

MT1 - Tema 2.3: Álgebra: Sistemas de ecuaciones



Álgebra: Sistemas de ecuaciones

Matemáticas I

1º Bachillerato

Contenidos

Álgebra

Sistemas de ecuaciones

1. Dos ecuaciones y dos incógnitas

Vamos a centrarnos en el estudio del equilibrio (ecuaciones).

Pero, esta vez, en vez de aparecer una letra aparecerán dos. Y aún hay más ...

Si no tuviéramos bastante con dos letras, en vez de una ecuación aparecerán dos. Como se diría en el argot circense: ¡más difícil todavía!.

¡No te preocupes! ¡Tampoco es para tanto!

A continuación, vas a descubrir que la complejidad no aumenta en exceso ni con la aparición de una letra más, ni con la aparición de una ecuación más.

Verás que trabajar con ellas es imprescindible para la resolución de algunas situaciones problemáticas que, sin la ayuda de los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, serían mucho más complicado resolver.



Imagen de StockSnap en [Pixabay](#). Licencia [Pixabay](#).

1.1. Ecuaciones con dos incógnitas

El siguiente titular apareció en el diario SPORT.es el día 3 de abril de 2010.

UN TÁNDEM QUE CADA VEZ SE ENTIENDE MEJOR

Messi-Ibrahimovic, seguro de gol... y de victoria

En lo que va de Liga entre los dos delanteros han marcado 40 goles, los mismos que lleva el Athletic



Fuente: SPORT.es Fecha: 03/04/2010

Si traducimos al lenguaje algebraico la frase del subtítulo: "entre los dos delanteros han marcado 40 goles", al haber dos objetos (en este caso dos jugadores), y dos cantidades asociadas a ellos, "número de goles que ha marcado cada uno", necesitamos dos incógnitas.

Por tanto, si llamamos:

x: Número de goles que ha marcado Messi

y: Número de goles que ha marcado Ibrahimovic

La frase anterior ya traducida, quedaría de la siguiente forma: $x + y = 40$, que es una ecuación (igualdad entre dos miembros) con dos incógnitas (letras). ¿Has visto que no es tan complicado?



Importante

Una ecuación lineal con dos incógnitas es una igualdad entre dos expresiones algebraicas.

Su expresión general tiene la siguiente forma: $ax + by = c$, donde x e y son las incógnitas de la ecuación y a , b y c son números.

a y b son los coeficientes y c es el término independiente de la ecuación.

En el caso anterior $x+y=40$, $a=1$, $b=1$ y $c=40$.

Las soluciones de la ecuación son pares de números que al sustituirlos en la ecuación por (x, y), hacen que ambos miembros valgan lo mismo (se alcance el equilibrio).



Comprueba lo aprendido

1. ¿Es posible que Messi haya marcado 30 goles e Ibrahimovic 20 goles?

- ☐ Sí
- ☐ No

¡Incorrecto!

No es posible, porque $30 + 20 = 50$ y entre los dos han marcado 40 goles no 50.

Conclusión: $(x,y) = (30, 20)$ no es una solución de la ecuación.

¡Correcto!

No es posible, porque $30 + 20 = 50$ y entre los dos han marcado 40 goles no 50.

Conclusión: $(x,y) = (30, 20)$ no es una solución de la ecuación.

Solución

1. Incorrecto
2. Opción correcta

2. ¿Es posible que tanto Messi como Ibrahimovic hayan marcado 20 goles cada uno?

- ☐ Sí
- ☐ No

¡Correcto!

Sí es posible, porque $20 + 20 = 40$, que es exactamente la cantidad de goles que han marcado entre ambos, según indica el periódico.

Conclusión: $(x,y) = (20, 20)$ es una solución de la ecuación.

¡Incorrecto!

Sí es posible, porque $20 + 20 = 40$, que es exactamente la cantidad de goles que han marcado entre ambos, según indica el periódico.

Conclusión: $(x,y) = (20, 20)$ es una solución de la ecuación.

Solución

1. Opción correcta
2. Incorrecto

3. Yo creo que Messi ha marcado 25 goles y que Ibrahimovic ha marcado sólo 15 pero mi hermana dice que, según sus cuentas, Messi ha marcado 12 goles e Ibrahimovic 28. ¡Vaya disparidad de opiniones!. Pero, ¿podemos tener razón los dos?

- ☐ Sí
- ☐ No

¡Correcto!

En efecto, y aunque parezca contradictorio, tenemos razón los dos, porque

- según mis datos: $25 + 15 = 40$, que es exactamente la cantidad de goles que han marcado entre ambos, según indica el periódico.

- según las cuentas de mi hermana: $12 + 28 = 40$, que es la cantidad de goles que han marcado.

Conclusión: $(x,y) = (25, 15)$ es una solución de la ecuación y $(x,y) = (12, 28)$ es otra solución de la ecuación.

¡Incorrecto!

En efecto, y aunque parezca contradictorio, tenemos razón los dos, porque

- según mis datos: $25 + 15 = 40$, que es exactamente la cantidad de goles que han marcado entre ambos, según indica el periódico.

- según las cuentas de mi hermana: $12 + 28 = 40$, que es la cantidad de goles que han marcado.

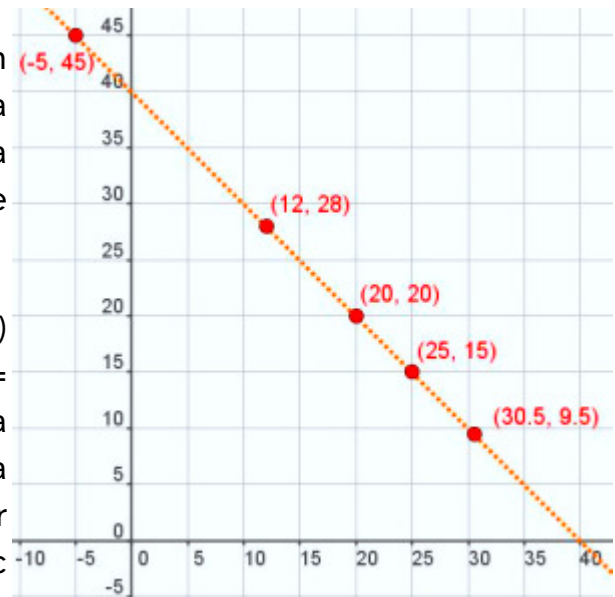
Conclusión: $(x,y) = (25, 15)$ es una solución de la ecuación y $(x,y) = (12, 28)$ es otra solución de la ecuación.

