Las matemáticas en un mundo tecnológico: Números enteros

Ámbito Científico Tecnológico

ESPA Nivel I **Contenidos**

Las matemáticas en un mundo tecnológico

Números enteros

¿De qué podríamos hablar sin números?
Desde luego, no del tiempo cronológico con su sucesión de horas, meses, años; ni tampoco del tiempo atmosférico con sus temperaturas máximas y mínimas, ni de la velocidad del viento, ni del poder destructivo de los huracanes... Sin números tampoco podríamos hablar de economía y finanzas, de déficit y superávit de las cuentas públicas, de los porcentajes de paro y ocupación, del precio de la barra de pan. No existiría la estadística ni las encuestas, ni las noches electorales con su reparto de escaños, ni podríamos hablar de la distancia entre las ciudades ni de los límites de velocidad. Sin números no hablaríamos de las distancias entre las estrellas, ni de la profundidad del universo, ni del número de galaxias. Casi nada de lo que el hombre ha construido existiría, ni los edificios, ni las ciudades, ni los frigoríficos y televisores, ni Internet, ni la radio,ni la música digitalizada...

Imagen de elaboración propia con recortes de titulares de elpais.com del 02/03/12

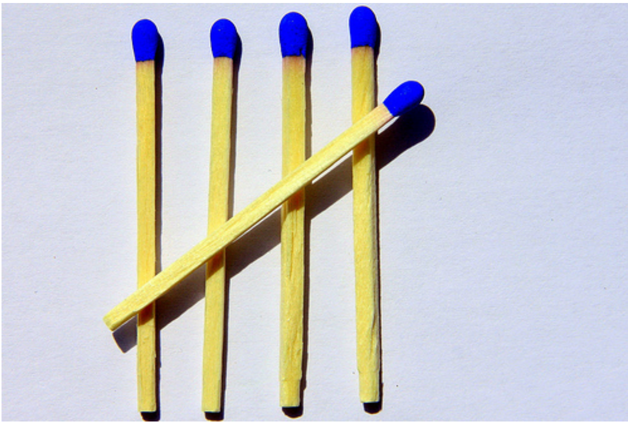
Por todo ello, empezamos este Nivel I de la Educación Secundaria de Adultos, con algo de matemáticas y aritmética.

1. Números naturales

Y la primera etapa de este viaje alucinante son precisamente los **números naturales**. Estos responden a la pregunta: ¿cuántos? ¿Cuántos planetas tiene nuestro sistema solar? ¿Cuántos dedos tienen nuestras manos?

Así como para escribir las palabras necesitamos un sistema de escritura con unos símbolos y una reglas, para contar también es preciso un **sistema de numeración**.

El hombre primitivo usó marcas para contar los días o los animales que había cazado, o bolsas con guijarros para contar las ovejas del ganado. En las sociedades más avanzadas, como la del antiguo Egipto, se usaron lo que, con más propiedad, se denominan sistemas de numeración. Estos constan de una serie de signos o cifras que se utilizan para formar los números siguiendo unas reglas.



Fotografía de mafis75 en Flickr. Licencia CC

Hoy día universalmente se utiliza el denominado **sistema de numeración decimal**. Al conocimiento del mismo se dedican años en la educación primaria de todos los países, por ser, entre otras cosas, la llave del conocimiento científico.
Dicho sistema emplea diez signos o cifras: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Lo más peculiar de este sistema de numeración es que los símbolos significan cosas distintas según la posición que ocupen dentro del número.

1.1. Ordenación y representación

Ordenar los números naturales.

Los números naturales se aprenden de forma secuencial: 0, 1, 2, 3, 4, 5... Esto tiene que ver con la relación de orden. Hay un primer número 0, un segundo 1...

Esto nos permite que puedan representarse en una recta, utilizando el siguiente método:

Se escoge un origen y una unidad, y esta se lleva sucesivamente a partir del origen siempre en el mismo sentido, obteniéndose una representación de los números naturales.

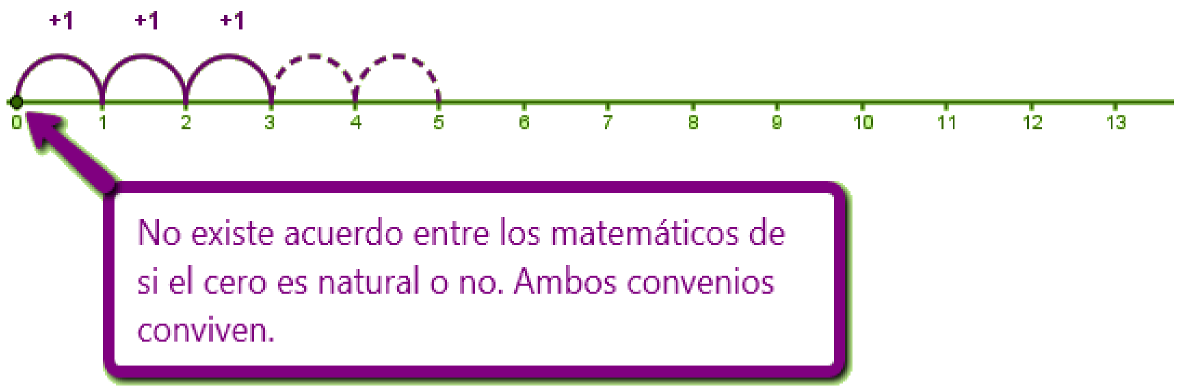


Imagen de elaboración propia

Importante

Para ordenar los números naturales, los comparamos cifra a cifra. Se utilizan los símbolos:

> mayor que	75.460 > 75.439
< menor que	8.934 < 8.991
= igual a	31.075 = 31.075

Ejercicio Resuelto

Por una estación de tren han pasado en una semana el siguiente número de viajeros:

24.789, 33.990, 14.378, 39.001, 21.987, 19.853, 28.234

Ordénalos de forma ascendente.

