Sucesiones

Matemáticas I

1.º Bachillerato

Contenidos

Aritmética

Sucesiones

1. Introducción

De pequeños, a nuestros padres y familiares les hacían mucha gracia cuando aprendíamos a contar los primeros números: 1, 2, 3, 4, 5...

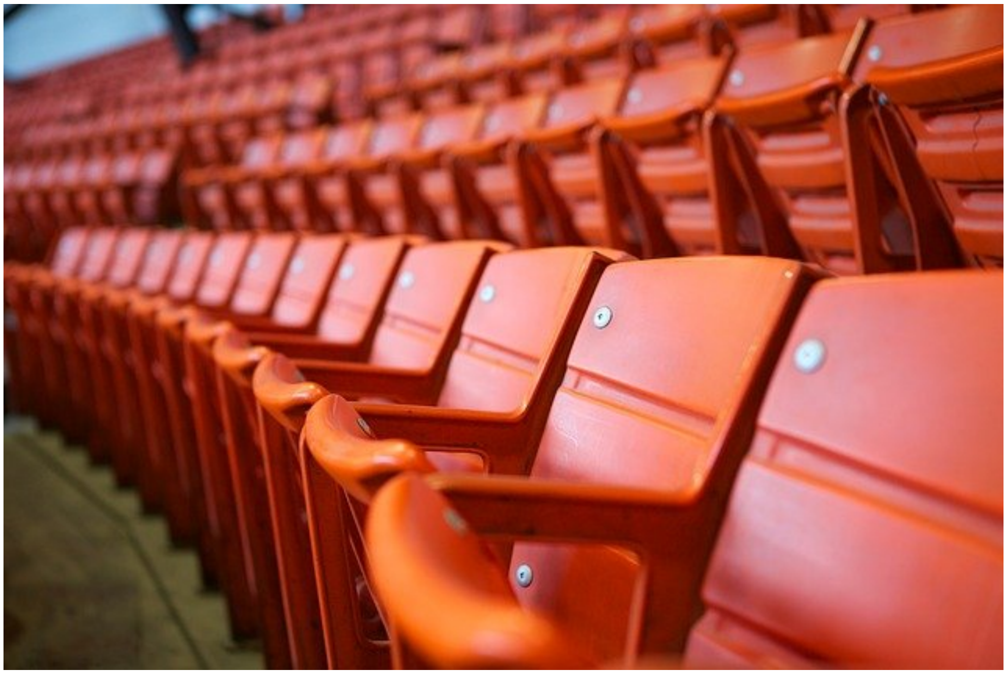


Imagen de LAWJR en Pixabay. Licencia Pixabay

Después, cuando nos hicimos un poco mayores, no mucho más, seis o siete años, teníamos que recitar y aprender las tablas de multiplicar, por ejemplo, la del siete, que es una de las que más trabajo costaba:

7 x 1 = 7

7 x 2 = 14

7 x 3 = 21

7 x 4 = 28

7 x 5 = 35

...

Algunos, a los que más le gustan las matemáticas, unos años más tarde, memorizábamos, por ejemplo, el cuadrado de los primeros números naturales:

1 x 1 = 1

$$2 \times 2 = 4$$

$$3 \times 3 = 9$$

$$4 \times 4 = 16$$

$$5 \times 5 = 25$$

...

Las tres secuencias anteriores:

1, 2, 3, 4, 5...

7, 14, 21, 28, 35...

1, 4, 9, 16, 25...

se denominan sucesiones numéricas . Una primera definición de sucesión sería la de un conjunto infinito de números ordenados.

1.1. Conceptos básicos

Importante

Una sucesión numérica es todo conjunto ordenado de números reales.

$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \cdots$

Cada uno de los elementos de la sucesión se llama término. Como puedes ver, se utilizan los subíndices para conocer el lugar que ocupa cada término en la sucesión.

Se llama término general al que ocupa el lugar indeterminado n. Dicho término se expresa como a_n.

