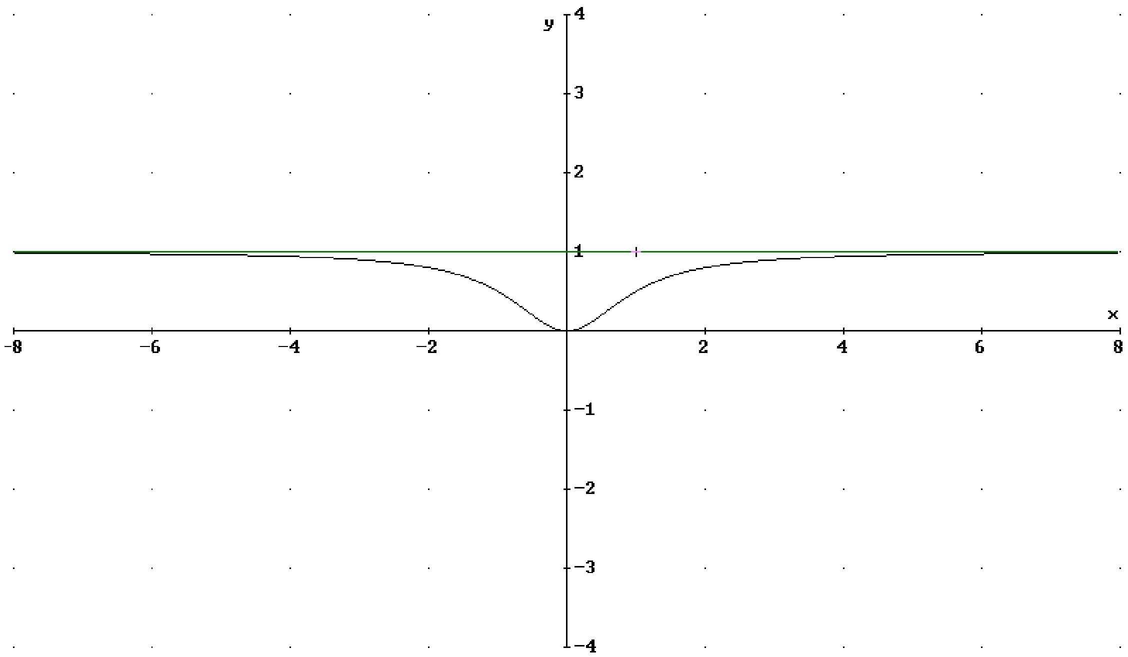
Extremos relativos: $f''(x)=\frac{2-6x^2}{\left(1+x^2\right)^3} \Rightarrow f''(0)=2>0 \Rightarrow (0,0)$ es un mínimo relativo

Curvatura y puntos de inflexión:

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \begin{cases}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{1}{4}\right)\\ \left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{1}{4}\right)\end{cases}$$ son los puntos de inflexión.

$\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$\left(+\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$
$f''(-1)<0$	$f''(0)>0$	$f''(1)<0$
cóncava	convexa	cóncava

La representación gráfica de la función es:



7. $f(x) = (x-1)e^x$

D (f) = $\Re$. No tiene simetrías.

Puntos de corte: con el eje $OX : (x-1)e^x = 0 \Leftrightarrow x-1=0,$ pues $e^x \neq 0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow (1, 0)$.

con el eje OY : $f(0) = -1 \Rightarrow (0,-1)$.

Asíntotas: no tiene verticales.

Horizontal:

$$\lim_{x\to\infty} (x-1)e^x = +\infty ; \quad \lim_{x\to-\infty} (x-1)e^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-1}{e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = \frac{-1}{e^{+\infty}} = \frac{-1}{\infty} = 0 ,$$

así que hay asíntota horizontal en $y = 0$, pero sólo por la izquierda.

La asíntota y la función se cortan en el punto (1, 0).

Cuando $x \to -\infty$, $f(x) < 0$, luego la gráfica se pega a la asíntota $y = 0$ por debajo.

No tiene oblicuas.

Monotonía: $f'(x) = x \cdot e^x = 0 \Leftrightarrow x = 0$, que es su único punto crítico.

