

# MT1 - Tema 2.3: Álgebra: Sistemas de ecuaciones

## Álgebra: Sistemas de ecuaciones

---

Matemáticas I

1º Bachillerato

Contenidos

Álgebra

Sistemas de ecuaciones

# 1. Dos ecuaciones y dos incógnitas

---

Continuamos centrándonos en el estudio del equilibrio (ecuaciones) pero, esta vez, en vez de una incógnita aparecerán dos. Y aún hay más...

Si no tuviéramos bastante con dos incógnitas, en lugar de una ecuación aparecerán dos.

Como se diría en el argot circense: ¡más difícil todavía! ¡No te preocupes, que tampoco es para tanto!

A continuación, vas a descubrir que la complejidad no aumenta en exceso ni con la aparición de una letra más, ni con la aparición de una ecuación más.

Verás que trabajar con ellas es imprescindible para la resolución de algunas situaciones problemáticas pues facilitan mucho la el trabajo.



Imagen de StockSnap en Pixabay. <<https://pixabay.com/es/photos/yoga-fuerza-mujer-equilibrio-2587066/>> Licencia Pixabay <<https://pixabay.com/es/service/license/>>

## 1.1. Ecuaciones con dos incógnitas

El siguiente titular apareció en el diario **SPORT.es** el día 3 de abril de 2010.

UN TÁNDEM QUE CADA VEZ SE ENTIENDE MEJOR

### Messi-Ibrahimovic, seguro de gol... y de victoria

En lo que va de Liga entre los dos delanteros han marcado 40 goles, los mismos que lleva el Athletic



Fuente: **SPORT.es** <[http://www.sport.es/default.asp?idpublicacio\\_PK=44&idioma=CAS&idnoticia\\_PK=701224&idseccio\\_PK=803](http://www.sport.es/default.asp?idpublicacio_PK=44&idioma=CAS&idnoticia_PK=701224&idseccio_PK=803)>

Fecha: 03/04/2010

Si traducimos al lenguaje algebraico la frase del subtítulo: "*entre los dos delanteros han marcado 40 goles*", al haber dos objetos (en este caso, dos jugadores) y dos cantidades asociadas a ellos (número de goles que ha marcado cada uno), necesitamos dos incógnitas.

Por tanto, si llamamos:

**x: Número de goles que ha marcado Messi**

**y: Número de goles que ha marcado Ibrahimovic**

la frase anterior traducida a lenguaje matemático quedaría de la siguiente forma:  $x + y = 40$ . Se trata de una ecuación (igualdad entre dos miembros) con dos incógnitas. ¿Ves como no es tan complicado?



### Importante

Una **ecuación lineal con dos incógnitas** es una igualdad de la siguiente forma:  $ax + by = c$ , donde  $x$  e  $y$  son las incógnitas de la ecuación y  $a$ ,  $b$  y  $c$  son números conocidos. Los valores  $a$  y  $b$  se llaman **coeficientes** y  $c$  se llama **término independiente** de la ecuación.

En el caso anterior,  $x + y = 40$ , serán  $a = 1$ ,  $b = 1$  y  $c = 40$ .

Las **soluciones de la ecuación** son pares de números que, al ser sustituidos en la ecuación, hacen que ambos miembros tengan el mismo valor (es decir, que se alcance

el equilibrio).



## Comprueba lo aprendido

1. ¿Es posible que Messi haya marcado 30 goles e Ibrahimovic 20 goles?

- ☐ Sí
- ☐ No

¡Incorrecto!

No es posible, porque  $30 + 20 = 50$  y, entre los dos, han marcado 40 goles no 50.

**Conclusión:**  $(x, y) = (30, 20)$  no es una solución de la ecuación.

¡Correcto!

No es posible, porque  $30 + 20 = 50$  y entre los dos han marcado 40 goles, no 50.

**Conclusión:**  $(x, y) = (30, 20)$  no es una solución de la ecuación.

### Solución

1. Incorrecto
2. Opción correcta

2. ¿Es posible que tanto Messi como Ibrahimovic hayan marcado 20 goles cada uno?

- ☐ Sí
- ☐ No

¡Correcto!

Sí es posible porque  $20 + 20 = 40$ , que es exactamente la cantidad de goles que han marcado entre ambos, según indica el periódico.

**Conclusión:**  $(x, y) = (20, 20)$  es una solución de la ecuación.

¡Incorrecto!

Sí es posible, porque  $20 + 20 = 40$ , que es exactamente la cantidad de goles que han marcado entre ambos, según indica el periódico.

Conclusión:  $(x, y) = (20, 20)$  es una solución de la ecuación.

## Solución

1. Opción correcta
2. Incorrecto

3. Yo creo que Messi ha marcado 25 goles y que Ibrahimovic ha marcado sólo 15, pero mi hermana dice que, según sus cálculos, Messi ha marcado 12 goles e Ibrahimovic, 28. ¡Vaya disparidad de opiniones! Pero, ¿podemos tener razón amb@s?

- ☐ Sí
- ☐ No

¡Correcto!

En efecto y, aunque parezca contradictorio, **amb@s** tenemos razón porque:

- según mis datos:  $25 + 15 = 40$ , que es exactamente la cantidad de goles que han marcado entre ambos, según indica el periódico.
- según las cuentas de mi hermana:  $12 + 28 = 40$ , que cumple la misma condición que mi respuesta.

Conclusión:  $(x, y) = (25, 15)$  es una solución de la ecuación y  $(x, y) = (12, 28)$  es otra solución de la ecuación.

¡Incorrecto!

En efecto y, aunque parezca contradictorio, **amb@s** tenemos razón porque:

- según mis datos:  $25 + 15 = 40$ , que es exactamente la cantidad de goles que han marcado entre ambos, según indica el periódico.
- según las cuentas de mi hermana:  $12 + 28 = 40$ , que cumple la misma condición que mi respuesta.