En muchas ocasiones, los términos de las sucesiones se pueden determinar a partir de cierto criterio, este criterio se denomina regla de formación .

Imagen de Pexels en Pixabay. Licencia Pixabay

Como hemos visto en el apartado 1. sucesiones existen muchas y muy famosas, como pueden ser la sucesión de los números primos.

Primer número primo	1
Segundo número primo	2

Tercer número primo	3
Cuarto número primo	5
Quinto número primo	7
Sexto número primo	11
Séptimo número primo	13

El primer término de la sucesión, se simboliza como a_1, el segundo a_2 y así sucesivamente, por lo que los primeros términos de la sucesión se denotarían como

$a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=3$, $a_4=5$, $a_5=7$, $a_6=11$, $a_7 = 13$...

Otra famosa sucesión es la formada por los cuadrados de los números naturales. Como ya habrás adivinado, sus primeros términos son $a_1=1$, $a_2=4$, $a_3=9$, $a_4 = 16$... Esta tiene por término general $a_n = n^2$. Gracias a esta expresión podemos determinar cualquier término de la sucesión. Por ejemplo, para calcular el término quinto, tan solo sustituimos n por 5 y obtenemos $a_5 = 25$.

Comprueba lo aprendido

El tercer término de la sucesión de los números cúbicos es 27

Verdadero   Falso

Verdadero

Veamos los primeros términos de la sucesión formada por los números cúbicos a1=1, a2=8, a3 = 27

Comprueba lo aprendido

Indica los cuatro primeros términos de la sucesión $a_n = 2^n+1$

- 1,2,3,4
- 3,5,9,17
- 2,4,8,16
- -1,1,2,17

Ten en cuenta el término general de la sucesión.

Correcto

Ten en cuenta la definición del término general.

Ten en cuenta la definición del término general.

Solución

1. Opción correcta
2. Incorrecto
3. Incorrecto
4. Incorrecto

¿Te gustan los pasatiempos? En general son pequeños divertimentos lógicos que nos hacen pensar y nos evaden durante cierto tiempo de la realidad.

A ver si eres capaz de adivinar este que te proponemos

De los números de la siguiente secuencia numérica, llamados números triangulares.

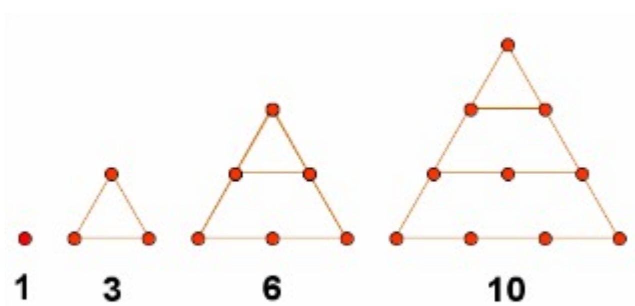


Imagen de elaboración propia

¿Sabrías decir cómo continúa la secuencia, cuáles son el quinto y sexto número triangular? ¿Y el décimo? ¿Serías capaz de dar una regla general para construirlos todos?

En el caso de números triangulares, tenemos que $a_1 = 1,\ a_2 = 3,\ a_3 = 6,\ a_4 = 10$ ...

Puedes comprobar que el término general de la sucesión formada por los números triangulares es $a_n = \frac{n^2+n}{2}$. Más adelante en el apartado 2 veremos porqué.

Verificamos que es cierto para el término que ocupa el segundo lugar: $a_2 = \frac{2^2+2}{2} = \frac{4+2}{2} = \frac{6}{2} = 3$.

Esa expresión es la regla de formación de los números triangulares que nos permite saber el valor de cualquier término, ocupe el lugar que ocupe. Por ejemplo, el término que ocupa el lugar 100: $a_{100} = \frac{100^2+100}{2} = \frac{10000+100}{2} = \frac{10100}{2} = 5050$.