Solución

1. Opción correcta
2. Incorrecto

Para saber si una pareja de números es solución de una ecuación lineal con dos incógnitas, basta con sustituir en la ecuación cada número por la letra correspondiente y comprobar si se cumple o no la igualdad numérica.

Acabamos de ver, que los pares $(12, 28)$, $(20, 20)$ y $(25, 15)$ son soluciones de la ecuación $x + y = 40$. Estos pares de puntos, además de cumplir la ecuación tienen sentido en el contexto de la situación que planteamos, es decir, pueden ser los goles marcados por Messi e Ibrahimovic respectivamente.



Pero hay otros pares de puntos que también cumplen la igualdad $x + y = 40$. Por ejemplo $(-5, 45)$ ó $(30.5, 9.5)$ suman 40, pero no tienen sentido como goles marcados en un partido.

Nos planteamos entonces ¿cuántos pares de puntos pueden ser solución de la ecuación lineal $x + y = 40$?

En la imagen de la derecha hemos representado en uno ejes coordenados los pares de puntos que hemos visto que son solución de $x + y = 40$. Para ello, el valor de la x lo hemos colocado en el eje OX , y el de la y en el eje OY .

A la vista de la imagen, ¿qué otros pares de puntos pueden ser solución de nuestra ecuación?



Importante

Dada una ecuación lineal con dos incógnitas, $ax + by = c$, siempre se cumple:

1. Que sus soluciones, pares de valores (x,y) , representan puntos del plano que están alineados, es decir, están situados sobre la misma recta.
 2. Como una recta tiene infinitos puntos, una ecuación lineal con dos incógnitas también tiene infinitas soluciones .
-



Comprueba lo aprendido

En un portal deportivo en internet leemos el siguiente titular:

"A estas alturas de la temporada el Real Madrid es el equipo más goleador de la Liga con 6 goles más que el F.C. Barcelona, que ocupa la segunda posición en la clasificación de equipos goleadores."

Indica Verdadero o Falso en las siguientes afirmaciones:

1. La ecuación que relaciona el número de goles marcados por ambos equipos es: $x = y + 6$, siendo x : nº goles marcados por el Real Madrid e y : nº goles marcados por el F.C. Barcelona.

☐ Verdadero ☐ Falso

Verdadero

2. El F.C Barcelona ha marcado 73 goles y el Real Madrid 80.

☐ Verdadero ☐ Falso

Falso

No es cierto. Veamos por qué.

Sabemos que la relación entre los goles marcados por ambos equipos viene dada por la ecuación: $x = y + 6$, donde x : nº goles marcados por el Real Madrid e y : nº goles marcados por el F.C. Barcelona.

Si fuera cierto, entonces, la pareja: $(x,y)=(80,73)$ sería una solución de la ecuación.

Pero, si sustituimos en la ecuación vemos que no la satisfacen, porque: $80 = 73 + 6$, $80 = 79$, que no es cierto.

3. Podemos afirmar, con toda seguridad, que: "El F.C Barcelona ha marcado 73 goles y el Real Madrid 79".

☐ Verdadero ☐ Falso

Falso

No es cierto. Veamos por qué.

Sabemos que la relación entre los goles marcados por ambos equipos viene dada por la ecuación: $x = y + 6$, donde x : nº goles marcados por el Real Madrid e y : nº goles marcados por el F.C. Barcelona.

En este caso, la pareja: $(x,y)=(79,73)$ sí que es una solución de la ecuación. Podemos decir que es una combinación goleadora posible, pero, con los datos que disponemos, no podemos afirmar con toda seguridad que esta sea la única combinación posible.

Ésto es debido a que una ecuación con dos incógnitas tiene infinitas soluciones.

1.2. Resolución gráfica de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

En las dos situaciones mostradas en el punto anterior no hemos podido más que *establecer una relación entre las dos incógnitas y dar posibles combinaciones de resultados*.

Pero, ni hemos podido determinar un número único de goles marcados por cada uno de los delanteros del F.C Barcelona, ni el número preciso de goles marcados por cada uno de los equipos.



Imagen de sasint en [Pixabay](#). Licencia [Pixabay](#).

En ambas situaciones nos falta una pista: otra ecuación. Al tener dos incógnitas, para poder encontrar unos valores únicos para los goles marcados, necesitamos al menos dos pistas, es decir dos ecuaciones.

Si las dos pistas son "buenas", entonces sí que podremos encontrar unos valores únicos para las incógnitas planteadas.

Con las dos pistas tendremos lo que en matemáticas se conoce con el nombre de sistema de ecuaciones .



Importante

Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas , como su propio nombre

indica, está compuesto por dos ecuaciones de primer grado.

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

Resolver el sistema es encontrar una solución común de ambas ecuaciones. Por tanto, una solución del sistema es una pareja de valores (x,y) que cumple ambas ecuaciones de manera simultánea.

Vamos a ver distintas maneras de resolver un sistema de ecuaciones lineales. Comenzaremos con el método gráfico que nos mostrará que resolver un sistema de ecuaciones no es otra cosa que calcular los puntos de corte de sus dos rectas asociadas.



Importante

Vimos que existe una relación entre una ecuación lineal con dos incógnitas y su representación gráfica (una recta). Además, sabemos que una solución del sistema de ecuaciones es una solución común de ambas ecuaciones.

Si interpretamos ésto desde un punto de vista gráfico, una solución del sistema vendrá dada por las coordenadas (x,y) de un punto que pertenezca a las dos rectas, esto es, de un punto de corte de las dos rectas.