14.378<19.853<21.987<24.789<28.234<33.990<39.001

1.2. Operaciones con números naturales

Operaciones con números naturales: suma, resta, producto y división.

Fotografía en Flickr por ruurmo bajo CC

Este apartado es claramente un ejercicio de memoria. Desde el colegio o la escuela, los profesores y profesoras nos han ayudado a desarrollar unas destrezas de cálculo que nosotros ya tenemos más que asimiladas y a las que recurrimos de forma natural.

Por ejemplo, si queremos saber quién ha sido el pichichi de la liga (el mayor goleador), solo tendremos que averiguar el total de goles marcado por cada jugador, y para ello recurriremos a la suma. Si queremos saber la diferencia que ha habido entre el pichichi y el segundo, restaremos al número de goles del primero, el número de goles del segundo.

Si uno de estos jugadores ha marcado 2 goles por partido, durante 7 partidos consecutivos, al multiplicar obtenemos los goles marcados en esas jornadas. Y si, además, un club quiere primar a sus jugadores repartiendo una cantidad por partido ganado, solo tendremos que dividir el dinero entre el número de jugadores de la plantilla para saber a cuánto toca cada uno.

Importante

- Los términos de la adición se llaman **sumandos**. El r*esultado* es la **suma** o total.
- Los términos de la sustracción se llaman **minuendo** y **sustraendo**. El *resultado* es la **resta o diferencia**.

Para *comprobar si una resta es correcta*, la suma del sustraendo y la diferencia debe dar el minuendo:

sustraendo + diferencia = minuendo

Importante

La **multiplicación** equivale a una suma de varios sumandos que son iguales. Los términos de la multiplicación se denominan **factores**. El *resultado* final se llama **producto**.

Importante

Dividir es repartir una cantidad en partes iguales.

Los términos de la división se llaman **dividendo**, **divisor**, **cociente** y **resto**.

dividendo	divisor
resto	cociente

- El **dividiendo** es la cantidad que se reparte.
- El **divisor** es el número de partes que se hacen.
- El **cociente** es la cantidad que toca a cada parte.
- El **resto** es la cantidad que queda sin repartir.

En toda división se cumple que:

$$\text{dividendo} = \text{divisor} \cdot \text{cociente} + \text{resto}$$

La división puede ser:

Exacta, si el *resto es cero* (no sobra ninguna cantidad).

Inexacta, si su *resto no es cero*.

Cuando la *división es exacta* entonces decimos que *el dividendo es **divisible** por el divisor.*

Comprueba lo aprendido

A continuación de proponemos una serie de ejercicios agrupados en sumas y restas, y multiplicación y división, para practicar el cálculo mental.

Suma y resta	Multiplicación y división
http://proyectodescartes.org/EDAD/materiales_didacticos/EDAD_1eso_numeros_naturales-JS/1q1_ejercicios_resueltos_2a.htm	http://proyectodescartes.org/EDAD/materiales_didacticos/EDAD_1eso_numeros_naturales-JS/1q1_ejercicios_resueltos_2b.htm

Escena de Juan Simón Santamaría en Proyecto Descartes.
Licencia CC

Escena de Juan Simón Santamaría en Proyecto Descartes.
Licencia CC

Ejercicio Resuelto

Una empresa está organizando un evento para el que tiene que desplazar 2.700 personas. ¿Pueden ir en autobuses de 55 plazas sin que sobre ninguno? ¿Y en autobuses de 30 plazas? Razona tus respuestas.

Como tenemos que repartir viajeros entre plazas, estamos ante una operación de división.

Dividimos las personas entre el número de plazas que tiene el autobús.

a) Autobús de 55 plazas

2.700 |55

500 49

05

En este caso, tenemos dos opciones: contratar 49 autobuses y que sobren 5 viajeros, o contratar 50 autobuses y que sobren plazas.

B) Autobús de 30 plazas.

2.700 |30

000 90

<u>00</u>

En este caso cabrían todos los viajeros sin problema, contratando 90 autobuses de 30 personas.

1.3. Propiedades y operaciones combinadas

Imagen de Didgeman en Pixabay . Licencia CC

Propiedades y operaciones combinadas.

Es frecuente que las operaciones se combinen. Por ejemplo, en 2+3·4 se encadenan la suma y el producto.

Para indicar *qué operación debe hacerse en primer lugar* se *usan los paréntesis y* también *los corchetes*. Lo que esté **dentro del paréntesis o del corchete se hace en primer lugar.**

Así, (2+3)·4 indica que primero debe realizarse la suma y a continuación el producto. El resultado sería, pues, (2+3)·4= 5·4=20.

Para reducir el uso de los paréntesis se han establecido un *orden de prevalencia entre las operaciones*.

En la siguiente presentación, puedes las propiedades básicas de estas operaciones y de sus combinadas.

Aunque en la presentación no aparecen las operaciones resta y división para simplificar, la propiedades de la suma son también válidas para la diferencia, y las del producto para la división.

https://docs.google.com/present/embed?id=dpgc6tj_85d74634gw

Presentación de elaboración propia

Aunque en la presentación no aparecen las operaciones resta y división para simplificar, la propiedades de la suma son también válidas para la diferencia, y las del producto para la división.

Importante

Las distintas operaciones o pasos que se realizan se encadenan secuencialmente mediante el signo =. Cada nuevo paso supone una simplificación de los anteriores reduciendo en, al menos, un nivel su complejidad hasta concluir en el resultado final.

Seguir estas reglas evita errores y permite una corrección más fácil.