$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f'(-1) < 0$	$f'(1) > 0$
decrece	crece

Extremos relativos:

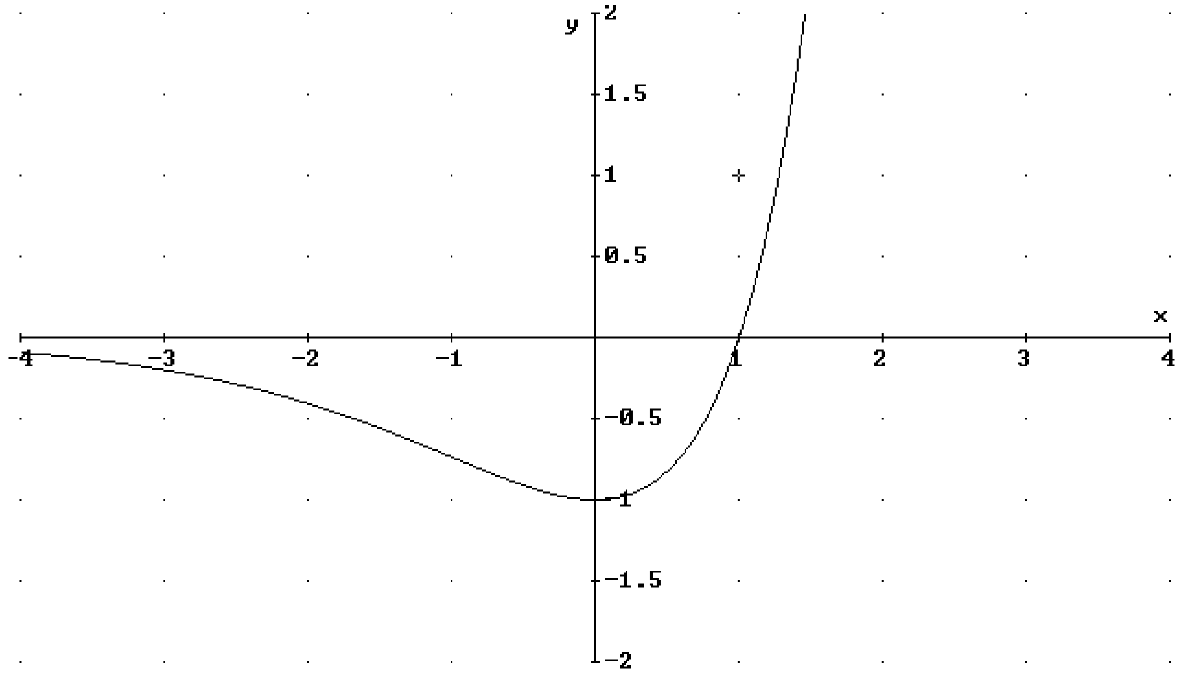
$f''(x) = e^x(x+1) \Rightarrow f''(0) = 1 > 0 \Rightarrow (0,-1)$ es un mínimo relativo.

Curvatura y puntos de inflexión:

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x+1 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow \left(-1, \frac{-2}{e}\right)$ es su punto de inflexión.

$(-\infty, -1)$	$(-1, +\infty)$
$f''(-2) < 0$	$f''(0) > 0$
cóncava	convexa

La representación gráfica de la función es:



8. $f(x) = x^2 - 2|x| + 2$

Como $|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 2x + 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

$D(f) = \Re$ porque es polinómica. Por la misma razón no tiene asíntotas de ningún tipo.

Es simétrica par, pues $f(-x) = x^2 - 2|-x| + 2 = x^2 - 2|x| + 2 = f(x)$.

Estudiamos la continuidad y derivabilidad de $f(x)$ en $x = 0$, por ser una función a trozos que se "juntan" en $x = 0$.