No siempre es posible escribir el término general de una sucesión con una expresión algebraica, aunque conozcamos la regla que sirve para hallar sus términos. Es el caso de las sucesiones recurrentes , en las que cada término queda determinado a partir de los anteriores.

La famosa sucesión de Fibonacci es de este tipo. Recuerda, $a_1 = 1,\ a_2 = 1$, y a partir del tercer término se cumple que $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, es decir cada término es la suma de los dos anteriores.

Aplicando la regla de recurrencia anterior tenemos que $a_3 = 1+1 = 2,\ a_4 = 2+1 = 3,\ a_5 = 3+2 = 5$ ...

Para saber más

La sucesión de Fibonacci y la razón aurea:

[Enlace a recurso reproducible >> https://www.youtube.com/embed/yDyMSliKsxI](https://www.youtube.com/embed/yDyMSliKsxI)

Vídeo de Derivando alojado en [Youtube]()

Recuerdas las tres primeras sucesiones que vimos al principio del tema:

Los números naturales: 1, 2, 3, 4, 5...

La tabla de multiplicar del 7: 7, 14, 21, 28, 35...

Los cuadrados de los números naturales: 1, 4, 9, 16, 25...

Completa las siguientes frases:

a. El término general de la sucesión formada por los números naturales es a_n = ☐ .

b. En el caso de la tabla de multiplicar del 7 a ☐ = 49.

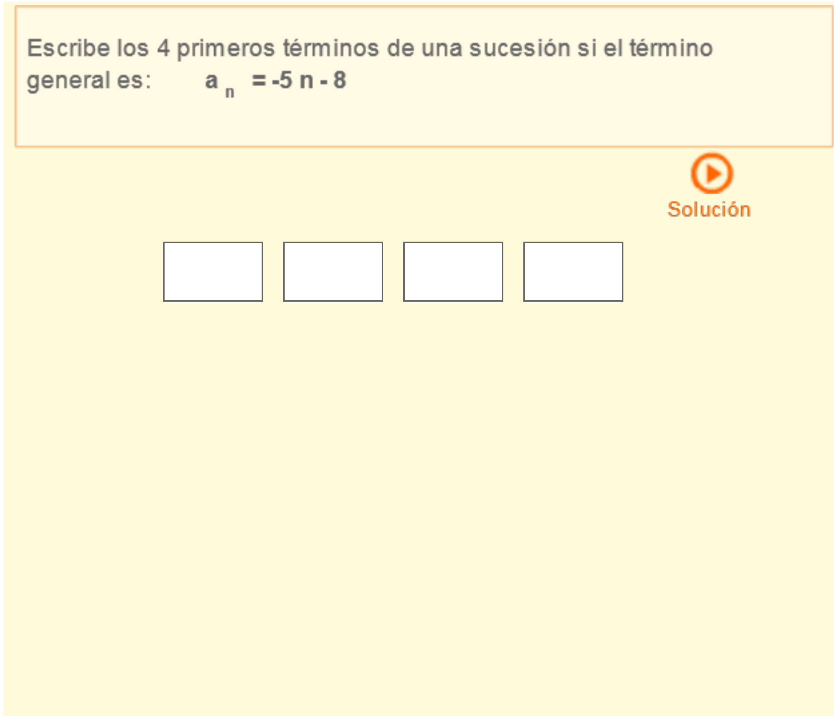
c. El término general de la sucesión anterior es a_n = ☐ .

d. En la sucesión de los cuadrados a ☐ = 81.

Comprueba lo aprendido

A continuación, algunos ejercicios para practicar la obtención de algunos términos a partir del general:

https://proyectodescartes.org/EDAD/materiales_didacticos/EDAD_3eso_progresiones-JS-LOMCE/3q5_ejercicios_resueltos_1b.htm


Escribe los 4 primeros términos de una sucesión si el término general es: $a_n = -5n - 8$
Solución

1.2. Monotonía y acotación

En biología se nos enseña que los seres vivos nacen, crecen, etc. En las sucesiones se pueden observar comportamientos parecidos.