Comprueba lo aprendido

En la siguiente escena del Proyecto Edad puedes practicar todos los conceptos vistos en la presentación anterior:

http://proyectodescartes.org/EDAD/materiales_didacticos/EDAD_1eso_numeros_naturales-JS/1q1_ejercicios_resueltos_2c.htm

Ejercicio Resuelto

Resuelve las siguientes operaciones combinadas:

a. 3·(8+3)+2·7

a. [(2+3)·4+6]·3+10

a. 3·(8+3)+2·7=3·11+2·7=33+14=47

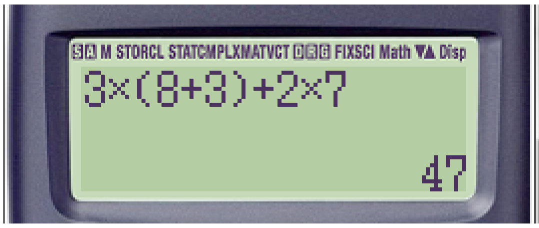
a. [(2+3)·4+6]·3+10=[5·4+6]·3+10=[20+6]·3+10=26·3+10=78+10=88

Ejercicio Resuelto

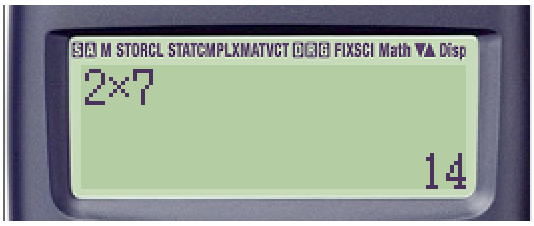
Comprueba los resultados anteriores en la calculadora. Prueba a hacerlo escribiendo toda la operación y realizando cada paso por separado (primero los paréntesis, luego las multiplicaciones...)

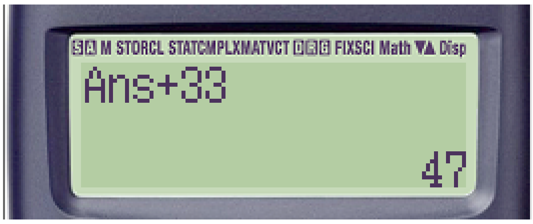
A)

Operación completa



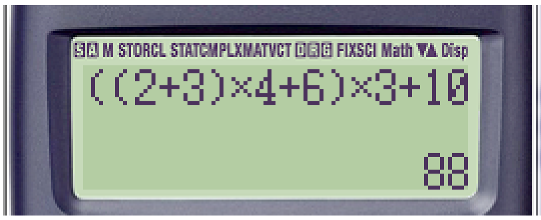
Paso a paso





B)

Operación completa



Paso a paso

Ejercicio Resuelto

En una piscifactoría se introducen cada semana 325 lubinas y 467 doradas. Suponiendo que en 3 semanas aún no han criado, ¿Cuántos peces tendremos en total transcurrido ese tiempo?

Expresa la operación combinada con sus cifras y signos correspondientes y resuélvela paso a paso.

A) La operación combinada sería:

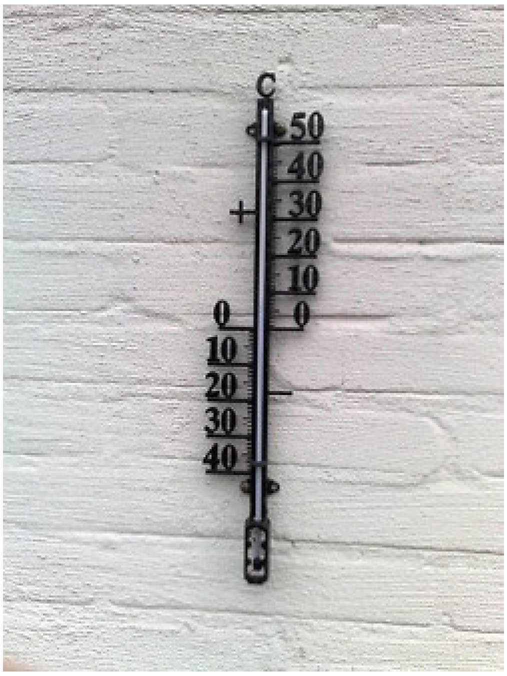
3·(325+467)=3·(892)=2676 peces

B) Resolución paso a paso.

En una semana tenemos 325+467=892 peces. Como han pasado 3 semanas tendríamos un total de 3·892=2676 peces.

2. Números enteros

Nuestra cultura ha incorporado los números negativos y los usa en múltiples situaciones. Así, se habla de una temperatura de -3° centígrados o de 3 grados bajo cero; los bancos advierten que la cuenta corriente se encuentra en números rojos (negativos) - forma suave de decir que se le debe dinero - o negros (positivos); en los libros de Historia se anuncia que tal acontecimiento ocurrió en el año –300 o 300 a. C. o en el año 1750...



Fotografía de hugovk en Flickr. Licencia CC

2.1. Operaciones, ordenación y representación

Enteros: una ampliación de los naturales. Comparación y ordenación.

Los números enteros pueden considerarse la segunda etapa de ese viaje alucinante que ha comenzado con los números naturales. Entran en escena cuando hay un antes y un después, un arriba y abajo, derecha e izquierda, haber y deber...

Fotografía de Andrea en Flickr. Licencia CC

Al graduar la recta con los números naturales adoptábamos un origen y una unidad. Los números naturales hacían su aparición al llevar la unidad en el mismo sentido a partir del origen. Pero ¿qué ocurre si el sentido se invierte? Hacen su aparición los números enteros negativos, simétricos u opuestos de sus hermanos, los números naturales, ahora también llamados números enteros positivos.

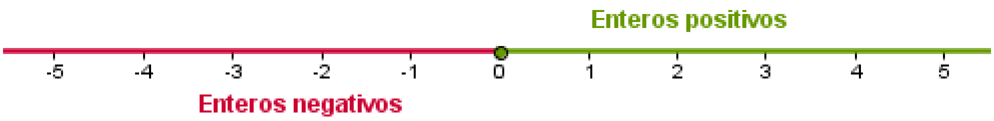


Imagen de elaboración propia

El valor absoluto

El **valor absoluto** de un número entero *es la distancia que le separa del cero*. Se **escribe entre dos barras | | y es el número sin su signo:**

$$|+a| = a \qquad |-a| = a$$

Ejemplos: el valor absoluto de -3, se escribe |-3| y es 3. El valor absoluto de +5, se escribe |+5| y es 5.