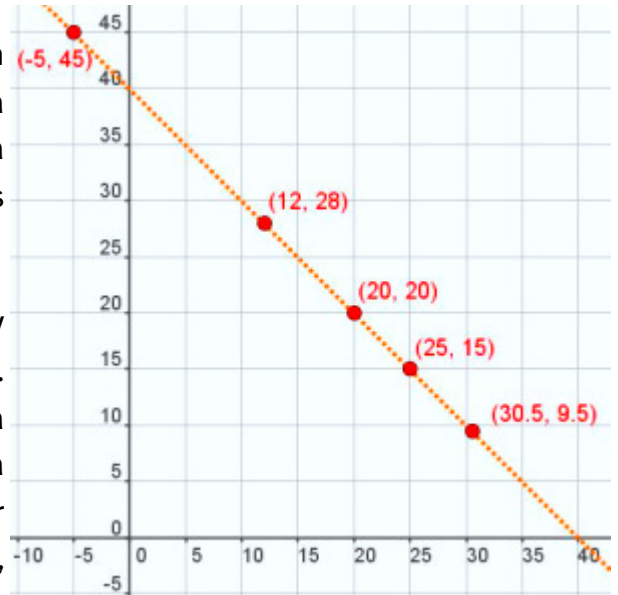
Conclusión:  $(x, y) = (25, 15)$  es una solución de la ecuación y  $(x, y) = (12, 28)$  es otra solución de la ecuación.

## Solución

1. Opción correcta
2. Incorrecto

Para saber si una pareja de números es solución de una ecuación lineal con dos incógnitas basta con sustituir en la ecuación cada número por la incógnita correspondiente y comprobar si es cierta o no la igualdad numérica.

Acabamos de ver que los pares  $(12, 28)$ ,  $(20, 20)$  y  $(25, 15)$  son soluciones de la ecuación  $x + y = 40$ . Estos pares de puntos, además de cumplir la ecuación, tienen sentido en el contexto de la situación que planteamos, es decir, pueden ser los goles marcados por Messi e Ibrahimovic, respectivamente.



Pero hay otros pares de puntos que también cumplen la igualdad  $x + y = 40$ . Por ejemplo  $(-5, 45)$  ó  $(30.5, 9.5)$  también suman 40, pero no tienen sentido como goles marcados en un partido.

Nos planteamos entonces, ¿cuántos pares de puntos pueden ser solución de la ecuación lineal  $x + y = 40$ ?

En la imagen de la derecha, en unos ejes coordenados, hemos representado los pares de puntos que hemos visto que son solución de  $x + y = 40$ . Para ello, el valor de  $x$  lo hemos colocado en el eje OX, y el de  $y$  en el eje OY.

A la vista de la imagen, ¿qué otros pares de puntos pueden ser solución de nuestra ecuación?



**Importante**

Dada una **ecuación lineal** con dos incógnitas,  **$ax + by = c$** , siempre se cumple:

1. Que sus soluciones, pares de valores **(x, y)**, representan puntos del plano que están alineados, es decir, que están situados sobre la misma **recta**.
2. Como una recta tiene infinitos puntos, una ecuación lineal con dos incógnitas también tiene **infinitas soluciones**.



## Comprueba lo aprendido

En un portal deportivo en internet leemos el siguiente titular:

**"A estas alturas de la temporada el Real Madrid es el equipo más goleador de la Liga con 6 goles más que el F.C. Barcelona, que ocupa la segunda posición en la clasificación de equipos goleadores."**

Indica **Verdadero** o **Falso** en las siguientes afirmaciones:

1. La ecuación que relaciona el número de goles marcados por ambos equipos es:  **$x = y + 6$** , siendo  $x$ : *nº goles marcados por el Real Madrid* e  $y$ : *nº goles marcados por el F.C. Barcelona*.

☐ Verdadero ☐ Falso

**Verdadero**

2. El F.C Barcelona ha marcado 73 goles y el Real Madrid, 80.

☐ Verdadero ☐ Falso

**Falso**

No es cierto. Veamos por qué.

Sabemos que la relación entre los goles marcados por ambos equipos viene dada por la ecuación:  **$x = y + 6$** , donde  $x$ : *nº goles marcados por el Real Madrid* e  $y$ : *nº goles marcados por el F.C. Barcelona*.

Si fuera cierto, entonces la pareja:  $(x, y) = (80, 73)$  sería una solución de la ecuación.

Pero, si sustituimos estos valores en la ecuación, vemos que no la satisfacen pues  $80 \neq 73 + 6$ ,  $80 \neq 79$ .

3. Podemos afirmar, con toda seguridad, que: "El F.C Barcelona ha marcado 73 goles y el Real Madrid 79".

☐ Verdadero    ☐ Falso

**Falso**

No es cierto. Veamos por qué.

Sabemos que la relación entre los goles marcados por ambos equipos viene dada por la ecuación:  $x = y + 6$ , donde  $x$ : *nº goles marcados por el Real Madrid* e  $y$ : *nº goles marcados por el F.C. Barcelona*.

En este caso, la pareja:  $(x, y) = (79, 73)$  sí que es una solución de la ecuación. Podemos decir que es una combinación goleadora posible, pero, con los datos que disponemos no podemos afirmar, **con toda seguridad**, que esta sea la única combinación posible.

Ello es debido a que una ecuación con dos incógnitas tiene infinitas soluciones.

## 1.2. Resolución gráfica de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

---

En las dos situaciones mostradas en el punto anterior no hemos podido más que *establecer una relación entre las dos incógnitas y dar posibles combinaciones de resultados*.

Pero, ni hemos podido determinar un número único de goles marcados por cada uno de los delanteros del F.C Barcelona, ni de goles marcados por cada uno de los dos equipos.



Imagen de sasint en Pixabay <<https://pixabay.com/es/photos/ni%C3%B1os-bienvenida-asia-puesta-de-sol-1822688/>> . Licencia Pixabay <<https://pixabay.com/es/service/license/>>

En ambas situaciones nos falta una pista: otra ecuación. Al tener dos incógnitas, para poder encontrar unos valores únicos para los goles marcados, necesitamos al menos dos pistas, es decir, dos ecuaciones. Si ambas pistas son "buenas", entonces sí podremos encontrar unos valores únicos para las incógnitas planteadas.