Por tanto, para resolver un sistema de ecuaciones, por el método gráfico, debemos:

- Representar gráficamente la recta de cada una de las ecuaciones.
 - Determinar los puntos comunes de ambas rectas.
-

Veamos un ejemplo

$$\begin{cases} x+y=5 \\ 6x-3y=-24 \end{cases}$$

Vamos a despejar la "y" de cada una de las ecuaciones:

$$\begin{cases} x+y=5 \\ 6x-3y=-24 \end{cases} \begin{cases} \rightarrow y=5-x \\ \rightarrow y=\frac{-24-6x}{-3} \end{cases}$$

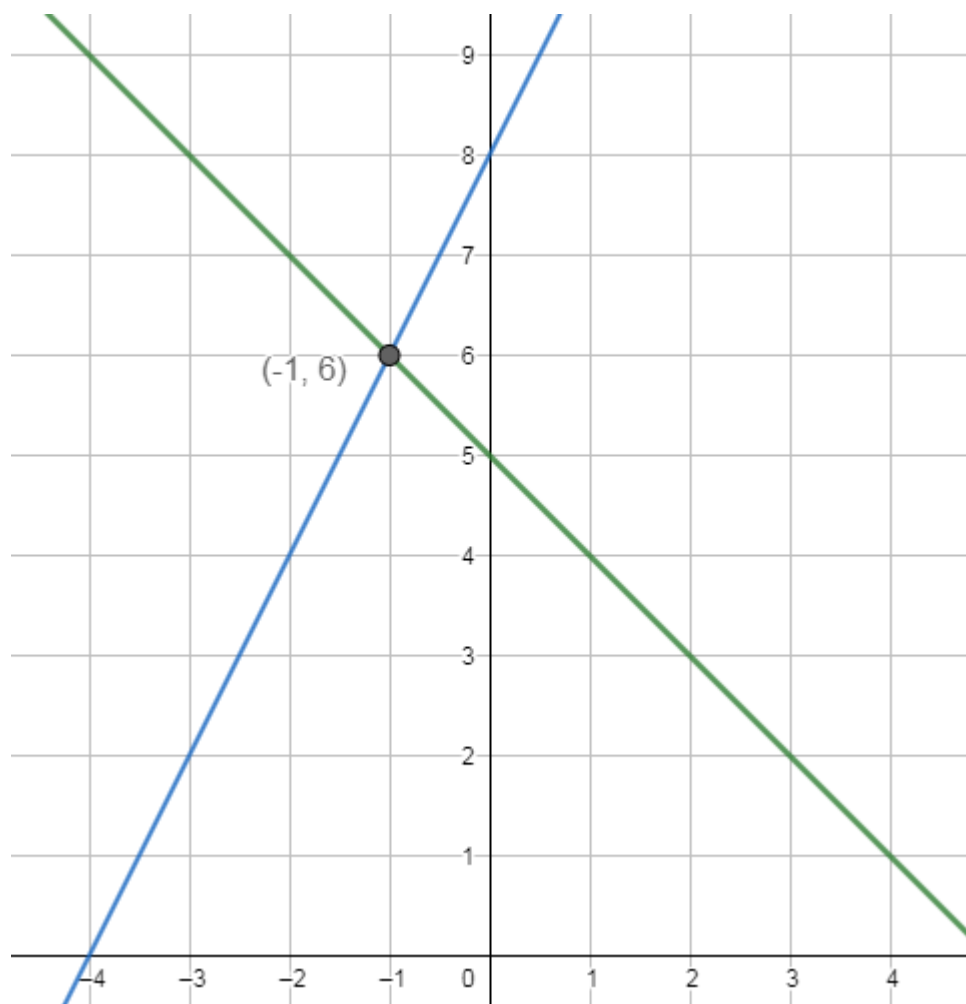
Ahora, en una tabla, daremos valores a la "x", y realizando las operaciones obtendremos

los correspondientes valores de la "y". Así, conseguiremos las coordenadas (x, y) de algunos puntos de cada recta, y uniéndolos obtendremos sus gráficas.

$y = 5 - x$		$y = \frac{-24 - 6x}{-3}$	
x	y	x	y
0	5	0	8
1	4	1	10
-1	6	-1	6

La solución del sistema es el punto donde se cortan las dos rectas, como podemos ver en la tabla, dicho punto es A(-1, 6), es decir, la solución es: $x = -1$ y $y = 6$.

Veamos la representación gráfica de este sistema y su solución, hemos llamado "a" a la recta: $y = 5 - x$, "b" a la recta: $y = \frac{-24 - 6x}{-3}$, y A(-1, 6) es el punto de corte de las dos rectas a y b.



Como puedes ver, dibujar las rectas de cada una de las ecuaciones no es una tarea excesivamente compleja. Basta despejar y en función de x, elaborar una pequeña tabla de valores y representar los puntos obtenidos.



Comprueba lo aprendido

Asocia cada sistema con su representación gráfica.

1

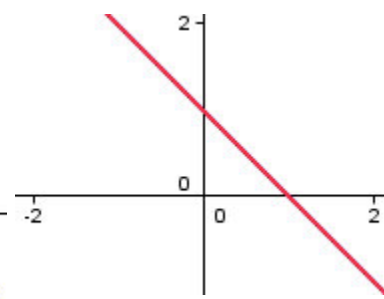
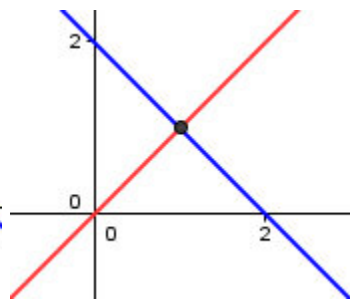
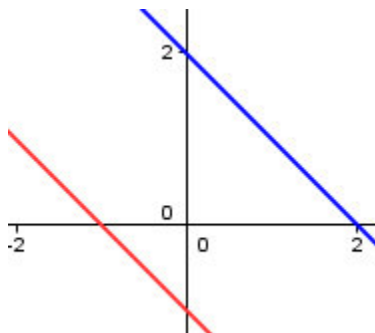
2

3

$$\begin{cases} x+y=2 \\ x+y=-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=1 \\ -2x-2y=-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y=0 \\ x+y=2 \end{cases}$$



- Al Sistema 1 le corresponde la:

 [Sugerencia](#)

- ☐ Gráfica 1
- ☐ Gráfica 2
- ☐ Gráfica 3

¡Correcto!

Gráfica 1.

Basta representar las dos ecuaciones despejando y en función de x y realizando una pequeña tabla de valores.

Ten en cuenta esta observación para futuros sistemas que vayas a resolver. Si observas las ecuaciones verás que es imposible que al mismo tiempo: "la suma de dos números (x e y) valga 2 y que valga -1 ". O una cosa o la otra pero no ambas. Las ecuaciones, son contradictorias y así es imposible encontrar una solución. Cada vez que ocurra esto, en las ecuaciones de un sistema, en la representación gráfica van a salir dos rectas paralelas que, evidentemente, nunca se cortan. No hay punto de corte, no hay solución.

¡Incorrecto!

¡Incorrecto!