Fotografía de Unsplash en Pixabay. Licencia Pixabay

Importante

Una sucesión a_n se llama monótona creciente cuando $a_{n+1} \geq a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se dice estrictamente creciente cuando $a_{n+1} > a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Una sucesión a_n se llama monótona decreciente cuando $a_{n+1} \leq a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se dice estrictamente decreciente cuando $a_{n+1} < a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Una sucesión a_n se llama alternada cuando el signo de a_n es distinto del de a_{n+1} para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplos

a. La sucesión $a_n = n^2$ es monótona estrictamente creciente ya que $(n+1)^2 > n^2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
b. La sucesión $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \dots$ es monótona decreciente pero no estrictamente decreciente.

c. La sucesión $a_n = 4$es monótona creciente y decreciente al mismo tiempo.

d. La sucesión $a_n = \left(-1\right)^n$ es alternada.

Comprueba lo aprendido

Indica si es cierta la siguiente expresión "Al aumentar n, tambien aumenta el termino n-esimo de una sucesión"

○ Verdadero ○ Falso

Falso

Obviamente, el enunciado es falso, ya que, si tomamos la sucesión $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ disminuye al aumentar la variable n

Importante

Una sucesión $a_n$se dice que es acotada superiormente cuando existe un número M llamado cota superior de la sucesión, tal que $a_n \leq M$ para todo $n \in N$.

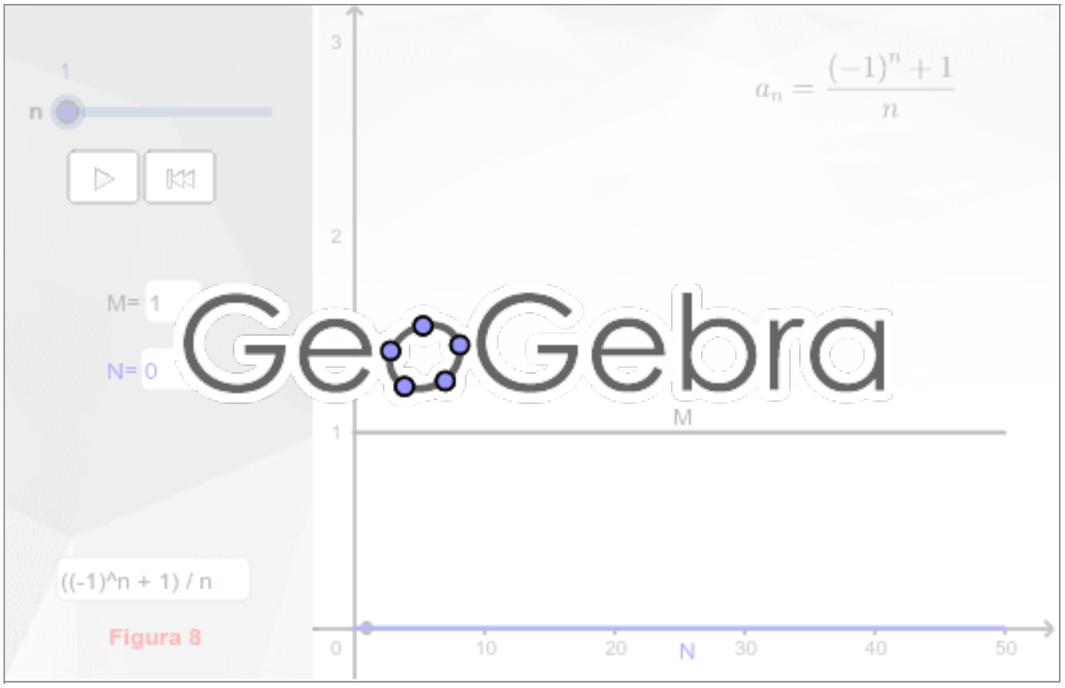
Una sucesión $a_n$se dice que es acotada inferiormente cuando existe un número m llamado cota superior de la sucesión, tal que $m \leq a_n$para todo $n \in N$.