Con las dos pistas tendremos lo que en matemáticas se conoce con el nombre de **sistema de ecuaciones**.



### Importante

---

Un **sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas**, como su propio nombre indica, está compuesto por dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Es decir, un conjunto de dos ecuaciones como las siguientes:

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

**Resolver el sistema** es encontrar una solución común de ambas ecuaciones. Por tanto, una **solución** del sistema es una pareja de valores **(x, y)** que cumple ambas ecuaciones de manera simultánea.

---

Veremos diferentes maneras de resolver un sistema de ecuaciones lineales. Comenzamos con el **método gráfico** que nos mostrará que resolver un sistema de ecuaciones consiste, básicamente, en calcular los puntos de corte de sus dos rectas asociadas.



## Importante

---

En el punto anterior, vimos que existe una relación entre una ecuación lineal con dos incógnitas y su representación gráfica (una recta). Además, sabemos que una solución del sistema de ecuaciones es una solución común de ambas ecuaciones.

Si interpretamos lo anterior desde un punto de vista gráfico, una solución del sistema vendrá dada por las coordenadas (x, y) de un punto que pertenezca a las dos rectas, esto es, de un punto de corte de las dos rectas.

Por tanto, para resolver un sistema de ecuaciones mediante el método gráfico, debemos:

- Representar gráficamente la recta de cada una de las ecuaciones.
  - Determinar los puntos comunes de ambas rectas.
- 

Veamos un ejemplo

$$\begin{cases} x+y=5 \\ 6x-3y=-24 \end{cases}$$

Vamos a despejar la incógnita "y" de cada una de las ecuaciones:

$$\begin{cases} x+y=5 \\ 6x-3y=-24 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=5-x \\ y=\frac{-24-6x}{-3} \end{cases}$$

Ahora, en una tabla, daremos valores a la incógnita "x" y, realizando las operaciones correspondientes, obtendremos los correspondientes valores de la incógnita "y". De esta forma, conseguiremos las coordenadas (x, y) de algunos puntos de cada recta y, uniéndolos, obtendremos las gráficas de ambas rectas.

$y = 5 - x$		$y = \frac{-24 - 6x}{-3}$	
$x$	$y$	$x$	$y$
0	5	0	8
1	4	1	10
-1	6	-1	6

La solución del sistema es el punto donde se cortan las dos rectas. Como podemos ver en la tabla, dicho punto es A(-1, 6), es decir, la solución del sistema es:  $x = -1$  y  $y = 6$ .

Veamos, gráficamente, las dos gráficas asociadas al sistema así como su solución. La recta verde es la de ecuación  $y = 5 - x$ , la recta azul es  $y = \frac{-24 - 6x}{-3}$ , y A(-1, 6) es el punto de corte de ambas.