Importante

Aunque es lógico que entre varios números enteros siempre es mayor el que está situado más a la derecha de la recta, el valor absoluto nos permite comparar dos o más números enteros, teniendo en cuenta que:

- Entre dos o más números enteros positivos es mayor el de mayor valor absoluto.
- Entre dos o más números enteros negativos es mayor el de menor valor absoluto.

Comprueba lo aprendido

http://proyectodescartes.org/EDAD/materiales_didacticos/EDAD_1eso_numeros_enteros-JS/1q3_ejercicios_resueltos_1dbis.htm

Escena de Rita Jiménes Igea en Proyecto Descartes. Licencia CC

Operaciones con números enteros

Con los números naturales ya repasamos operaciones básicas como la suma, la diferencia, el producto y la división. Aunque las propiedades son las mismas, al aumentar el conjunto numérico estas operaciones se complican a nivel de cálculo. Es por ello que se establecen unas pautas para simplificar la escritura de estas operaciones.

Importante

- Cuando veamos un número sin signo este es positivo, ya que el primer sumando puede escribirse sin signo para poder agilizar las operaciones.
- Nunca pueden aparecer dos signos (operaciones) seguidos. Tienen que estar separados por paréntesis, corchetes...

En la siguiente presentación puedes ver con detalle cómo resolver operaciones sencillas (no combinadas) de números enteros:

https://docs.google.com/presentation/d/1VyZqWTpiQEQxM0ZHrHh5oCr4plU5YR
start=false&loop=false&delayms=3000

Aunque es importante memorizar los distintos casos y saber cómo operar en cada uno de ellos, cuando surgen dudas siempre es útil contextualizar las actividades. En el caso de las operaciones con números enteros, podíamos pensar que restar es gastar o deber dinero, y sumar ingresar o ganar. Lee los siguientes ejemplos:

- **+6 +3 = +9**
  significa que tienes 6 y te dan 3
  => **tienes 9**
- **-7 -5 = -12**
  significa que debes 7 y gastas 5
  => acumulas una **deuda de 12**
- **-6 +8 = +2**
  significa que tienes 8 pero debes 6
  => **tienes 2** El dinero supera las deudas
- **-5 +3 = -2**
  significa que debes 5 y tienes 3
  => **debes 2** Las deudas superan el dinero.

Comprueba lo aprendido

A continuación, tienes unos ejercicios interactivos para practicar

Suma y diferencia

http://proyectodescartes.org/EDAD/materiales_didacticos/EDAD_1eso_numeros_enteros-JS/1q3_ejercicios_resueltos_2a.htm

Escena de Rita Jiménes Igea en Proyecto Descartes. Licencia CC

Multiplicación

http://proyectodescartes.org/EDAD/materiales_didacticos/EDAD_1eso_numeros_enteros-JS/1q3_ejercicios_resueltos_3a.htm

http://proyecto
JS/1q3_ejercic

Escena de Rita Jiménes Igea en Proyecto Descartes. Licencia CC

Escena de Rita Jiménes I

Ejercicio Resuelto

Una persona aficionada al senderismo recorre 4350 metros hasta que se da cuenta que en la parada que hizo a 2000 metros de la salida se olvidó la comida, por lo que vuelve sobre sus pasos. Si una vez recogida la comida recorre 1350 metros antes de la siguiente parada...

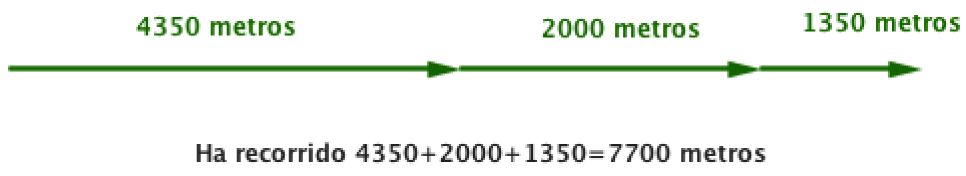
Contesta a las siguientes preguntas:

a) ¿A qué distancia está de la salida?

b) ¿Cuántos metros ha recorrido en total?

a) Cuando queremos averiguar la distancia a la que está siempre que avance debemos sumar los metros, y si retrocede restarlos. Luego en este caso:

b) En este caso no importa el sentido en el que camine, sino los metros recorridos:



2.2. Potencias y raíces

Las potencias. ¿Una nueva operación?

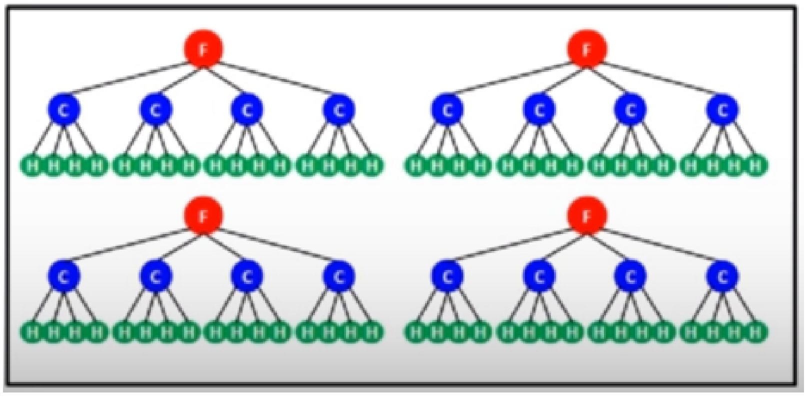


Imagen tomada de *Video 03 -Aplicaciones con Potencias* de Mat videoconferencia. Alojado en Youtube

Al igual que la multiplicación es la suma de varias veces de un mismo número, **la potenciación** es el *producto resultante de multiplicar una o varias veces ese mismo número.*

Un ejemplo muy sencillo para entender las potencias es el siguiente: en un pueblo hay 4 vecinos, cada vecino tiene 4 caballos y cada caballo usa 4 herraduras. Si desean comprar herraduras para todos, ¿Cuántas herraduras suman en total?