Una sucesión $a_n$se dice que es acotada cuando es acotada superior e inferiormente al mismo tiempo.

Reflexiona

En la siguiente escena de Geogebra puedes visualizar la cota superior y la cota inferior de una sucesión.

https://www.geogebra.org/material/iframe/id/CgSFu5bN/width/529/height/340/border/888888/sdz/true



Ejemplos

a. La sucesión $a_n = 3-n$ es una sucesión acotada superiormente y una cota superior es M=3. Se comprueba también que no es acotada inferiormente.
b. La sucesión $a_n = n^2$ es una sucesión acotada inferiormente y una cota inferior es m=0. Sin embargo no es acotada superiormente pues dado un número M siempre podemos encontrar un número natural n tal que $n^2 > M$.
c. La sucesión $a_n = \frac{1}{n}$ es una sucesión acotada donde podemos tomar M=1, m=0.
d. La sucesión $a_n = n \cdot (-1)^n$ no es acotada ni superior ni inferiormente.

1.3. Límites de sucesiones

Algunas veces los términos que componen una sucesión son cada vez más grandes, otras cada vez más pequeños, y en un tercer caso tienden a estabilizarse alrededor de un valor determinado. En este apartado vamos a estudiar esta interesante característica de las sucesiones.

Imagen de Free-Photos en Pixabay. Licencia Pixabay

Importante

El límite de una sucesión a_n, es aquel número al que tiende la sucesión al aumentar enormemente la variable n.

Si la sucesión tiene como límite infinito, diremos que la sucesión diverge, mientras que si se acerca a un número real, diremos que converge a dicho número y que es el límite de la sucesión.

Analicemos la sucesión $a_n=n^2+n$. Los primeros términos de dicha sucesión son 2,6,12,20,... y apreciamos que tal como n crece, el término de la sucesión aumenta, ya que estamos elevando un número natural al cuadrado y sumándole dicho número. Al hacerse n, infinitamente grande, el límite de dicha sucesión será infinito.

Sin embargo, el límite de una sucesión también puede ser muy pequeño. La sucesión

$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ tiene como primeros términos $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$ Al aumentar n, estamos divididiendo 1 entre numeros enormes, ya que estamos elevando 2 a números naturales cada vez mayores. Al dividir entonces números, cada vez estamos mas cercanos a 0 y diremos que la sucesión $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ converge y su límite es 0

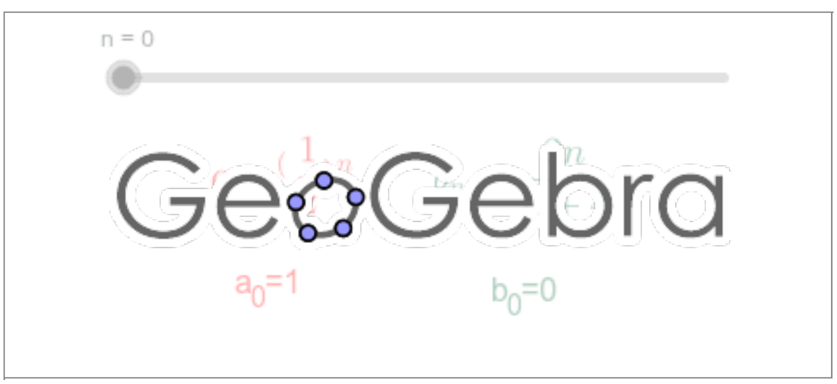
Debemos resaltar que el límite nunca se alcanza, pero cada vez estamos más próximo a él.

Importante

Llamamos sucesión infinitésima o nula si tiene límite 0.