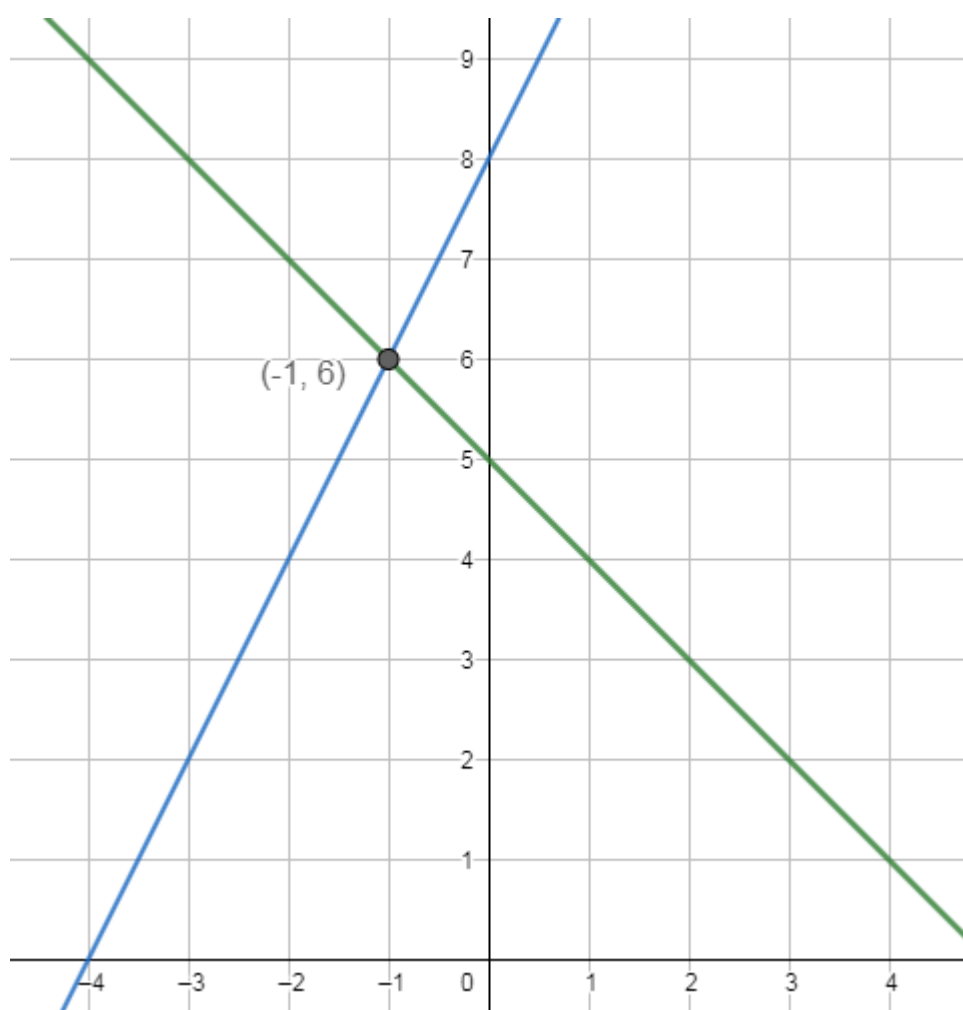


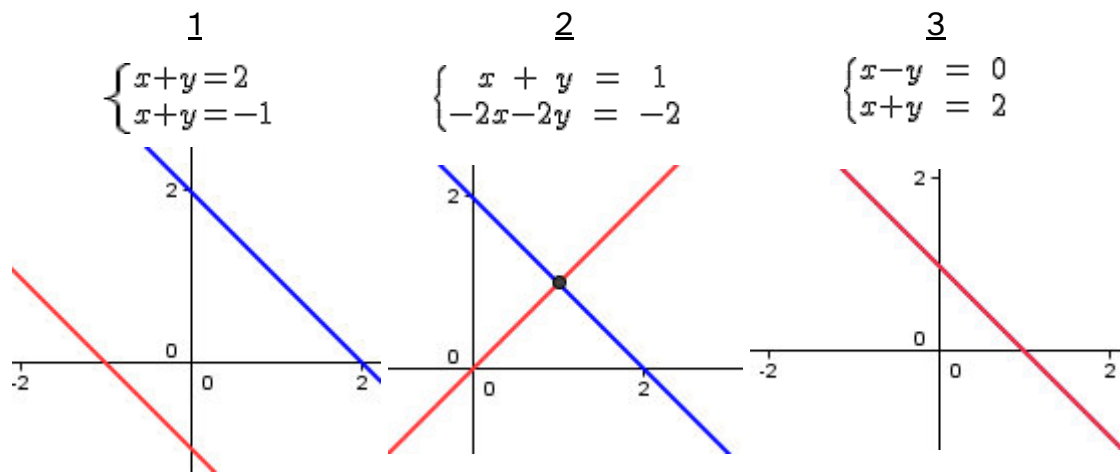
Imagen de elaboración propia

Como puedes ver, dibujar las rectas de cada una de las ecuaciones no es una tarea excesivamente compleja. Basta despejar  $y$  en función de  $x$ , elaborar una pequeña tabla de valores y representar los puntos obtenidos.



## Comprueba lo aprendido

Asocia cada sistema con su representación gráfica.



- Al Sistema 1 le corresponde la:

### Sugerencia

- ☐ Gráfica 1
- ☐ Gráfica 2
- ☐ Gráfica 3

¡Correcto!

**Gráfica 1.**

Basta representar las dos ecuaciones despejando y en función de x y realizar una pequeña tabla de valores.

Ten en cuenta esta observación para futuros sistemas que vayas a resolver. Si observas las ecuaciones verás que es imposible que, al mismo tiempo, "la suma de dos números (x e y) valga 2 y -1".

Por tanto, ambas **ecuaciones son contradictorias** y, por tanto, resulta imposible encontrar una solución. Cada vez que ocurre esto con las ecuaciones de un sistema, obtendremos **dos rectas paralelas** en su representación gráfica que, evidentemente, **nunca se van a cortar**. Por tanto, **no hay punto de corte, lo que implica que no hay solución**.

¡Incorrecto!

¡Incorrecto!

## Solución

1. Opción correcta
2. Incorrecto
3. Incorrecto

- Al sistema 2 le corresponde la:

- ☐ Gráfica 1
- ☐ Gráfica 2
- ☐ Gráfica 3

¡Incorrecto!

¡Incorrecto!

¡Correcto!

### Gráfica 3.

Basta representar las dos ecuaciones despejando y en función de  $x$  y realizar una pequeña tabla de valores.

Ten en cuenta esta observación para futuros sistemas que vayas a resolver. Si te fijas bien en las ecuaciones, te darás cuenta de que **la segunda ecuación es múltiplo de la primera**, es decir, se obtiene multiplicando la primera por  $-2$ .

En realidad, decimos que son ecuaciones equivalentes lo que significa que tienen las mismas soluciones. es decir, se cortan en infinitos puntos. Cada vez que ocurre esto con las ecuaciones de un sistema, obtendremos dos rectas coincidentes. **El sistema, por tanto, tiene infinitas soluciones.**

## Solución

1. Incorrecto
2. Incorrecto
3. Opción correcta

- Al sistema 3 le corresponde la:

- ☐ Gráfica 1
- ☐ Gráfica 2
- ☐ Gráfica 3

¡Incorrecto!

¡Correcto!

### Gráfica 2.

Basta representar las dos ecuaciones despejando y en función de x y realizar una pequeña tabla de valores.

Ten en cuenta esta observación para futuros sistemas que vayas a resolver. Si observas las ecuaciones verás que ni son contradictorias, ni una es múltiplo de otra. Cada vez que ocurra esto con las ecuaciones de un sistema, obtendremos **dos rectas secantes (que se cortan) en un único punto. El sistema tiene, por tanto, una única solución que viene dada por las coordenadas  $(x, y) = (1, 1)$  y que es ese punto de corte.**

¡Incorrecto!

### Solución

1. Incorrecto
2. Opción correcta
3. Incorrecto



## Comprueba lo aprendido

1. Al resolver 
$$\begin{cases} -2x+5y = -3 \\ -6x+15y = -9 \end{cases}$$
 gráficamente el <http://www.alciro.org/tools/matematicas/editor-ecuaciones.jsp?eq=\left\{ \begin{array}{l} -2x+5y=-3 \\ -6x+15y=-9 \end{array} \right.> obtenemos:

- ☐ a) Las dos rectas se cortan en el punto (4, -1), luego la solución es:  $x = 4, y = -1$ .
- ☐ b) Las dos rectas son coincidentes, luego el sistema tiene infinitas soluciones.
- ☐ c) Las dos rectas son coincidentes, luego el sistema no tiene solución.

¡Incorrecto!

¡Correcto!

¡Incorrecto!