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0} x^2 + 2x + 2 = 2$$

luego $f(x)$ es continua en todo $\Re$.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0} x^2 - 2x + 2 = 2 = f(0)$$

Para la derivabilidad:

$$f'(0^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 2h + 2 - 2}{h} = \lim_{h \to 0} h + 2 = 2$$

$$f'(0^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 - 2h + 2 - 2}{h} = \lim_{h \to 0} h - 2 = -2$$

Así que no existe $f'(0)$, por lo que $f(x)$ es derivable en $\Re - \{0\}$, y la función derivada es

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+2 & \text{si } x<0 \\ 2x-2 & \text{si } x>0 \end{cases} \Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2=0 \Leftrightarrow x=-1 \\ 2x-2=0 \Leftrightarrow x=1 \end{cases}$$

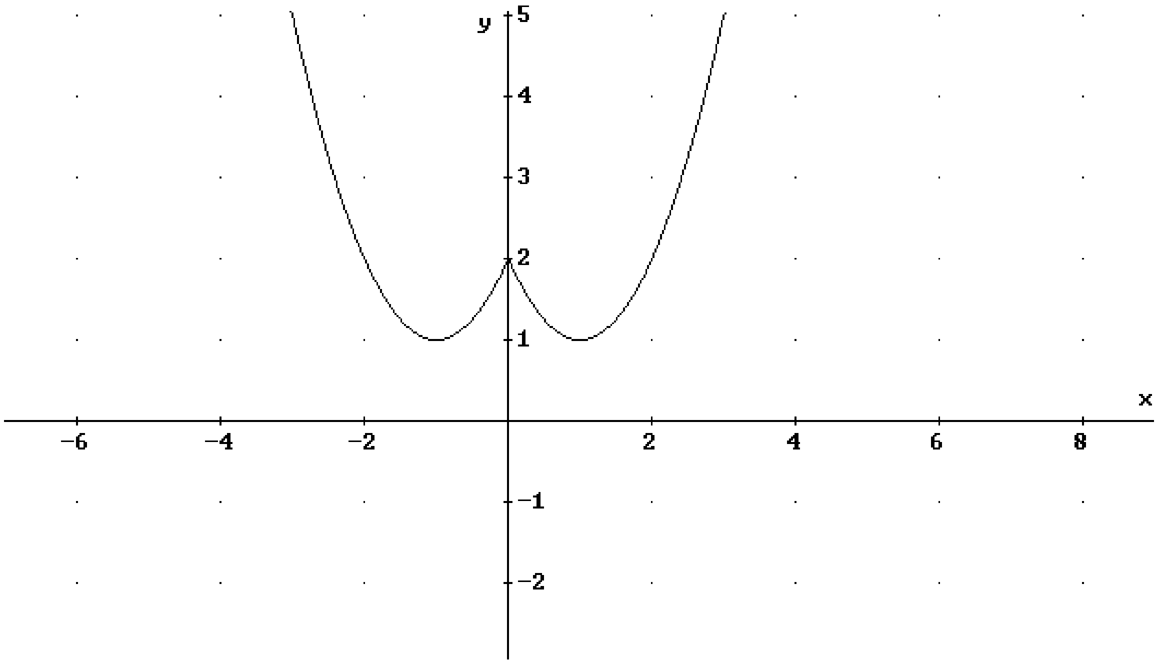
$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
$f'(-2) < 0$	$f'\left(-\frac{1}{2}\right) > 0$	$f'\left(\frac{1}{2}\right) < 0$	$f'(2) > 0$
decrece	crece	decrece	crece

$$f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \neq 0 \\ \text{no existe} & \text{si } x=0 \end{cases}$$ $\Rightarrow$ como $f'' > 0$ donde existe, los puntos $(-1, 1)$ y $(1, 1)$

son mínimos relativos. Además, la función es convexa en $\Re - \{0\}$.

Puntos de corte con los ejes: con OX no hay puntos de corte porque las ecuaciones $x^2+2x+2=0$ y $x^2-2x+2=0$ no tiene soluciones.
con OY se tiene que $f(0) = 2$, luego el punto es $(0, 2)$.

La representación gráfica de la función es:



9. $f(x) = x^2 \cdot Lx$

$D(f) = (0, +\infty)$, no tiene simetrías y es continua y derivable en todo su dominio.

Puntos de corte: con OX: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \notin D(f) \\ Lx = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow (1, 0) \end{cases}$

con OY no hay porque $0 \notin D(f)$.

Asíntotas:

Vertical: $\lim\limits_{x \to 0^+} x^2 Lx = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{Lx}{\dfrac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{-2}{x^3}} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{-x^2}{2} = 0 \Rightarrow$ no hay asíntota.

Horizontal: $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 Lx = +\infty \Rightarrow$ tampoco hay.

Oblicua: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 Lx}{x} = +\infty \Rightarrow$ tampoco hay oblicua.