En la escena de Geogebra de abajo si mueves el deslizador dándole valores a n, puedes apreciar como los valores de la sucesión $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ tienden a 0. Y si analizas esta otra $b_n = \frac{2n}{n+4}$, observarás como, la sucesión se va acercando poco a poco al número 2

https://www.geogebra.org/material/iframe/id/BuwF3UFw/width/415/height/184/border/888888/sri/true



Algunos ejemplos de sucesiones infinitésimas o nulas los has visto más arriba, otros ejemplos son: 10^{-n} y $\frac{1}{n}$.

Importante

La sucesión cuyo término general es $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ es estrictamente creciente y está acotada superiormente por 3. Por tanto es convergente, su límite es un número irracional que se representa por "e".

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2{,}718281828\ldots$$

Este número es la base de los logaritmos neperianos que veremos en el apartado 4 de este tema.

Ejercicio Resuelto

Hallar el $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n}$.

Los pasos a dar para la resolución son los siguientes:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{\infty} = 0$$
$$Ya\ que\ cualquier\ numero\ dividido\ entre\ \infty\ da\ 0.$$

Este resultado se puede deducir del siguiente hecho.

$$Cuando\ \ n \to \infty$$
$$a_n = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$$

Se puede observar que cuando n toma valores cada vez más grandes, los términos de la sucesión se van haciendo cada vez más pequeños, aproximándose a 0.

2. Progresiones aritméticas

Johann Carl Friedrich Gauss, llamado el "príncipe de las matemáticas", fue un niño precoz. Tenía 10 años de edad cuando un día en el colegio el maestro pidió a los alumnos, quizás para que lo dejarán tranquilo durante un buen rato, que sumaran los 100 primeros números naturales. Trascurrido unos pocos minutos, Gauss se acercó a la mesa del profesor con el resultado correcto de la suma: 5.050.

¿Cómo lo consiguió? ¿Sumó las cien cifras de forma rápida? ¿Cuál fue el razonamiento del pequeño Gauss?

Muy fácil, pero a la vez ingenioso. Gauss escribió dos veces la sucesión, la primera en el orden natural de 1 a 100, y la otra de 100 a 1. Se dió cuenta de que la suma de los pares de números extremos era siempre la misma, 101. Dicha suma aparecía 100 veces, es decir 100·101= 10.100 era el resultado de sumar dos veces lo que había pedido el maestro, por tanto, bastaba dividir entre 2 esa cantidad. Así obtuvo el 5.050 que sorprendió tanto al maestro como a sus compañeros.

	1	2	3	4	...	97	98	99	100
	100	99	98	97	...	4	3	2	1
Suma	101	101	101	101	...	101	101	101	101

No es la primera vez que aparece 5.050 en este tema, ¿recuerdas que era el número triángular correspondiente a 100? El motivo es bien sencillo. En realidad, el número triangular que ocupa el lugar n no es más que la suma de los n primeros números naturales. Por ejemplo, el que ocupa el quinto lugar es el resultado de sumar 1 + 2+ 3 + 4 + 5 = 15.

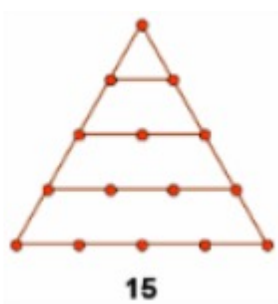


Imagen de elaboración propia

La sucesión formada por los números naturales es el ejemplo más sencillo de un tipo de sucesión con nombre propio, la progresión aritmética . Como puedes ver, no por ser sencillas quiere decir que no se pueden usar en muchos contextos.

2.1. Término general

No solo los triángulos determinan un tipo de sucesión numérica, también es posible jugar con las letras del abecedario para generar sucesiones, por ejemplo, con la T.

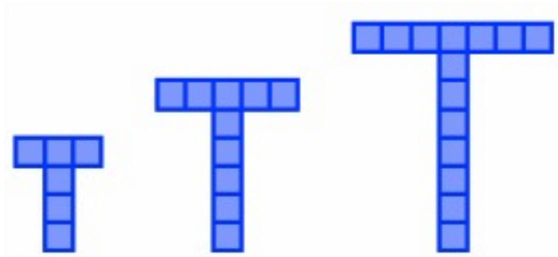


Imagen de elaboración propia

¿Cuántos cuadrados son necesarios para construir la primera T? ¿Y la segunda? ¿Y la tercera? ¿Y las sucesivas T?