### Solución

1. **Incorrecto**
2. **Opción correcta**
3. **Incorrecto**

2. Si resolvemos gráficamente el sistema  $\begin{cases} x-2y=3 \\ 2x-4y=1 \end{cases}$ , obtenemos:

- ☐ a) Dos rectas paralelas, luego el sistema no tiene solución.
- ☐ b) Dos rectas coincidentes, luego el sistema tiene infinitas soluciones.
- ☐ c) Las rectas se cortan en el punto (5, 1), luego la solución es  $x = 5, y = 1$ .

¡Correcto!

¡Incorrecto!

¡Incorrecto!

### Solución

1. **Opción correcta**
2. **Incorrecto**
3. **Incorrecto**

3. Resuelve gráficamente el sistema  $\begin{cases} x-y=3 \\ x+2y=9 \end{cases}$  e indica su solución.

- ☐ a)  $x = 1, y = 4$
- ☐ b)  $x = 4, y = 1$
- ☐ c)  $x = 5, y = 2$

¡Incorrecto!

¡Incorrecto!

¡Correcto!

## Solución

1. Incorrecto
2. Incorrecto
3. Opción correcta

## 1.3. Métodos de resolución analítica

---

Tal y como hemos visto en el apartado anterior, un sistema se puede resolver gráficamente, pero, en muchas ocasiones, este método presenta algunos inconvenientes.

Por ejemplo, en el caso de que no dispongamos de una herramienta informática preparada para representar las gráficas, estaremos obligados a construir una tabla con los puntos para, posteriormente, realizar la representación de las rectas a mano. También nos puede ocurrir que, una vez representadas las rectas, el punto de corte esté muy alejado del origen de coordenadas o que sus coordenadas no sean números enteros.

Estas situaciones suponen, normalmente, un obstáculo para encontrar la solución exacta y justifican, de manera clara, la necesidad de que existan métodos analíticos de resolución de sistemas.

Existen tres métodos clásicos.

### Método de sustitución

Consiste en despejar la incógnita que elijamos de una de las ecuaciones y, posteriormente, sustituirla en la otra.

En el siguiente vídeo puedes ver cómo se aplica este método a través de un ejemplo:

[https://www.youtube.com/embed/Svy8ff\\_su08](https://www.youtube.com/embed/Svy8ff_su08)

Vídeo de Tutomate alojado en [Youtube <https://www.youtube.com/watch?v=Svy8ff\\_su08>](https://www.youtube.com/watch?v=Svy8ff_su08)

### Método de igualación

Consiste en, elegida una misma incógnita para las dos ecuaciones, despejarla en ambas para, posteriormente, igualar las expresiones obtenidas.

En el siguiente vídeo puedes ver cómo se aplica este método a través de un ejemplo:

<https://www.youtube.com/embed/ohnnTwvl220>

Vídeo de Tutomate alojado en [Youtube <https://www.youtube.com/watch?v=ohnnTwvl220>](https://www.youtube.com/watch?v=ohnnTwvl220)

### Método de reducción

Consiste en obtener un sistema en que los coeficientes de  $x$  o de  $y$  sean iguales (con

Consiste en obtener un sistema en que los coeficientes de  $x$  o de  $y$  sean opuestos (con igual valor y distinto signo), para que así podamos eliminar dicha incógnita al sumar las dos ecuaciones. Para conseguir esto podemos multiplicar una o ambas ecuaciones por cualquier número distinto de 0 teniendo en cuenta lo que sea conveniente en cada caso.

En el siguiente vídeo puedes ver cómo se aplica este método a través de un ejemplo:

<https://www.youtube.com/embed/U00csRqen0k>

Vídeo de Tutomate alojado en Youtube <<https://www.youtube.com/watch?v=U00csRqen0k>>



## Comprueba lo aprendido

A las dos situaciones relacionadas con el fútbol que vimos en el punto anterior, le vamos a añadir una nueva pista. Plantea, en cada uno de los casos, un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, resuélvelos por el método que prefieras y completa los espacios en blanco que nos dan la solución.

1. Sabemos que  $x$ : *Número de goles que ha marcado Messi* e  $y$ : *Número de goles que ha marcado Ibrahimovic* y que, entre los dos, han marcado 40 goles. La nueva pista que nos dan es: "Messi ha anotado 10 goles más que su compañero Ibrahimovic".

$x$ : Número de goles marcados por Messi

$y$ : Número de goles marcados por Ibrahimovic

2. La ecuación que relaciona el número de goles marcados por ambos equipos es:  $x = y + 6$ , siendo  $x$ : *nº goles marcados por el Real Madrid* e  $y$ : *nº goles marcados por el F.C. Barcelona*. En este caso, la nueva pista que nos dan es: "Entre los dos equipos han marcado 172 goles."

$x$ : Número de goles marcados por el Real Madrid

$y$ : Número de goles marcados por el F.C Barcelona

1. La nueva pista, traducida al lenguaje matemático, quedaría:  $x = y + 10$ .

A continuación, planteamos el sistema de ecuaciones y lo resolvemos. En

este caso, se ha optado por resolverlo mediante el **método de sustitución**. Como la incógnita  $x$  ya aparece despejada en la segunda ecuación podemos sustituirla directamente en la primera ecuación. El resto del ejercicio es una sucesión de operaciones y resolución de ecuaciones sencillas hasta obtener la solución.

$$\begin{cases} x+y=40 \\ x=y+10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (y+10)+y=40 \\ x=y+10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2y=30 \\ x=y+10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=15 \\ x=y+10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=15 \\ x=25 \end{cases}$$

2. La nueva pista, traducida al lenguaje matemático, quedaría:  $x + y = 172$ .

A continuación, planteamos el sistema de ecuaciones y lo resolvemos. En este caso, se ha optado por resolverlo mediante el **método de igualación**. Para ello, como la incógnita  $x$  ya aparece despejada en la primera ecuación, basta con despejarla en la segunda e igualar ambas expresiones. El resto del ejercicio es una sucesión de operaciones y resolución de ecuaciones sencillas hasta obtener la solución.

$$\begin{cases} x=y+6 \\ x+y=172 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=y+6 \\ x=172-y \end{cases} \rightarrow y+6=172-y \rightarrow 2y=166 \rightarrow y=83 \rightarrow x=83+6=89 \rightarrow \begin{cases} x=89 \\ y=83 \end{cases}$$



## Caso práctico

A un partido benéfico celebrado en el estadio Ramón Sánchez Pizjuán de Sevilla han asistido 42000 espectador@s. Se han puesto a la venta únicamente dos tipos de entradas a un precio de 15 € para l@s adult@s y de 6 € para l@s niño@s. La recaudación total ha sido de 612000 €. ¿Cuántas entradas de cada tipo se han vendido?