Solución

1. Opción correcta
2. Incorrecto
3. Incorrecto

- Al sistema 2 le corresponde la:

- ☐ Gráfica 1
- ☐ Gráfica 2
- ☐ Gráfica 3

¡Incorrecto!

¡Incorrecto!

¡Correcto!

Gráfica 3.

Basta representar las dos ecuaciones despejando y en función de x y realizando una pequeña tabla de valores.

Ten en cuenta esta observación para futuros sistemas que vayas a resolver. Si observas las ecuaciones verás que la segunda ecuación es múltiplo de la primera. Se obtiene multiplicando la primera por -2 . En realidad, son ecuaciones equivalentes, tienen las mismas soluciones. Se cortan en infinitos puntos. El

sistema tiene infinitas soluciones . Cuando ocurra ésto, su representación gráfica serán dos rectas coincidentes, una encima de la otra .

Solución

1. Incorrecto
2. Incorrecto
3. Opción correcta

• Al sistema 3 le corresponde la:

- ☐ Gráfica 1
- ☐ Gráfica 2
- ☐ Gráfica 3

¡Incorrecto!

¡Correcto!
Gráfica 2.

Basta representar las dos ecuaciones despejando y en función de x y realizando una pequeña tabla de valores.

Ten en cuenta esta observación para futuros sistemas que vayas a resolver. Si observas las ecuaciones verás que ni son contradictorias, ni una es múltiplo de otra. Cada vez que ocurra ésto, la representación gráfica van a salir dos rectas secantes (que se cortan) en un único punto. El sistema tiene una única solución, que viene dada por las coordenadas $(x,y)=(1,1)$ del punto de corte.

¡Incorrecto!

Solución

1. Incorrecto
2. Opción correcta
3. Incorrecto



Comprueba lo aprendido

1. Al resolver gráficamente el sistema $\begin{cases} -2x+5=-3 \\ -6x+15y=-9 \end{cases}$ obtenemos:

- ☐ a) Las dos rectas se cortan en el punto (4, -1), luego la solución es: $x=4$ y $y=-1$
- ☐ b) Las dos rectas son coincidentes, luego el sistema tiene infinitas soluciones.
- ☐ c) Las dos rectas son coincidentes, luego el sistema no tiene solución.

¡Incorrecto!

¡Correcto!

¡Incorrecto!

Solución

1. Incorrecto
2. Opción correcta
3. Incorrecto

2. Si resolvemos gráficamente el sistema $\begin{cases} x-2y=3 \\ 2x-4y=1 \end{cases}$ obtenemos:

- ☐ a) Dos rectas paralelas, el sistema no tiene solución.
- ☐ b) Dos rectas coincidentes, el sistema tiene infinitas soluciones.
- ☐ c) Las rectas se cortan en el punto (5, 1), luego la solución es $x=5$ y $y=1$

¡Correcto!

¡Incorrecto!

¡Incorrecto!

Solución

1. Opción correcta
2. Incorrecto
3. Incorrecto

3. Resuelve gráficamente el sistema $\begin{cases} x-y=3 \\ x+2y=9 \end{cases}$ e indica su solución.

- ☐ a) $x = 1$ y $y = 4$
- ☐ b) $x = 4$ y $y = 1$
- ☐ c) $x = 5$ y $y = 2$

¡Incorrecto!

¡Incorrecto!

¡Correcto!

Solución

1. Incorrecto
 2. Incorrecto
 3. Opción correcta
-

1.3. Métodos de resolución analítica

Como hemos visto en el apartado anterior, un sistema se puede resolver gráficamente. Pero en muchas ocasiones, este método presenta algunos inconvenientes.

En el caso de que no dispongamos de una herramienta informática preparada para representar las gráficas, estaremos obligados a construir una tabla con los puntos, para posteriormente realizar la representación de las rectas a mano.

También nos puede ocurrir que, una vez representadas las rectas, el punto de corte esté muy alejado del origen de coordenadas o que no tenga las coordenadas enteras. Situaciones estas, que suelen significar un obstáculo para encontrar la solución exacta.

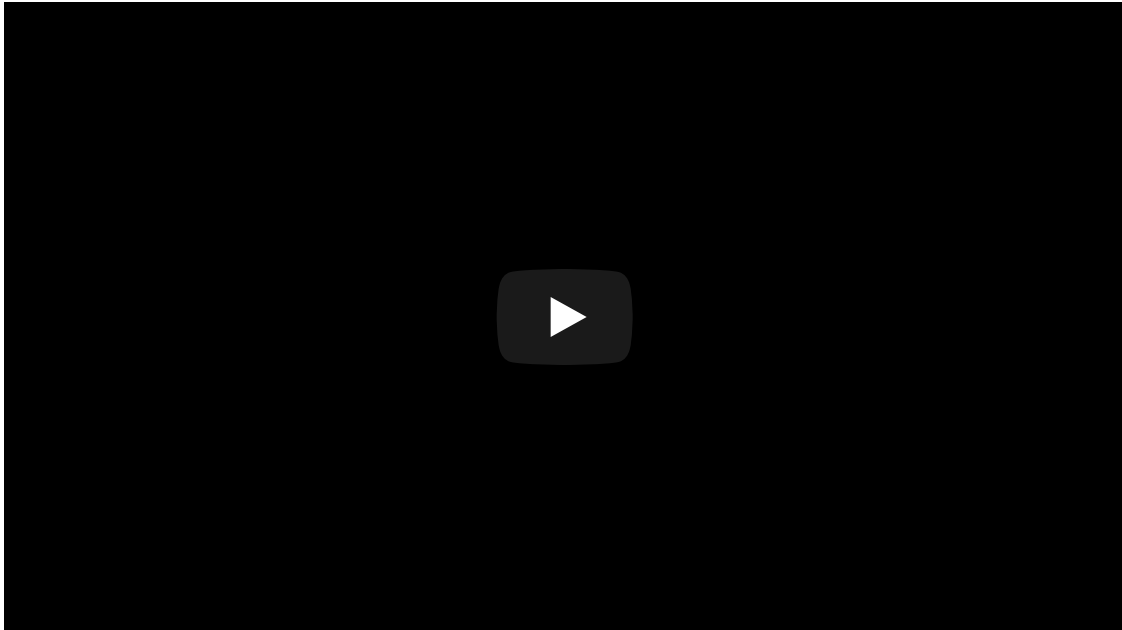
Todos los inconvenientes señalados anteriormente justifican de manera clara la necesidad de que existan métodos de resolución de sistemas analíticos, es decir, realizando operaciones.