Monotonía:

$$f'(x) = 2xLx + x = x(2Lx+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \text{ que no sirve, ya que } 0 \notin D(f) \\ 2Lx + 1 = 0 \Rightarrow Lx = \dfrac{-1}{2} \Rightarrow x = e^{\frac{-1}{2}} \cong 0.6 \end{cases}$$

(0, 0.6)	(0.6, +∞)
$f'(0.1) < 0$	$f'(e) > 0$
decrece	crece

Extremos relativos:

$$f''(x) = 2Lx + 3 \Rightarrow f''(e^{-1/2}) = 2 > 0 \Rightarrow \left(e^{-1/2}, \frac{-1}{2e} \right) \cong (0.6, -0.2) \text{ es un mínimo relativo.}$$

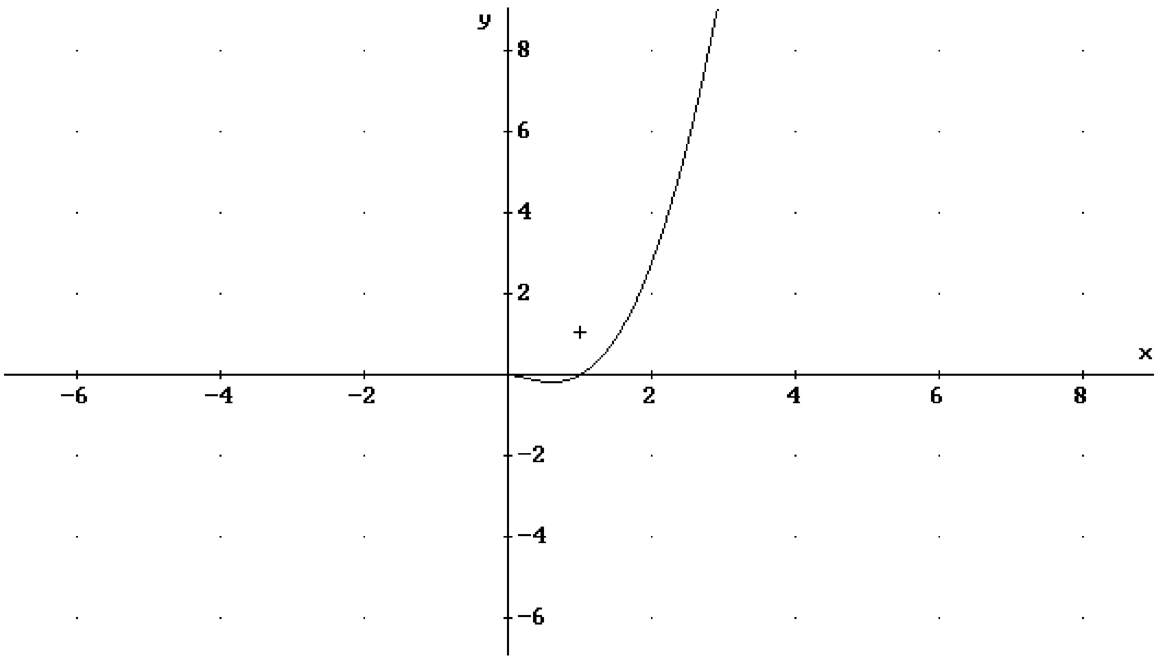
Curvatura y puntos de inflexión:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2Lx + 3 = 0 \Leftrightarrow Lx = \frac{-3}{2} \Leftrightarrow x = e^{-3/2} \cong 0.02 \Rightarrow \left(e^{-3/2}, \frac{-3}{2e^3} \right) \cong (0.02, -0.07)$$

es su único punto de inflexión.

(0, 0.02)	(0.02, +∞)
$f''(0.01) < 0$	$f''(e) > 0$
cóncava	convexa

La representación gráfica de la función es:



10. $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x}{e^x}$

D(f) = $\Re$, pues el denominador no se anula nunca. No tiene simetrías. Es además continua y derivable en todo su dominio.

Puntos de corte: con el eje $OX: 2x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = \dfrac{3}{2} \Rightarrow (0,0)$ y $\left(\dfrac{3}{2}, 0\right)$.

con el eje OY : $f(0) = 0 \Rightarrow (0,0)$.