No es necesario contar las herraduras una a una. Se podría recurrir a las potencias:

$$4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3 = 64$$

Importante

Las potencias se representan a^b donde a es el número que se multiplica (**base**) y b el número de veces que se hace el producto (**exponente**).

A continuación te dejamos un vídeo y un applet para que practiques estos conceptos:

Enlace a recurso reproducible >> https://www.youtube.com/embed/yf6l5CmbSJk

Vídeo de childtopia alojado en Youtube

Comprueba lo aprendido

http://proyectodescartes.org/EDAD/materiales_didacticos/EDAD_1eso_numeros_enteros-JS/1q3_ejercicios_resueltos_4a.htm

Escena de Rita Jiménes Igea en Proyecto Descartes. Licencia CC

Si observas detenidamente los ejemplos anteriores puedes sacar conclusiones dependiendo de si la potencia afecta al signo del número entero o no.

Importante

1. Si el **signo** está **dentro del paréntesis**, formará parte de la base y por consiguiente *se repetirá tantas veces como nos indica el exponente*.
2. Si el **signo** está **fuera del paréntesis**, no forma parte de la base y por consiguiente *se añadirá al resultado de la potencia*.
3. Si la **base es positiva**, el *resultado* será *positivo*.
4. Si la **base es negativa y el *exponente es par***, el *resultado será positivo.*
5. Si la **base es negativa y el exponente es impar**, el *resultado será negativo*.

Raíces cuadradas exactas

La *operación inversa a la potenciación* es la **radicación**. En ella, conocidos el resultado de la potencia y su exponente, hemos de calcular la base.


Imagen de Anerma en Pixabay. LicenciaCC

La raíz cuadrada de un número a es otro número b tal que, al elevarlo al cuadrado, nos da a.

$$\sqrt{a} = b \rightarrow b^2 = a$$

Al número a se le llama **radicando**.

Ejemplos:

$\sqrt{36} = 6 \rightarrow 6^2 = 36$
$\sqrt{100} = 10 \rightarrow 10^2 = 100$

Al calcular raíces cuadradas **hay que tener en cuenta** lo siguiente:

Si el **radicando** es **positivo** hay **dos raíces**:

$\sqrt{49} = 7$ porque $7^2 = 49$
$\sqrt{49} = -7$ porque $(-7)^2 = 49$

Se escribe $\mathbf{\sqrt{49} = \pm 7}$

Si el **radicando** es **negativo no hay raíz**:

$\sqrt{-49} = b$ $\quad$ $\mathbf{b^2 = -49}$ **no es posible**

porque b^2 es positivo y -49 es negativo.

Importante

La *raíz cuadrada* de un número a es otro número b tal que, *al elevarlo al cuadrado, nos da* a.

$$\sqrt{a} = b \rightarrow b^2 = a$$

Importante

El cuadrado de un número entero se denomina **cuadrado perfecto**. La raíz cuadrada de un cuadrado perfecto es el mismo número:

$5^2 = 25 \rightarrow \sqrt{25} = 5$. En este caso se dice que la **raíz cuadrada es exacta**.

Comprueba lo aprendido

http://proyectodescartes.org/EDAD/materiales_didacticos/EDAD_1eso_numeros_enteros-JS/1q3_ejercicios_resueltos_4b.htm

Escena de Rita Jiménes Igea en Proyecto Descartes. Licencia CC

En los próximos temas veremos cómo calcular raíces cuadradas no exactas de forma aproximada.

Para saber más

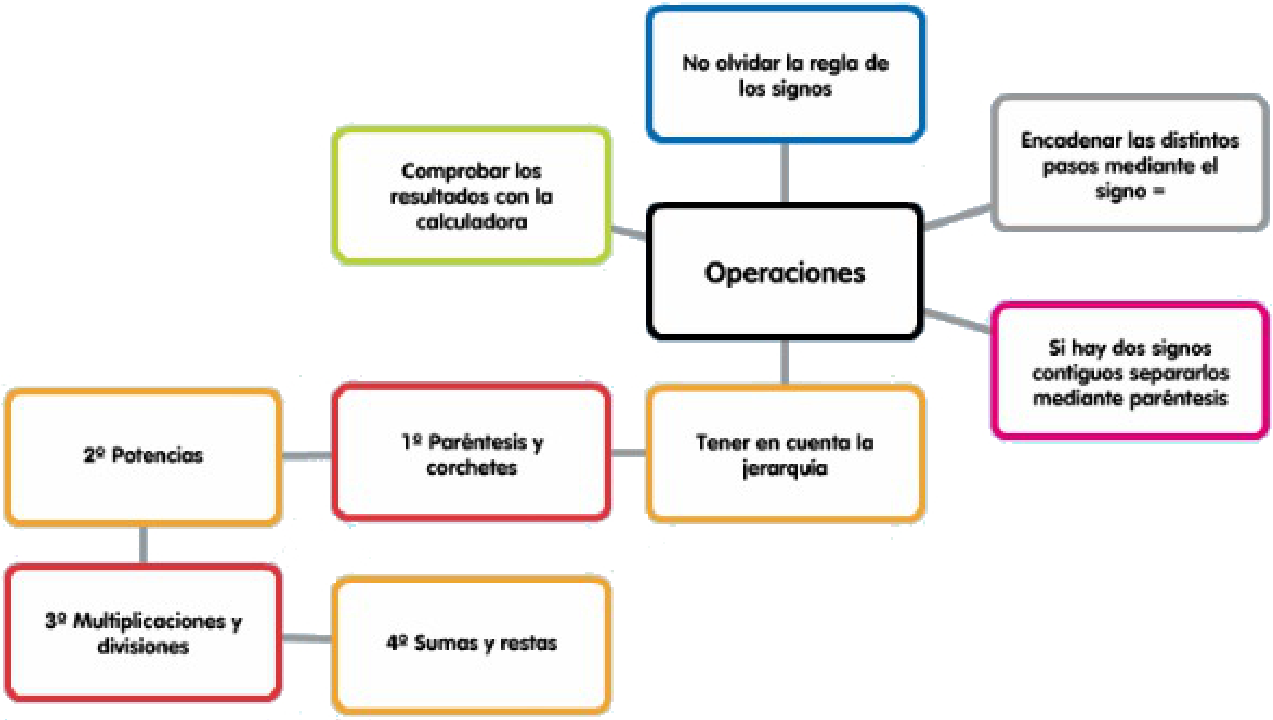
Muchos son ya los usuarios de las redes sociales, y cada vez más son los que no solo las usan para estar en contacto con sus conocidos o amigos. Te proponemos que busques perfiles asociados a las curiosidades matemáticas, como Matesy+ o matematicascercanas, te ayudarán a ver el mundo desde otra perspectiva:

2.3. Operaciones combinadas con números enteros

En el apartado 1.3. estuvimos trabajando con operaciones combinadas y números naturales. Al aumentar el conjunto numérico a los números enteros estas operaciones aumentan en complejidad, ya que hay que tener siempre cuidado con los signos. Además, aparecen nuevas operaciones como la potenciación... Pero no te preocupes, la clave del éxito es sencilla:

Ser ordenado y metódico, y practicar mucho

En el siguiente esquema puedes ver los *pasos a seguir para resolver correctamente una operació*n de este tipo:



Sumas y restas con paréntesis

- Al **suprimir un paréntesis precedido del signo +,** se suprime el paréntesis *dejando los sumandos del interior con su sign*o:

$$9+(-3+1)=9-3+1=6+1=7$$

- Al **suprimir un paréntesis precedido del signo -**, todos *los signos de los sumando de su interior se transforman en su opuesto:*

$$7-(6-4)=7-6+4=1+4=5$$

Si te fijas, en los dos ejemplos anteriores hemos trabajado de la misma forma: antes de realizar cualquier operación hemos quitado los paréntesis. Sin embargo, podemos operar también calculando primero los paréntesis. En la siguiente escena de Geogebra en la que aparecen muchos ejemplos desarrollados paso a paso operan de esta forma.

https://www.geogebra.org/material/iframe/id/Vqry96CQ/width/680/height/460/border/888888/rc/false/ai/false/sdz/false

Es importante que una vez veas cómo se han realizado varios de estos ejemplos, cojas papel y lápiz y lo intentes por ti mismo. Recuerda que una de las claves del éxito es: mucha práctica.

Ejercicio Resuelto

Realiza las siguientes operaciones combinadas de números enteros:

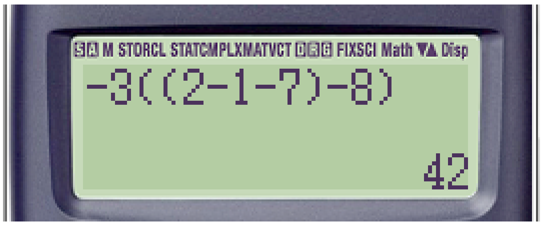
a. -3·[(2-1-7)-8]

a. 2·(-8-4+12)-3·[7-(-2+1)]

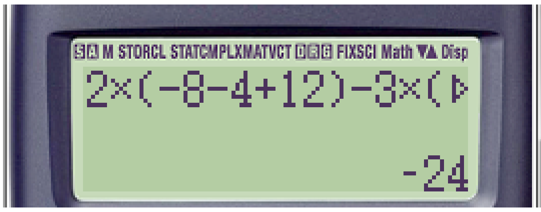
Aprovecha y comprueba los resultados con la calculadora.

Recuerda la jerarquía de las operaciones.

A) -3·[(2-1-7)-8] = -3·[(-6)-8] = -3·[-14] = +42



B) 2·(-8-4+12)-3·[7-(-2+1)] = 2·(0)-3·[7-(-1)] = 2·0-3·[7+1] = 2·0 -3·8 = -24



Observa que en operaciones más largas que la pantalla,

para visualizar la operación entera puedes desplazarte

con la teclas replay para ver el comando completo.

Reflexiona

A continuación te enseñamos dos desarrollos de una operación combinada:

$$26+3\times(3-5)^3+12-9:3$$

Uno de ellos es correcto, y el otro presenta varios errores. Determina cuál es cuál, y explica dónde están dichos errores.

Resultado 1	Resultado 2

$$26 + 3 \times (3 - 5)^3 + 12 - 9 : 3 =$$
$$29 \times (-2)^3 + 3 : 3 =$$
$$29 \times (-8) + 1 =$$
$$-232 + 1 = \boxed{-231}$$

$$26 + 3 \times (3 - 5)^3 + 12 - 9 : 3 =$$
$$26 + 3 \times (-2)^3 + 12 - 3 =$$
$$26 + 3 \times (-8) + 12 - 3 =$$
$$26 + (-24) + 12 - 3 =$$
$$38 - 27 = \boxed{11}$$

El resultado correcto es el 2, ya que en el 1 no se ha tenido en cuenta la jerarquía de las operaciones:

Error 1: Se ha realizado la suma de 26+3, antes que el producto de $3x(3-5)^3$.

Error 2: Se ha realizado la resta de 12-9, antes que la división de 9 y 3.

Estas dos decisiones tomadas al principio han provocado que el resultado no sea correcto.