Veamos los tres métodos más clásicos.

Método de sustitución

Consiste en despejar la incógnita que elijamos de una de las ecuaciones y, posteriormente, sustituirla en la otra.

En el siguiente vídeo puedes ver el método explicado a través de un ejemplo:

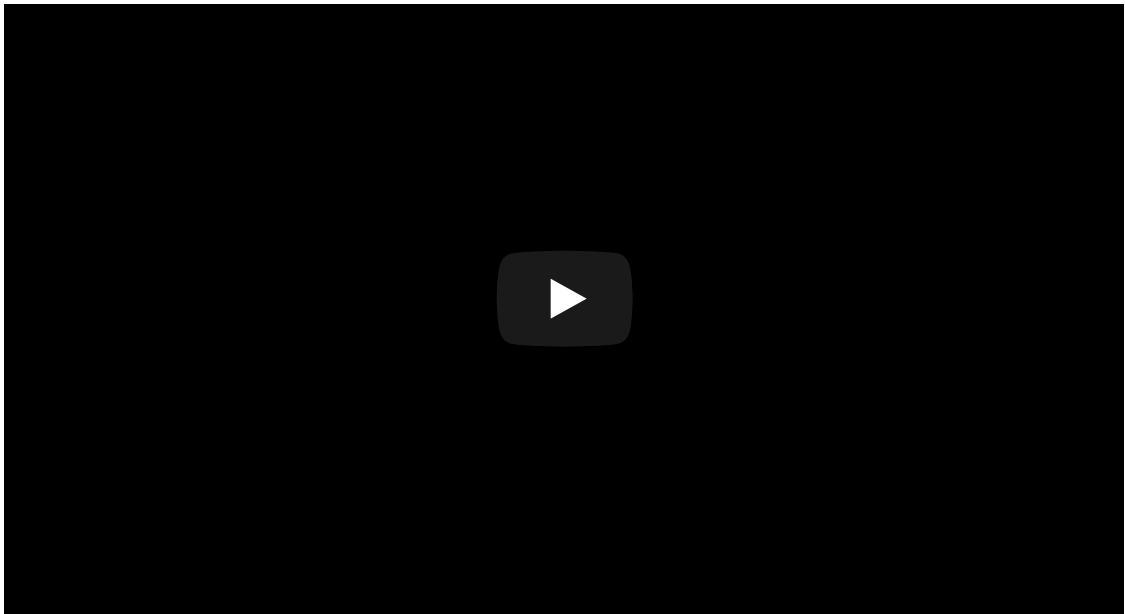


Vídeo de Tutomate alojado en [Youtube](#)

Método de igualación

Consiste en, elegida una misma incógnita para las dos ecuaciones, despejarla en ambas, para posteriormente igualar las expresiones obtenidas.

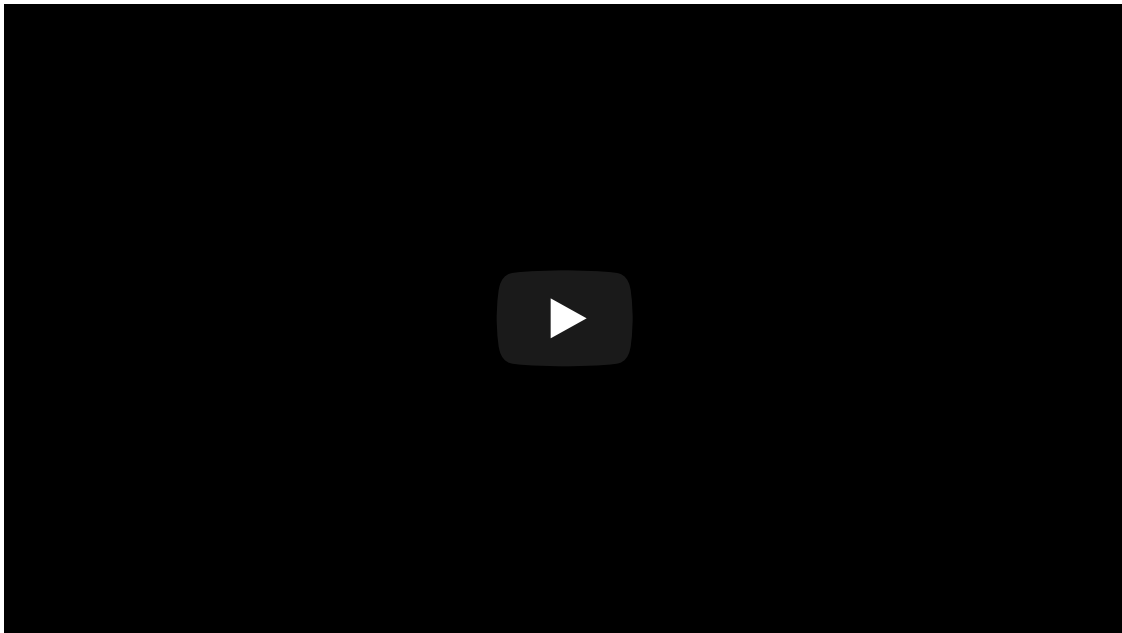
Veamos unos ejemplos prácticos en el siguiente vídeo:



Vídeo de Tutomate alojado en [Youtube](#)

Consiste en obtener un sistema en que los coeficientes de x o de y sean opuestos (con igual valor y distinto signo), para que así podamos eliminar dicha incógnita al sumar las dos ecuaciones. Para obtener que los coeficientes sean opuestos, se pueden multiplicar por números distintos una o las dos ecuaciones, teniendo en cuenta lo que sea conveniente en cada caso.

Veamos unos ejemplos prácticos en el siguiente vídeo:



Vídeo de Tutomate alojado en [Youtube](#)



Comprueba lo aprendido

A las dos situaciones relacionadas con el fútbol que vimos en el punto anterior, le vamos a añadir una nueva pista.

Plantea en cada uno de los casos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, resuélvelos por el método que prefieras y completa los espacios en blanco que nos dan la solución.