Si llamamos  $x$ : *Nº de entradas de adultos vendidas*,  $y$ : *Nº de entradas infantiles vendidas*, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+y=42000 \\ 15x+6y=612000 \end{cases}$$

Resolviéndolo mediante cualquiera de los tres métodos, obtendremos el número de entradas vendidas:

$x = 40000$  entradas de adultos,  $y = 2000$  entradas infantiles.

Si en el sistema del ejercicio anterior

$$\begin{cases} x+y=42000 \\ 15x+6y=612000 \end{cases}$$

multiplicamos los dos miembros de la primera ecuación por -15 tendremos el mismo coeficiente de  $x$  en ambas ecuaciones aunque con signos contrarios, esto es, -15 y 15. Si sumamos las dos ecuaciones miembro a miembro veremos como la incógnita  $x$  se anula dando como resultado una ecuación en la que la única incógnita es  $y$ . Al resolverla, conoceremos el valor numérico de  $y$ .

Posteriormente, sustituiremos este valor de  $y$  en cualquiera de las ecuaciones originales lo que nos permitirá calcular el valor de  $x$ .

$$\begin{cases} x+y=42000 \\ 15x+6y=612000 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -15x-15y=-630000 \\ 15x+6y=612000 \end{cases} \rightarrow -9y=-18000 \rightarrow y=2000 \rightarrow \begin{cases} x+2000=42000 \\ y=2000 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=40000 \\ y=2000 \end{cases}$$

El método que hemos aplicado no es otro que el **método de reducción**.



## Reflexiona

Uno de los motores que propulsa el lanzamiento del cohete **Ariane 5** es el **Vulcain 2**.

Durante los 540 segundos que dura su funcionamiento consume las 155 toneladas de combustible que contiene y que están compuestas exclusivamente por **oxígeno** e **hidrógeno** líquido. Por cada tonelada de hidrógeno el Vulcain carga 5'2 toneladas de oxígeno.

Plantea y resuelve un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que nos permita saber la cantidad exacta de oxígeno e hidrógeno líquido que se almacenan en el motor.

Por ejemplo, si llamamos  $x$  a las toneladas de hidrógeno e  $y$  a las de oxígeno, obtendremos las siguientes ecuaciones.

Como almacena 155 toneladas en total, tenemos que:  $x + y = 155$ .

Y por otro lado, ya que por cada tonelada de hidrógeno carga 5'2 de oxígeno:  $y = 5'2 \cdot x$ .

Sustituimos la incógnita  $y$  en la primera ecuación con lo que obtenemos  $x + 5'2x = 150$ . Por tanto,  $x = 25$  toneladas de hidrógeno, e  $y = 130$  toneladas de oxígeno.



## Para saber más

Para que puedas practicar los métodos de resolución anteriores te proponemos que visites el siguiente enlace del proyecto Descartes.

Education Digital con Descartes **edad** 3º ESO Matemáticas **proyecto descartes** 2014

Sistemas de ecuaciones

ocultar índice **Antes de empezar** **Contenidos** **Ejercicios** **Autoevaluación** **Para enviar al tutor** **Para saber más**

1. Ecuaciones lineales  
Definición, Solución

2. Sistemas de ecuaciones lineales  
Definición, Solución  
Número de soluciones

3. Métodos de resolución  
Reducción  
Sustitución  
Igualación

4. Aplicaciones prácticas  
Resolución de problemas

RESUMEN

**Objetivos**  
En esta quincena aprenderás a:

- Reconocer y clasificar los sistemas de ecuaciones según su número de soluciones.
- Obtener la solución de un sistema mediante una tabla.
- Resolver sistemas lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas, por los métodos de sustitución, igualación y reducción.
- Utilizar el lenguaje algebraico y los sistemas para resolver problemas.

**Ecuaciones**

$$\sqrt{x+1} = 7$$

$$x+1 = 49$$

$$x$$

Por presumir de certero un tirador atrevido se encontró comprometido en el lance que os refiero.

Y fue, que ante una caseta de la feria del lugar presumió de no fallar ni un tiro con la escopeta, y el feriante alzando el gallo un duro ofreció pagarle por cada acierto y cobrarle a tres pesetas el fallo.

Dieciséis veces tiró el tirador afamado al fin dijo, despedido por los tiros que falló:

<<Mala escopeta fue el cebo y la causa de mi afrenta pero ajustada la cuenta ni me debes ni te debo>>.

Y todo el que atentamente este relato siguió podrá decir fácilmente cuántos tiros acertó.

Prueba a encontrar la solución, introduce el resultado y pulsa intro.

Aciertos

Bajo licencia Creative Commons si no se indica lo contrario

Autor: Miguel Ángel Cabazón Ochoa  
Adaptación con DescartesJS realizada por: proyectodescartes.org - José R. Galo Sánchez  
Herramienta DescartesJS promovida por: proyectodescartes.org

[https://proyectodescartes.org/EDAD/materiales\\_didacticos/EDAD\\_4eso\\_sistemas\\_ecuaciones-JS-apli/index.htm](https://proyectodescartes.org/EDAD/materiales_didacticos/EDAD_4eso_sistemas_ecuaciones-JS-apli/index.htm)

## 2. Sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas

---

Hay multitud de situaciones y problemas cuya solución se obtiene resolviendo sistemas con muchas ecuaciones e incógnitas. Si ya tiene mérito resolver problemas usando dos ecuaciones, imagínate con tres, cuatro,... resulta casi un ejercicio de "**malabarismo**". Gauss dio una respuesta a este problema resolviendo sistemas con el mismo número de ecuaciones que incógnitas.