En un principio parece que basta con contar los cuadrados: 6 para la primera, 10 para la segunda, 14 para la tercera... Pero si queremos conocer la regla de formación tendremos que fijarnos un poco más: 6 para la primera y después se añaden 4 cuadrados más a las sucesivas T.

Vamos a escribirlo utilizando la notación de sucesiones:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 6 \\
a_2 &= 6+4 \\
a_3 &= 6+4+4 = 6+2\cdot 4 \\
a_4 &= 6+4+4+4 = 6+3\cdot 4
\end{aligned}
$$

De lo anterior podemos deducir que $a_n = 6+(n-1)\cdot 4$.

A este tipo de sucesiones se las denomina progresiones aritméticas .

Importante

Se llama progresión aritmética a toda sucesión en la que cada término, exceptuando el primero, es la suma del anterior más una cantidad fija llamada diferencia .

Es decir $a_n = a_{n-1} + d$, donde d es la diferencia y $n > 1$.

La sucesión anterior, la formada por los cuadrados necesarios para ir construyendo las sucesivas T, es una progresión aritmética en la que la diferencia vale 4.

Comprueba lo aprendido

Algunos de los ejemplos de sucesiones que hemos vista hasta ahora son progresiones aritméticas. Completa las siguientes afirmaciones.

a. La sucesión formada por los números naturales es una progresión aritmética con diferencia igual a ☐ .

b. Los múltiplos de 7 también forman una progresión aritmética en que d = ☐ .

c. La sucesión determinada por las losetas necesarias para rodear las jardineras forman una progresión aritmética en la que d = ☐ .

Comprueba lo aprendido

¿Cuál de las siguientes sucesiones se corresponden con una progresión aritmética?

- ☐ 5, -5, 5, -5, 5, -5...
- ☐ -5, 0, 5, 10, 15, 20...
- ☐ 1, 11, 111, 1111, 11111...
- ☐ 50, 42, 34, 26, 18...
- ☐ 2, 4, 8, 16, 32...

Solución

1. Incorrecto

2. Correcto
3. Incorrecto
4. Correcto
5. Incorrecto

En una progresión aritmética, si son conocidos su primer término y la diferencia es posible conocer cómodamente cualquier término, es decir, es muy fácil determinar su término general.

Lo anterior ya lo hemos podido comprobar en el caso de los cuadros que hacen falta para ir formando las sucesivas T y con las losetas necesarias para rodear las jardineras.

En general, solo hace falta razonar un poco sobre los primeros términos de la progresión aritmética:

[Enlace a recurso reproducible >> https://www.youtube.com/embed/2YcdDFymd2w](https://www.youtube.com/embed/2YcdDFymd2w)

Vídeo de Tutomate alojado en [Youtube](https://www.youtube.com)

Importante

Una progresión aritmética cuyo primer término es a_1 y de diferencia d, tiene como término general:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

En el caso de las losetas, $a_1 = 6$ y $d = 5$, por tanto $a_n = a_1 + (n-1) \cdot 5 = 6 + 5n - 5 = 1 + 5n$.

Y en el de las T, $a_1 = 6$ y $d = 4$, por tanto $a_n = a_1 + (n-1) \cdot 4 = 6 + 4n - 4 = 2 + 4n$.

Caso de estudio

La primera fila del patio de butacas del teatro Antonio Gala de mi ciudad, tiene 20 asientos, el resto de filas aumenta en 2 asientos respecto a la que tiene delante.

¿Cuántos asientos tiene la fila que ocupa el lugar 15?

La situación se ajusta a una progresión aritmética donde el primer término, $a_1=20$, y la diferencia $d=2$.