1. Sabemos que x : Número de goles que ha marcado Messi e y : Número de goles que ha marcado Ibrahimovic y que entre los dos han marcado 40 goles. La nueva pista

que nos dan es: "Messi ha anotado 10 goles más que su compañero Ibrahimovic".

x: Número de goles marcados por Messi

y: Número de goles marcados por Ibrahimovic

2. La ecuación que relaciona el número de goles marcados por ambos equipos es: $x = y + 6$, siendo x: nº goles marcados por el Real Madrid e y: nº goles marcados por el F.C. Barcelona. En este caso, la nueva pista que nos dan es: "Entre los dos equipos han marcado 172 goles."

x: Número de goles marcados por el Real Madrid

y: Número de goles marcados por el F.C Barcelona

1. La nueva pista, traducida al lenguaje matemático, quedaría: $x=y+10$.

A continuación, planteamos el sistema de ecuaciones y lo resolvemos. En este caso, se ha optado por resolverlo mediante el método de sustitución .

Como la x está despejada en la segunda ecuación, lo aprovecharemos y la sustituimos en la primera ecuación. El resto es hacer operaciones.

$$\begin{cases} x+y=40 \\ x=y+10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (y+10)+y=40 \\ x=y+10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2y=30 \\ x=y+10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=15 \\ x=y+10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=15 \\ x=25 \end{cases}$$

2. La nueva pista, traducida al lenguaje matemático, quedaría: $x+y=172$

A continuación, planteamos el sistema de ecuaciones y lo resolvemos. En este caso, se ha optado por resolverlo mediante el método de igualación .

Para ello, como la x está despejada en la primera ecuación, la despejamos también en la segunda e igualamos ambas expresiones. El resto es hacer operaciones.

$$\begin{cases} x=y+6 \\ x+y=172 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=y+6 \\ x=172-y \end{cases} \rightarrow y+6=172-y \rightarrow 2y=166 \rightarrow y=83 \rightarrow x=83+6=89 \rightarrow \begin{cases} x=89 \\ y=83 \end{cases}$$



Caso práctico

A un partido benéfico celebrado en el estadio Ramón Sánchez Pizjuan, de Sevilla, han asistido 42000 espectadores. Se ha puesto a la venta únicamente dos tipos de entradas, a un precio de 15 € para los adultos y entradas infantiles a 6 €. La recaudación total ha sido de 612000 €. ¿Cuántas entradas de cada tipo se han vendido?

Si llamamos x : N° de entradas de adultos vendidas, y : N° de entradas infantiles vendidas, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones,

$$\begin{cases} x+y = 42000 \\ 15x+6y = 612000 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema por cualquiera de los métodos vistos, tendremos que se han vendido:

$x = 40000$ entradas de adultos, $y = 2000$ entradas infantiles.

Si en el sistema del ejercicio anterior:

$$\begin{cases} x+y = 42000 \\ 15x+6y = 612000 \end{cases}$$

Si multiplicamos los dos miembros de la primera ecuación por -15 tendremos que, el coeficiente de x en ambas ecuaciones es opuesto, -15 y 15. Si ahora sumamos las dos ecuaciones miembro a miembro, haremos desaparecer la x , y nos quedará una ecuación con una única incógnita, y . Si la resolvemos tendremos el valor numérico de y .

Posteriormente, sustituiremos este valor de y en la primera, calculando el valor de x . Hemos encontrado la solución de una manera rápida, simplemente obteniendo coeficientes opuestos en una de las incógnitas.

$$\begin{cases} x+y = 42000 \\ 15x+6y = 612000 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -15x-15y = -630000 \\ 15x+6y = 612000 \end{cases} \rightarrow -9y = -18000 \rightarrow y = 2000 \rightarrow \begin{cases} x+2000 = 42000 \\ y = 2000 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 40000 \\ y = 2000 \end{cases}$$

Lo que hemos hecho es aplicar el método de reducción.



Reflexiona

Uno de los motores que propulsa el lanzamiento del cohete Ariane 5 es el Vulcain 2.

Durante los 540 segundos que dura su funcionamiento consume las 155 toneladas de combustible que contiene, compuestas exclusivamente de oxígeno e hidrógeno líquido.

Por cada tonelada de hidrógeno el Vulcain carga 5,2 toneladas de oxígeno.

Plantea y resuelve un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que nos permita

saber la cantidad exacta de oxígeno e hidrógeno líquido que almacena en el motor.

Por ejemplo, si llamamos x a las toneladas de hidrógeno e y a las de oxígeno, obtendremos las siguientes ecuaciones.

Como almacena 155 toneladas en total, tenemos que: $x + y = 155$.

Y por otro lado, ya que por cada tonelada de hidrógeno carga 5,2 de oxígeno: $y = 5,2 \cdot x$.

Sustituimos la y en la primera ecuación, y nos queda $x + 5,2x = 155$. Por tanto $x = 25$ toneladas, e $y = 130$.



Para saber más

Para que puedas practicar los métodos de resolución anteriores te proponemos que visites el siguiente enlace del proyecto Descartes.

Educación Digital con Descartes

3º ESO

Matemáticas

2014 • proyecto descartes

Sistemas de ecuaciones

ocultar índice

Antes de empezar

Contenidos

Ejercicios

Autoevaluación

Para enviar al tutor

Para saber más

1. Ecuaciones lineales
Definición. Solución

2. Sistemas de ecuaciones lineales
Definición. Solución
Número de soluciones

3. Métodos de resolución
Reducción
Sustitución
Igualación

4. Aplicaciones prácticas
Resolución de problemas

RESUMEN

Objetivos

En esta quincena aprenderás a:

- Reconocer y clasificar los sistemas de ecuaciones según su número de soluciones.
- Obtener la solución de un sistema mediante una tabla.
- Resolver sistemas lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas, por los métodos de sustitución, igualación y reducción.
- Utilizar el lenguaje algebraico y los sistemas para resolver problemas.

Ecuaciones

$$\sqrt{x+1} = 7$$
$$x+1 = 49$$
$$x$$

Por presumir de certero un tirador atrevido se encontró comprometido en el lance que os reffero.

Y fue, que ante una caseta de la feria del lugar presumió de no fallar ni un tiro con la escopeta,

y el feriante alzando el gallo un duro ofreció pagarle por cada acierto y cobrarle a tres pesetas el fallo.

Dieciséis veces tiró el tirador afirmado al fin dijo, despedido por los tiros que falló.

<<¡Mala escopeta fue el cebo y la causa de mi afrenta pero ajustada la cuenta ni me debes ni te debo>>.

Y todo el que atentamente este relato siguió podrá decir fácilmente cuántos tiros acertó.

Prueba a encontrar la solución , introduce el resultado y pulsa intro.