En el siguiente enlace a la página de vitutor encontrarás un ejercicio interactivo. Haz el desarrollo en papel y adjunta los resultados. Acontinuación, pulsa en "Corregir" para saber tu puntuación y ver las soluciones desarrolladas.

3. Divisibilidad. MCM y MCD

Fotografía de osolev en Flickr. Licencia CC

Divisibilidad. Múltiplos y divisores.

Frente a lo que pudiera parecer la operación producto de números enteros ha tenido mayor importancia que la suma. El producto ha permitido un mayor conocimiento de los números enteros e interesantes aplicaciones prácticas. Por ejemplo, la clasificación de los números primos, que son esenciales en las labores de codificación en informática y en la creación de claves.

Importante

Si $a \cdot b = c$ con a y b números enteros distintos de 0, entonces

a y b se llaman **divisores** o **factores** de c. También c se dice **múltiplo** de a y b.

Dado que 2·5 = 10, 2 y 5 son divisores o factores de 10. A su vez 10 es un múltiplo de 2 y de 5.

Decir que 2 es un divisor de 10 es equivalente a decir que 10 es un múltiplo de 2. Por tanto, los múltiplos de un número natural son los números naturales que resultan de multiplicar ese número por otros números naturales:

Enlace a recurso reproducible >> https://www.youtube.com/embed/AFOQlRihSbw

Vídeo de lasmatematicas.es alojado en Youtube

Ser divisor es lo recíproco a ser múltiplo. Si 9 es múltiplo de 3, entonces 3 es divisor de 9. Los divisores de un número natural lo pueden dividir de forma exacta.

Para hacer más operativa la búsqueda de los divisores de un número, tenemos los criterios de divisibilidad.

Los criterios de divisibilidad son reglas que nos permiten averiguar con rapidez si un número es divisible por otro; es decir, si el más grande es múltiplo del más pequeño o si el más pequeño es divisor del más grande.

ES DIVISIBLE POR	CRITERIO DE DIVISIBILIDAD	EJEMPLO
2	Si termina en cero o cifra par.	24, 238, ... Como terminan en 4 y 8 que son números pares, ambos son divisibles por 2.
3	Si la suma de sus dígitos es múltiplo de 3.	564 -> 5 + 6 + 4 = 15 -> 15 es múltiplo de 3, luego 564 es divisible por 3.
5	Si termina en cero o cinco.	45, 510, ... Como terminan en 0 y 5 ambos son números divisibles por 5.
10	Si termina en cero.	230, 110, ... Como terminan en 0, ambos son divisibles por 10.

Estos criterios de divisibilidad no solo nos permiten reconocer, sin realizar la división, si un número es divisible por otro, sino también descomponer el número como un producto de otros números.

En la siguiente presentación descubrirás cómo se hace esta descomposición y cómo, a través de ella, podemos calcular el **máximo común divisor** y el **mínimo común múltiplo**, conceptos que te serán muy útiles de aquí en adelante.

https://docs.google.com/presentation/d/1Mtw9Sm7cuhidhjDSZyZTw9mSfoMZo6Pvjgc3zq7NayY/embed?start=false&loop=false&delayms=3000

Comprueba lo aprendido

A continuación, algunos ejercicios para practicar la descomposición en factores primos:

http://proyectodescartes.org/EDAD/materiales_didacticos/EDAD_1eso_multiplos_y_divisores-JS/1q2_ejercicios_resueltos_2c.htm

Ejercicio Resuelto

En nuestro instituto funcionan cinco talleres: fotografía, ajedrez, canto, teatro y literatura. Las reuniones del taller de fotografía se hacen cada dos días, el de ajedrez cada tres, el de canto cada cuatro días, el de teatro cada cinco días y el de literatura cada seis días.

Si el día 1 de Octubre se reunieron los cinco talleres, ¿Cuándo será la próxima vez en que volverán a coincidir las reuniones de todos los talleres?

Observa que el número buscado debe ser múltiplo de los 5 números dados, ya que un taller se reúne cada vez que suma una cantidad fija de días, es decir, va construyendo un serie de múltiplos (p.e. ajedrez se reúne a los 3 días, a los 6 días, a los 9 días, ..., el de teatro a 5 días, a los 10, a los 15,...).

Por tanto, queremos un múltiplo común, y deseamos saber la primera vez que ocurrirá; luego, buscamos el MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO.

Como hemos visto antes, descomponemos todos los números en factores primos y tomamos los factores comunes y no comunes con mayor exponente. De ese modo es múltiplo de todos y es el más pequeño posible.

Pues bien haciendo eso, obtenemos que 2,3 y 5 son números primos, $4 = 2^2$ y $6 = 2 \cdot 3$; Por tanto el mínimo común múltiplo es $2^2 \cdot 3 \cdot 5$, o lo que es lo mismo 60.

Luego cada 60 días vuelven a coincidir. Si coincidieron el día 1 de octubre, la próxima vez será el 30 de noviembre.

4. Resumen

Aunque lo más importante de este tema es que desarrolles destrezas y buenos hábitos de cálculo, no podemos dejar a un lado los conceptos estudiados, ya que nos acompañaran durante todo este viaje por el mundo científico-técnico.

Importante

Lo esencial de los números naturales

Los **números naturales** son aquellos que nos sirven para contar. En la recta numérica se representan a la derecha del 0.

Las principales operaciones aritméticas con números naturales son la **suma**, la **resta**, la **multiplicación** y la **división**.

Para realizar operaciones combinadas con las diferentes operaciones aritméticas hay que seguir una **jerarquía** en las mismas:

1º) Se efectúan las operaciones que se encuentran dentro de los paréntesis, y después las potencias.

2º) A continuación, se resuelven las multiplicaciones y las divisiones en el orden en que aparecen de izquierda a derecha.

3º) Por último, se realizan las sumas y las restas en el mismo orden.

Importante

Lo esencial de los Números Enteros

Los números enteros positivos, negativos y el 0 forman el conjunto de los **números enteros**.