Asíntotas: no tiene verticales.

Horizontal: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 - 3x}{e^x} = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^2 - 3x}{e^x} = +\infty$, así que hay asíntota

horizontal en $y = 0$, pero sólo por la derecha (la función va por encima de la asíntota).

No tiene oblicuas.

Monotonía: $f'(x) = \dfrac{-2x^2 + 7x - 3}{e^x} = 0 \Leftrightarrow -2x^2 + 7x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3, x = \dfrac{1}{2}$, que son sus puntos críticos.

$\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, 3\right)$	$(3, +\infty)$
$f'(0) < 0$	$f'(2) > 0$	$f'(4) < 0$
decrece	crece	decrece

Extremos relativos:

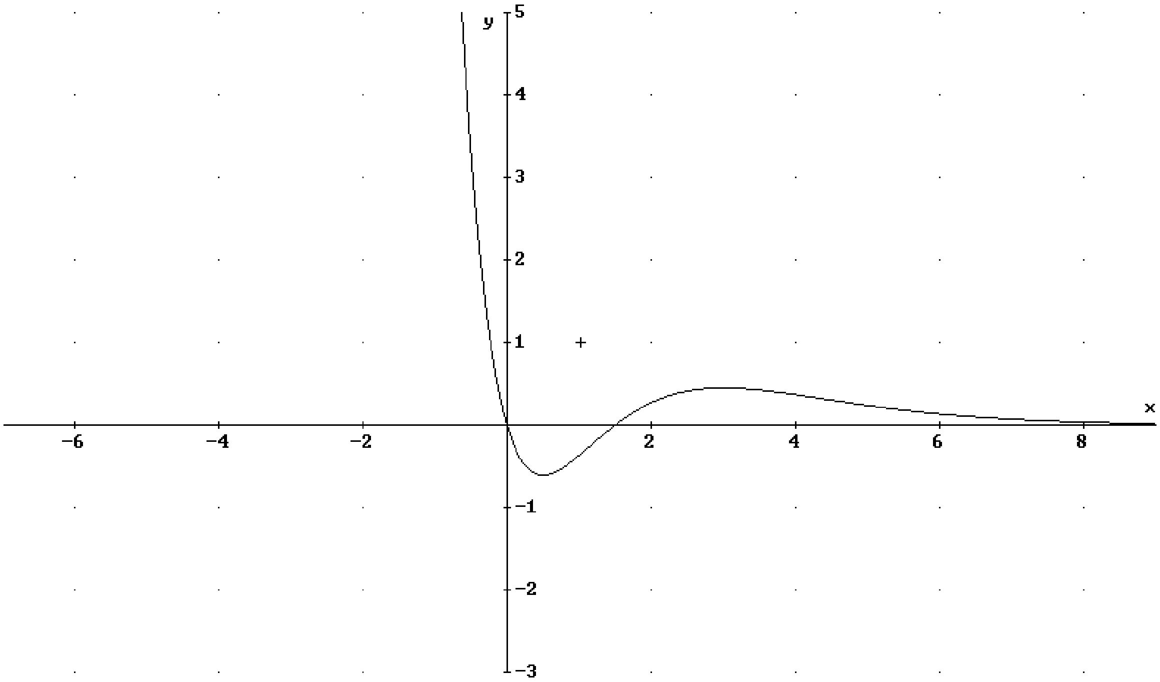
$$f''(x) = \frac{2x^2 - 11x + 10}{e^x} \Rightarrow \begin{cases} f''\left(\frac{1}{2}\right) > 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}, -0.6\right) \text{es un mínimo relativo.} \\ f''(3) < 0 \Rightarrow (3, 0.45) \text{es un máximo relativo.} \end{cases}$$

Curvatura y puntos de inflexión:

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 11x + 10 = 0 \Rightarrow x = \frac{11 \pm \sqrt{41}}{4} \Rightarrow x = 4.3, x = 1.1 \Rightarrow (4.3, 0.33)$ y $(1.1, -0.3)$ son sus puntos de inflexión.

$(-\infty, 1.1)$	$(1.1, 4.3)$	$(4.3, +\infty)$
$f''(0) > 0$	$f''(2) < 0$	$f''(5) > 0$
convexa	cóncava	convexa

La representación gráfica de la función es:



11. $f(x) = e^{1/x}$

D (f) = $\Re - \{0\}$. No tiene simetrías. Es continua y derivable en todo su dominio.