Aciertos

Bajo licencia Creative Commons si no se indica lo contrario

Autor: Miguel Ángel Cabezn Ochoa

Adaptación con DescartesJS realizada por: proyectodescartes.org - José R. Galo Sánchez

Herramienta DescartesJS promovida por: proyectodescartes.org

2. Sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas

Hay multitud de situaciones y problemas cuya solución se obtiene resolviendo sistemas con muchas ecuaciones e incógnitas. Si ya tiene mérito resolver problemas usando dos ecuaciones, imagínate con tres, cuatro, ... Es casi un ejercicio de "malabarismo". Gauss, dio una respuesta a este problema, resolviendo sistemas con el mismo número de ecuaciones que incógnitas.



Imagen de ihor_konst en [Pixabay](#). Licencia [Pixabay](#).

El método de resolución de Gauss lleva su nombre debido a que Gauss lo describió en un artículo detallando los cálculos que hizo para determinar la órbita del asteroide Pallas. Los parámetros de la órbita tenían que determinarse mediante observaciones del asteroide durante seis años (1803-1809). Esto dio lugar a *seis ecuaciones con seis incógnitas*.

Gauss demostró cómo resolver estas ecuaciones, reemplazándolas sistemáticamente por un nuevo sistema en el que sólo la primera ecuación tenía seis incógnitas, la segunda cinco, la tercera sólo cuatro, y así sucesivamente, hasta que la sexta ecuación tenía una sola incógnita. Este método también se denomina método de reducción en cascada o de triangulación.



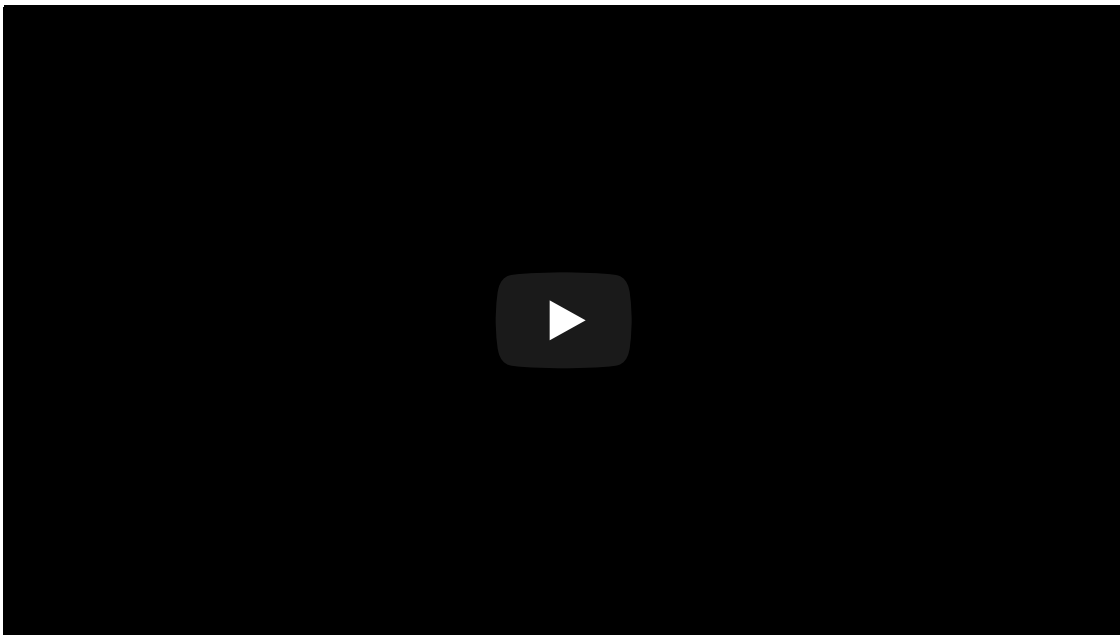
Importante

El método de Gauss consiste en obtener sistemas equivalentes al que queremos resolver, cada vez más sencillos, hasta obtener uno muy simple con forma triangular.

El sistema que buscamos debe tener una única incógnita en su última ecuación, dos en la penúltima, ..., y todas las incógnitas en la primera ecuación.

Las soluciones se obtienen finalmente de abajo a arriba. Esto es, resolvemos la última, sustituimos el valor obtenido en la penúltima, y así sucesivamente.

En la siguiente vídeo se explica de manera sencilla, clara y mediante un ejemplo el método de Gauss. En este caso, resuelve un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas.



Vídeo de lasmatematicas.es alojado en [Youtube](#)



Comprueba lo aprendido

Resolver por el método de gauss el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x+5y &= 16 \\ x+3y-2z &= -2 \\ x+z &= 4 \end{cases}$$

- ☐ $x=1, y=2, z=1$
- ☐ $x=-2, y=4, z=6$
- ☐ $x=0, y=1, z=-1$

¡Incorrecto!

¡Correcto!

¡Incorrecto!

Solución

1. Incorrecto
2. Opción correcta
3. Incorrecto

Resuelve por el método de Gauss el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+y = 1 \\ y+z = -2 \\ x+z = 3 \end{cases}$$

- ☐ x=0, y=1, z=6
- ☐ x=0, y=0, z=1
- ☐ x=3, y=-2, z=0

¡Incorrecto!

¡Incorrecto!

¡Correcto!

Solución

1. Incorrecto
2. Incorrecto
3. Opción correcta

Resuelve por el método de Gauss el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 5x+2y+3z = 4 \\ 2x+2y+z = 3 \\ x-2y+2z = -3 \end{cases}$$

- ☐ x=1, y=1, z=-1
- ☐ x=0, y=1, z=0
- ☐ x=2, y=3, z=0

¡Correcto!

¡Incorrecto!

¡Incorrecto!