Los enteros positivos se representan en la **recta numérica** a la derecha del número 0, y los negativos a la izquierda.

El **valor absoluto** de un número entero es el número que resulta al prescindir de su signo.

La **suma** de dos números enteros del mismo signo es igual a la suma de sus valores absolutos con el signo de los sumandos. Si los números son de distinto signo, se restan los valores absolutos y se coloca el signo del sumando de mayor valor absoluto.

El **opuesto** de un número entero se obtiene cambiándolo de signo. La **resta** de dos números enteros es igual a la suma del primero más el opuesto del segundo.

El **producto** de dos números enteros es igual al producto de sus valores absolutos, con signo + si ambos tienen el mismo signo, y con signo -, si son de signo contrario.

Para **dividir** dos números enteros se dividen sus valores absolutos. El signo del resultado es positivo si ambos tienen igual signo, y negativo, si son de signo contrario.

Importante

<u>**Lo esencial de potencia y raíz cuadrada**</u>

Un producto en el que todos los factores son iguales se llama **potencia**.

En una potencia, el factor que se repite se denomina **base** y el número de veces que se repite es el **exponente**.

Si la potencia tiene como base un entero positivo, su resultado es siempre positivo.

Si la potencia tiene como base un entero negativo, su resultado puede ser:

- Positivo, si el exponente es par.
- Negativo, si el exponente es impar.

La **raíz cuadrada** de un número a es otro número b tal que $b^2=a$.

Cuando el radicando es un número negativo, la raíz no tiene solución. Si el radicando es un número positivo, hay dos soluciones una positiva y otra negativa.

Importante

<u>**Lo esencial de Divisibilidad**</u>

Los **múltiplos** de un número se obtienen multiplicando dicho número por los números naturales.

Los **divisores** de un número lo dividen de forma exacta y se obtienen dividiendo ese número por todos los números menores o iguales a él.

Un número es **divisible** por 2 si su última cifra es cero o cifra par, por 3 si la suma de sus cifras es múltiplo de 3, por 5 si su última cifra es 0 o 5 y por 10 si su última cifra es 0.

Un número es **primo** si sólo tiene como divisores a él mismo y a la unidad.

Un número es **compuesto** si tiene más de dos divisores.

El **mínimo común múltiplo (MCM)** de dos o más números es el menor de sus múltiplos comunes. Se obtiene descomponiéndolos en producto de factores primos, y multiplicando los factores comunes y no comunes elevados al mayor exponente.

El **máximo común divisor (MCD)** de dos o más números es el mayor de sus divisores comunes. Se obtiene descomponiendo cada número en producto de factores, y multiplicando los factores comunes elevados al menor exponente.

5. Para aprender hazlo tú

Ejercicio Resuelto

1. Efectúa las siguientes operaciones sin usar la calculadora:

a) 23.612+915+1.036

b) 114.532+54+2.309

c) 3.877-3.058

d) 324·56

e) 16.605 :81

a) 25.563
b) 116.895
c) 819
d) 18.144
e) 205

2. Calcula las siguientes potencias:

a. 2^2

a. $(2)^2$

a. $(-2)^2$

a. -2^2

a. $(-2)^3$

a. -2^3

a. $2^2 = 2 \cdot 2 = 4$

a. $(2)^2 = 2 \cdot 2 = 4$

a. $(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = +4$

a. $-2^2 = -(2 \cdot 2) = -4$

a. $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$

a. $-2^3 = -(2 \cdot 2 \cdot 2) = -8$

Comprueba lo aprendido

Escribe el signo que corresponda:<,> o =

a) 48.753 ☐ 43.271+4.201+937+99

b) 543 ☐ 237+145+163

c) 1.024 ☐ 601+357+66

Comprueba lo aprendido

Completa la siguiente tabla en la que se efectúan divisiones exactas:

DIVIDENDO	DIVISOR	COCIENTE
350	5	☐
54	☐	9
500	10	☐
☐	4	30

Recuerda que en las divisiones exactas el dividendo es igual al divisor por el cociente.

Ejercicio Resuelto

En mi casa tengo una pared de 435 cm de largo por 240 cm de alto. Deseo cubrirla entera con azulejos de forma cuadrada, todos del mismo tamaño, y usando el menor número posible de ellos (sin romper ninguno).

¿La medida del lado de los azulejos será múltiplo o divisor del largo y del alto de la pared?

Si fuese múltiplo de las longitudes de los lados, sería el azulejo más grande que la pared. El lado del azulejo, para no romper ninguno, tiene que dividir exactamente a los lados de la pared.

La longitud buscada para el lado del azulejo, por tanto, será un divisor de ambos lados y el azulejo debe ser lo más grande posible (para utilizar el menor número de azulejos). Luego, buscamos el MÁXIMO COMÚN DIVISOR de las longitudes de los lados. Intenta calcularlo.

Podemos intentar hacer un listado con todos los divisores de ambos números y buscar el mayor, pero sería tedioso y largo.

Si descomponemos los dos números en factores primos y tomamos los factores comunes con menor exponente, el número obtenido será divisor de ambos números (se ha formado con factores que están en los dos) y será el mayor, ya que si hubiese otro más grande tendría algún otro factor cosa que carece de sentido por la forma en que ha sido construido.

Si lo haces, el máximo común divisor ha de ser 15 y por tanto los azulejos tienen que tener 15 cm de lado.

$435 = 3 \cdot 5 \cdot 29$

$240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$

Por tanto el máximo común divisor de 435 y 240 es $3 \cdot 5$; o sea, 15.

Imprimible

Descargar PDF

Si quieres escuchar el contenido de este archivo, puedes instalar en tu ordenador el lector de pantalla libre y gratuito NDVA.

Aviso Legal

Las páginas externas no se muestran en la versión imprimible

http://www.juntadeandalucia.es/educacion/permanente/materiales/index.php?aviso#space