Puntos de corte: con el eje $OX : e^{1/x} \neq 0 \; \forall x \in D(f)$, así que no hay.
con el eje OY : tampoco hay, ya que no existe $f(0)$.

Asíntotas:
Vertical: $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{1/x} = e^{1/0^-} = e^{-\infty} = 0$; $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{1/x} = e^{1/0^+} = e^{+\infty} = +\infty$, así que la hay

en $x = 0$ sólo por la derecha.

Horizontal: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{1/x} = e^{1/\pm\infty} = e^0 = 1$, así que hay asíntota horizontal en $y = 1$.

Situación de la gráfica respecto de la asíntota:

$$e^{1/x} - 1 \begin{cases} > 0, \text{ si } x \to +\infty \Rightarrow \text{la función va por encima de la asíntota.} \\ < 0, \text{ si } x \to -\infty \Rightarrow \text{la función va por debajo de la asíntota.} \end{cases}$$

No tiene oblicuas.

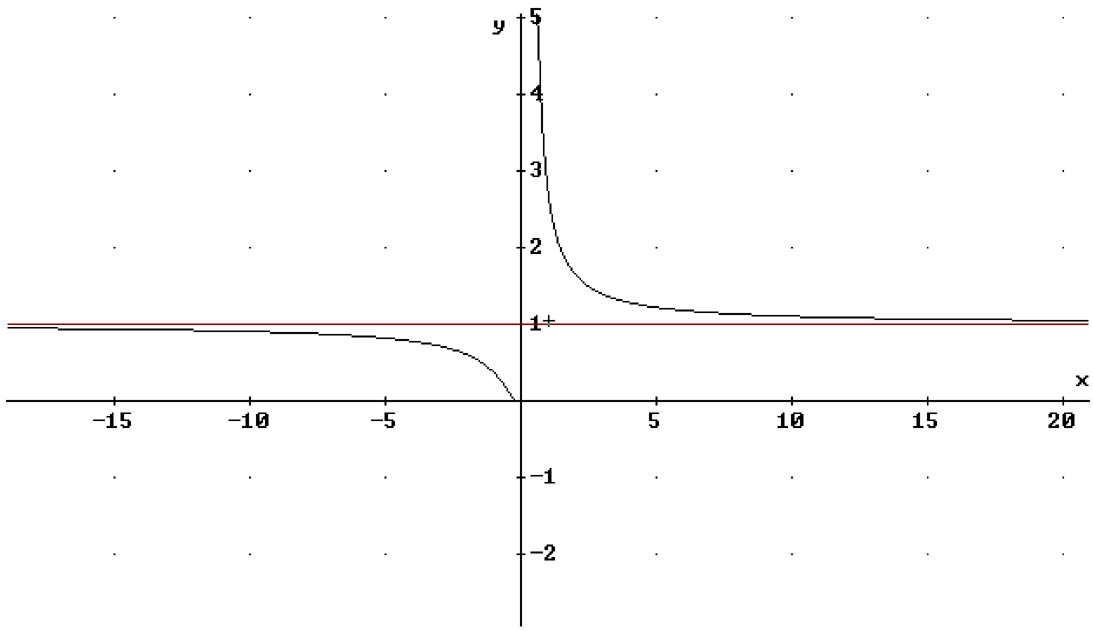
Monotonía: $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} e^{1/x} = 0 \Leftrightarrow e^{1/x} = 0$, pero esto no ocurre nunca, así que no hay extremos relativos. Además, $f' < 0$ donde existe $\Rightarrow$ la función es decreciente en todo su dominio.

Curvatura y puntos de inflexión:

$f''(x) = e^{1/x} \dfrac{2x+1}{x^4} = 0 \Leftrightarrow 2x+1 = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \left(-\dfrac{1}{2}, e^{-2}\right)$ es su punto de inflexión.

$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$	$(0, +\infty)$
$f''(-1) < 0$	$f''(-0.25) > 0$	$f''(1) > 0$
cóncava	convexa	convexa

La representación gráfica de la función es:



12. $f(x)=\dfrac{1}{Lx}$

$Lx=0 \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow D(f)=(0,+\infty)-\{1\}$, donde la función es continua y derivable.