Imagen de ihor\_konst en Pixabay <<https://pixabay.com/es/photos/malabares-bolas-bolas-de-malabares-5544687/>> . Licencia Pixabay <<https://pixabay.com/es/service/license/>>

El método de resolución de Gauss lleva su nombre debido a que él lo describió en un artículo en el que detallaba todos los cálculos que hizo para determinar la órbita del asteroide Pallas. Los parámetros de la órbita tenían que determinarse mediante observaciones del asteroide durante seis años (1803-1809), lo que dio lugar a un *sistema de seis ecuaciones con seis incógnitas*.

Gauss demostró cómo resolver estas ecuaciones reemplazándolas sistemáticamente por un nuevo sistema en el que sólo la primera ecuación tenía seis incógnitas, la segunda tenía cinco, la tercera tenía sólo cuatro, y así sucesivamente, hasta que la última ecuación tenía una sola incógnita. Este método también se denomina **método de reducción en cascada o de triangulación**.



### Importante

---

El **método de Gauss** consiste en obtener sistemas equivalentes al que queremos resolver, cada vez más sencillos, hasta obtener uno muy simple con forma triangular. El

sistema que buscamos debe tener una única incógnita en su última ecuación, dos en la penúltima,..., y todas las incógnitas en la primera ecuación.

Las soluciones se obtienen desde la última ecuación a la primera, es decir, resolviendo, en primer lugar, la última, sustituyendo el valor obtenido en la penúltima y resolviendo la ecuación resultante, y así sucesivamente.

En el siguiente vídeo se explica de manera sencilla, clara, y mediante un ejemplo, el método de Gauss. En este caso, se va a resolver un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas.

<https://www.youtube.com/embed/RBJceTKociQ>

Vídeo de lasmatematicas.es alojado en Youtube <<https://www.youtube.com/watch?v=RBJceTKociQ>>



## Comprueba lo aprendido

Resolver, por el método de Gauss, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x+5y = 16 \\ x+3y-2z = -2 \\ x+z = 4 \end{cases}$$

- ☐  $x = 1, y = 2, z = 1$
- ☐  $x = -2, y = 4, z = 6$
- ☐  $x = 0, y = 1, z = -1$

¡Incorrecto!

¡Correcto!

¡Incorrecto!

### Solución

1. Incorrecto
2. Opción correcta

**3. Incorrecto**

Resuelve, por el método de Gauss, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+y = 1 \\ y+z = -2 \\ x+z = 3 \end{cases}$$

- ☐  $x = 0, y = 1, z = 6$
- ☐  $x = 0, y = 0, z = 1$
- ☐  $x = 3, y = -2, z = 0$

¡Incorrecto!

¡Incorrecto!

¡Correcto!

### Solución

1. Incorrecto
2. Incorrecto
3. Opción correcta

Resuelve, por el método de Gauss, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 5x+2y+3z = 4 \\ 2x+2y+z = 3 \\ x-2y+2z = -3 \end{cases}$$

- ☐  $x = 1, y = 1, z = -1$
- ☐  $x = 0, y = 1, z = 0$
- ☐  $x = 2, y = 3, z = 0$

¡Correcto!

¡Incorrecto!

¡Incorrecto!

## Solución

1. Opción correcta
2. Incorrecto
3. Incorrecto



## Ejercicio Resuelto

Resolver el siguiente sistema por el método de Gauss:

$$\begin{cases} 3x+2y+z=4 \\ x-y+3z=2 \\ 2x+y-z=1 \end{cases}$$

### Paso 1

Dado que el coeficiente de la incógnita  $x$  en la segunda ecuación es 1, podemos cambiar el orden de las ecuaciones primera y segunda. Al hacer esto, obtenemos un sistema equivalente al anterior:

$$\begin{cases} x-y+3z=2 \\ 3x+2y+z=4 \\ 2x+y-z=1 \end{cases}$$

### Paso 2

Para obtener el sistema escalonado que buscamos hemos de sustituir la segunda ecuación por otra con dos incógnitas ( $y$  y  $z$ ). Para ello, hemos de aplicar la transformación consistente en multiplicar la primera ecuación por un número y sumar el resultado a la segunda, de tal forma que en la ecuación resultante solo queden coeficientes para las incógnitas  $y$  y  $z$  (y que sean distintos de 0).

En nuestro caso, bastará con multiplicar la primera ecuación por  $-3$  (que coincide con el coeficiente que acompaña a la incógnita  $x$  en la segunda ecuación con el signo contrario) y sumarla con la segunda como puede apreciarse a continuación:

$$\begin{array}{r} -3(x-y+3z) = -3 \cdot 2 \\ -3x+3y-9z = -6 \\ 3x+2y+z = 4 \\ \hline 0x+5y-8z = -2 \end{array}$$

De esta forma, el sistema resultante, equivalente al primero, es el siguiente:

$$\begin{cases} x-y+3z=2 \\ 5y-8z=-2 \\ 2x+y-z=1 \end{cases}$$

### Paso 3

A continuación, vamos a aplicar el mismo procedimiento a la primera y tercera ecuaciones, de manera que sustituyamos la tercera por otra con dos incógnitas ( $y$  y  $z$ ). Para ello, hemos de aplicar la transformación consistente en multiplicar la primera ecuación por un número y sumar el resultado a la tercera, de tal forma que en la ecuación resultante solo queden coeficientes para las incógnitas  $y$  y  $z$  (y que sean distintos de 0).