Solución

1. Opción correcta
2. Incorrecto
3. Incorrecto



Ejercicio Resuelto

Resolver el siguiente sistema por el método de gauss:

$$\begin{cases} 3x+2y+z = 4 \\ x-y+3z = 2 \\ 2x+y-z = 1 \end{cases}$$

Paso 1

Dado que el coeficiente de la x de la segunda ecuación es 1 podemos cambiar el orden de las ecuaciones y pasar la segunda a la primera, si hacemos esto ya vimos en el apartado anterior que el sistema resultante es equivalente al anterior, el sistema nos quedaría de la siguiente forma:

$$\begin{cases} x-y+3z=2 \\ 3x+2y+z=4 \\ 2x+y-z=1 \end{cases}$$

Paso 2

Para irnos aproximando al sistema escalonado que buscamos hemos de sustituir la segunda ecuación por otra con dos incógnitas en y y z. Para ello hemos de aplicar la transformación consistente en multiplicar la primera ecuación por un número y sumársela a la segunda de tal forma que en la ecuación resultante solo queden los coeficientes de y y z distintos de 0. El número por el que hemos de multiplicar la primera ecuación es el coeficiente que tiene la x en la segunda cambiado de signo, si lo hacemos así y efectuamos la suma la ecuación resultante es la siguiente.

$$\begin{array}{r} -3(x-y+3z) = -3 \cdot 2 \\ -3x+3y-9z = -6 \\ \underline{3x+2y+z=4} \\ 0x+5y-8z = -2 \end{array}$$

El sistema resultante, equivalente al primero, es el siguiente.

$$\begin{cases} x-y+3z=2 \\ 5y-8z=-2 \\ 2x+y-z=1 \end{cases}$$

Paso 3

A continuación vamos a sustituir la tercera ecuación por otra con dos incógnitas en y y z. Para ello hemos de aplicar la transformación consistente en multiplicar la primera ecuación por un número y sumársela a la tercera de tal forma que en la ecuación resultante solo queden los coeficientes de y y z distintos de 0. El número por el que hemos de multiplicar la primera ecuación es el coeficiente que tiene la x en la tercera cambiado de signo, si lo hacemos así y efectuamos la suma la ecuación resultante es la siguiente.

$$\begin{array}{r} -2(x-y+3z) = -2 \cdot 2 \\ -2x+2y-6z = -4 \\ \underline{2x+y-z=1} \\ 0x+3y-7z = -3 \end{array}$$

El sistema resultante, equivalente al primero, es el siguiente.

$$\begin{cases} x-y+3z=2 \\ 5y-8z=-2 \\ 3y-7z=-3 \end{cases}$$

Paso 4

A continuación tenemos que sustituir la tercera ecuación del sistema de arriba por otra con una incógnita en z . Para ello hemos de multiplicar la segunda ecuación por un número, que va a ser el coeficiente que tiene la y en la tercera cambiado de signo, y la tercera por otro, que va a ser el coeficiente que tiene la y en la segunda, al sumar ambas ecuaciones nos quedará una con solo una incógnita que pondremos en lugar de la tercera.

$$\begin{array}{r} -3(5y-8z) = -3 \cdot (-2); \quad 5(3y-7z) = -3 \cdot 5 \\ -15y+24z = 6 \\ 15y-35z = -15 \\ \hline 0y-11z = -9 \end{array}$$

Obteniendo por fin el sistema escalonado deseado:

$$\begin{cases} x-y+3z=2 \\ 5y-8z=-2 \\ -11z=-9 \end{cases}$$

El sistema anterior es muy fácil de resolver a partir de la última ecuación, como se ha visto en el apartado anterior, y su solución es:

$$x = \frac{5}{11}, \quad y = \frac{10}{11}, \quad z = \frac{9}{11}$$

Resumen



Importante

Una ecuación lineal con dos incógnitas es una igualdad entre dos expresiones algebraicas.

Su expresión general tiene la siguiente forma: $ax + by = c$, donde x e y son las incógnitas de la ecuación y a , b y c son números.

a y b son los coeficientes y c es el término independiente de la ecuación.

En el caso anterior $x+y=40$, $a=1$, $b=1$ y $c=40$.

Las soluciones de la ecuación son pares de números que al sustituirlos en la ecuación por (x, y) , hacen que ambos miembros valgan lo mismo (se alcance el equilibrio).

Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, como su propio nombre indica, está compuesto por dos ecuaciones de primer grado.

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

Resolver el sistema es encontrar una solución común de ambas ecuaciones. Por tanto, una solución del sistema es una pareja de valores (x,y) que cumple ambas ecuaciones de manera simultánea.



Importante

Para resolver analíticamente un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas utilizamos uno de los siguientes métodos:

Método de sustitución

Consiste en despejar la incógnita que elijamos de una de las ecuaciones y, posteriormente, sustituirla en la otra.

Método de igualación

Consiste en, elegida una misma incógnita para las dos ecuaciones, despejarla en ambas, para posteriormente igualar las expresiones obtenidas.

Método de reducción

Consiste en obtener un sistema en que los coeficientes de x o de y sean opuestos (con igual valor y distinto signo), para que así podamos eliminar dicha incógnita al sumar las dos ecuaciones. Para obtener que los coeficientes sean opuestos, se pueden multiplicar por números distintos una o las dos ecuaciones, teniendo en cuenta lo que sea conveniente en cada caso.



Importante

El método de Gauss consiste en obtener sistemas equivalentes al que queremos resolver, cada vez más sencillos, hasta obtener uno muy simple con forma triangular.

El sistema que buscamos debe tener una única incógnita en su última ecuación, dos en la penúltima, ..., y todas las incógnitas en la primera ecuación.

Las soluciones se obtienen finalmente de abajo a arriba. Esto es, resolvemos la última, sustituimos el valor obtenido en la penúltima, y así sucesivamente.

Tienes un resumen en el siguiente [pdf >> Documento de descarga.](#)

Imprimible

Descarga aquí la versión imprimible de este tema.



Si quieres escuchar el contenido de este archivo, puedes instalar en tu ordenador el lector de pantalla libre y gratuito [NDVA](#).

Aviso legal

Las páginas externas no se muestran en la versión imprimible

Aviso Legal

El presente texto (en adelante, el "**Aviso Legal**") regula el acceso y el uso de los contenidos desde los que se enlaza. La utilización de estos contenidos atribuye la condición de usuario del mismo (en adelante, el "**Usuario**") e implica la aceptación plena y sin reservas de todas y cada una de las disposiciones incluidas en este Aviso Legal publicado en el momento de acceso al sitio web. Tal y como se explica más adelante, la autoría de estos materiales corresponde a un trabajo de la **Comunidad Autónoma Andaluza, Consejería de Educación y Deporte (en adelante Consejería de Educación y Deporte)**.

Con el fin de mejorar las prestaciones de los contenidos ofrecidos, la Consejería de Educación y Deporte se reserva el derecho, en cualquier momento, de forma unilateral y sin previa notificación al usuario, a modificar, ampliar o suspender temporalmente la presentación, configuración, especificaciones técnicas y