Cuando x tiende a cero: $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{Lx} = \dfrac{1}{-\infty} = 0 \Rightarrow f(0^+)=0$.

No tiene simetrías.

Puntos de corte: con OX no hay puntos de corte porque $\dfrac{1}{Lx} \neq 0 \ \forall x$.

con OY tampoco porque no existe $f(0)$.

Asíntotas:

Vertical: $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{Lx} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{Lx} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$, hay una en $x = 1$.

Horizontal: $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{Lx} = \dfrac{1}{\infty} = 0$, horizontal en $y = 0$ sólo por la derecha (la función se acerca por encima de la asíntota).

No tiene oblicuas.

Monotonía y extremos relativos:

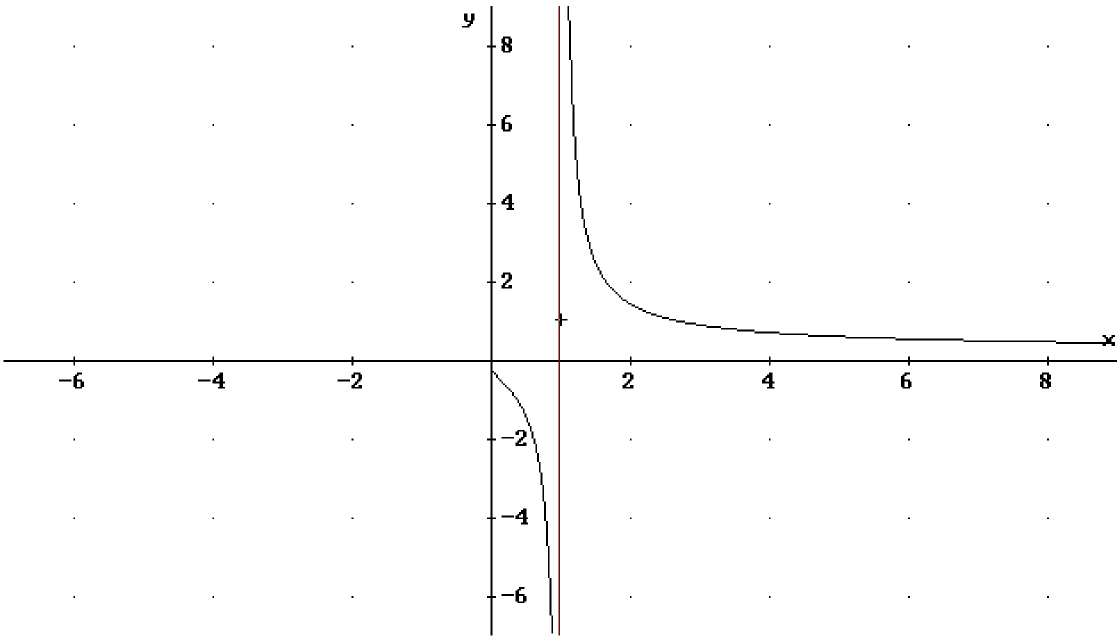
$f'(x) = -\dfrac{1}{xL^2x} \neq 0 \ \forall x$, así que no hay extremos, y la función es decreciente en todo su dominio.

Curvatura y puntos de inflexión:

$f''(x) = \dfrac{Lx+2}{x^2L^3x} = 0 \Leftrightarrow Lx+2=0 \Leftrightarrow x=e^{-2} \cong 0.135 \Rightarrow \left(e^{-2},-\dfrac{1}{2}\right)$ es su punto de inflexión.

$(0,e^{-2})$	$(e^{-2},1)$	$(1,+\infty)$
$f''(0.1)>0$	$f''(0.3)<0$	$f''(2)>0$
convexa	cóncava	convexa

La representación gráfica de la función es:



Nota: observa que las dos últimas funciones, $e^{1/x}$ y $\dfrac{1}{Lx}$, son una inversa de la otra, es decir, si $f(x) = e^{1/x} \Rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{1}{Lx}$, ya que $\left(f \circ f^{-1}\right)(x) = e^{1/(1/Lx)} = e^{Lx} = x$.

Este hecho se aprecia en que sus gráficas son simétricas respecto de la recta $y = x$, bisectriz del primer cuadrante.