En nuestro caso, bastará con multiplicar la primera ecuación por -2 (que coincide con el coeficiente que acompaña a la incógnita  $x$  en la segunda ecuación con el signo contrario) y sumarla con la tercera como puede apreciarse a continuación:

$$\begin{array}{r} -2(x-y+3z) = -2 \cdot 2 \\ -2x+2y-6z = -4 \\ 2x+y-z = 1 \\ \hline 0x+3y-7z = -3 \end{array}$$

El sistema resultante, equivalente al primero, es el siguiente.

$$\begin{cases} x-y+3z=2 \\ 5y-8z=-2 \\ 3y-7z=-3 \end{cases}$$

### Paso 4

Finalmente, volvemos a aplicar el procedimiento a la segunda y tercera ecuaciones, de manera que sustituyamos la tercera por otra con una sola incógnita ( $z$ ). Para ello, hemos de aplicar la transformación consistente en multiplicar la segunda y tercera ecuaciones por dos números (que, en nuestro caso, coincidirán con los coeficientes de la otra) de manera que, al sumarmos, obtengamos una ecuación que tenga únicamente coeficiente para la incógnita  $z$ .

$$\begin{array}{r} -3(5y-8z) = -3 \cdot (-2); \quad 5(3y-7z) = -3 \cdot 5 \\ -15y+24z = 6 \\ 15y-35z = -15 \\ \hline 0y-11z = -9 \end{array}$$

obteniendo, finalmente, el sistema de ecuaciones escalonado deseado:

$$\begin{cases} x-y+3z=2 \\ 5y-8z=-2 \\ -11z=-9 \end{cases}$$

La solución es sencilla de hallar si comenzamos a resolver desde la tercera ecuación y vamos "escalando" hasta la primera. De esta forma, la solución del sistema es:

$$x = \frac{5}{11}, y = \frac{10}{11}, z = \frac{9}{11}$$

## Resumen

---



### Importante

---

Una **ecuación lineal con dos incógnitas** es una igualdad de la siguiente forma:  $ax + by = c$ , donde  $x$  e  $y$  son las incógnitas de la ecuación y  $a$ ,  $b$  y  $c$  son números conocidos. Los valores  $a$  y  $b$  se llaman **coeficientes** y  $c$  se llama **término independiente** de la ecuación.

Por ejemplo, para la ecuación  $x + y = 40$ , se tiene que  $a = 1$ ,  $b = 1$  y  $c = 40$ .

Las **soluciones de la ecuación son pares de números** que al ser sustituidos en la ecuación por  $(x, y)$ , hacen que ambos miembros valgan lo mismo (es decir, que se alcance el equilibrio).

Un **sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas**, como su propio nombre indica, está compuesto por dos ecuaciones lineales, es decir,

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

**Resolver el sistema** es encontrar una solución común de ambas ecuaciones. Por tanto, una **solución** del sistema es una pareja de valores  $(x, y)$  que cumple ambas ecuaciones de manera simultánea.

---



### Importante

---

Para resolver analíticamente un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas utilizamos uno de los siguientes métodos:

#### Método de sustitución

Consiste en despejar la incógnita que elijamos de una de las ecuaciones y, posteriormente, sustituirla en la otra.

#### Método de igualación

Consiste en, elegida una misma incógnita para las dos ecuaciones, despejarla para, posteriormente, igualar las expresiones obtenidas.

#### Método de reducción

Consiste en obtener un sistema en el que los coeficientes de la incógnita  $x$  (o de la incógnita  $y$ ) sean opuestos (con igual valor y distinto signo) para que, una vez sumadas ambas ecuaciones, podamos eliminar dicha incógnita. Para que esto ocurra, es necesario multiplicar una o ambas ecuaciones por los números adecuados.

---



## Importante

---

El **método de Gauss** consiste en obtener sistemas equivalentes al que queremos resolver, cada vez más sencillos, hasta obtener uno muy simple con forma triangular.

El sistema que buscamos debe tener una única incógnita en su última ecuación, dos en la penúltima,..., y todas las incógnitas en la primera ecuación.

Las soluciones se obtienen, finalmente, resolviendo las ecuaciones desde la última ecuación hasta la primera. Esto es, resolvemos la última, sustituimos el valor obtenido en la penúltima y resolvemos, y así sucesivamente.

Tienes un resumen en el siguiente [pdf](http://3con14.com/_data/bloques/algebra_lineal/qrc_sistemas_ecu_lin_3x3.pdf) [<http://3con14.com/\\_data/bloques/algebra\\_lineal/qrc\\_sistemas\\_ecu\\_lin\\_3x3.pdf>](http://3con14.com/_data/bloques/algebra_lineal/qrc_sistemas_ecu_lin_3x3.pdf) .

---

## Imprimible

---

Descarga [aquí](#) la versión imprimible de este tema.

MT1 - Tema 2.3: Álgebra: Sistemas de ecuaciones

1 / 36

39%

1

2

3

4

MT1 - Tema 2.3: Álgebra: Sistemas de ecuaciones

Álgebra: Sistemas de ecuaciones

Matemáticas I

1º Bachillerato

Contenidos

Álgebra

Sistemas de ecuaciones

1. Dos ecuaciones y dos incógnitas

Vamos a centrarnos en el estudio del equilibrio (ecuaciones).

Pero, esta vez, en vez de aparecer una letra aparecerán dos. Y aún hay más ...

Si no tuviéramos bastante con dos letras, en vez de una ecuación aparecerán dos. Como se diría en el argot cícense: ¡más difícil todavía!

¡No te preocupes! ¡Tampoco es para tanto!

A continuación, vas a descubrir que la complejidad no aumenta en exceso ni con la aparición de una letra más, ni con la aparición de una ecuación más.

Verás que trabajar con ellas es imprescindible para la resolución de algunas situaciones problemáticas que, sin la ayuda de los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, serían mucho más complicado resolver.




Imagen de StockImage en [Canva](#), Licencia [Canva](#)

1.1. Ecuaciones con dos incógnitas



Si quieres escuchar el contenido de este archivo, puedes instalar en tu ordenador el lector de pantalla libre y gratuito **NDVA** <<https://nvda.es/descargas/descarga-de-nvda/>>

.

---

## Aviso legal

---

<http://www.juntadeandalucia.es/educacion/permanente/materiales/index.php?aviso#space>