Por tanto, si queremos saber cuántas butacas hay en la fila 15, basta que apliquemos la fórmula del término general:

$a_{15}=20+(15-1)\cdot 2=20+14\cdot 2=20+28=48$.

Por lo que el número de asientos en la fila 15 es de 48.

Ejercicio Resuelto

De una progresión aritmética se conocen el valor del segundo y el quinto término, $a_2=-4$ y $a_5=-18$.

Determinar el término general de la progresión.

Sabemos que en una progresión aritmética cada término es la suma del anterior más un valor fijo llamado diferencia, d. Entre el segundo y el quinto término se ha sumado 5-2= 3 veces la diferencia. Por tanto $a_5=a_2+3d$, es decir $-18=-4+3d$, despejando $-14=3d$ y $d=\frac{-14}{3}$.

Ahora podemos hallar el primer término, a_1, ya que $a_2=a_1+d$. Por tanto $-4=a_1-\frac{14}{3}$. De donde obtenemos que $a_1=\frac{2}{3}$.

Ya podemos hallar el término general de la progresión

$a_n=a_1+(n-1)\cdot d=\frac{2}{3}+(n-1)\cdot\left(\frac{-14}{3}\right)=\frac{2}{3}-\frac{14n}{3}+\frac{14}{3}=\frac{16-14n}{3}$

Es decir $a_n = \frac{16-14n}{3}$.

Otra solución posible se puede ver en el siguiente vídeo.

Comprueba lo aprendido

A continuación, algunos ejercicios para practicar con progresiones aritméticas

https://proyectodescartes.org/EDAD/materiales_didacticos/EDAD_3eso_progresiones-JS-LOMCE/3q5_ejercicios_resueltos_2b.htm

En una progresión aritmética, el término 8 es -4 y la diferencia es -1. Halla el término general.

Solución

2.1. Suma de términos de una progresión aritmética

Recordemos a Gauss y su brillante idea para sumar los 100 primeros números naturales. ¿Podremos generalizarla para sumar los 200 primeros números? ¿O los n primeros?

Volvamos también a los números triángulares. ¿Cuántos puntos tendrá el que ocupa el lugar n?

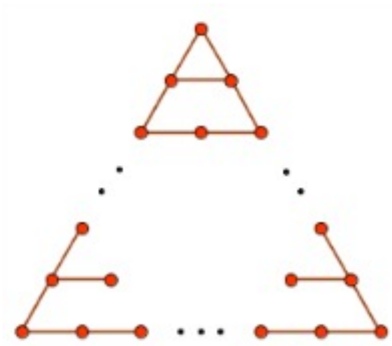


Imagen de elaboración propia

Relacionemos las dos sucesiones anteriores. Por un lado tenemos la de los números naturales 1, 2, 3, 4... Por otro la de los números triangulares. Hagamos memoria:

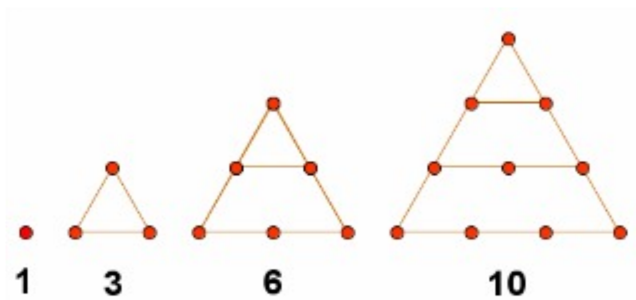


Imagen de elaboración propia

Podemos ver que el número triangular que ocupa el lugar n es igual a la suma de los n primeros números naturales: 1 + 2 + 3 + ... + n.

Operando de forma similar a como lo hizo Gauss, tenemos:

	1	2	3	4	...	n-3	n-2	n-1	n
	n	n-1	n-2	n-3	...	4	3	2	1
Suma	n+1	n+1	n+1	n+1	...	n+1	n+1	n+1	n+1

Por tanto, dos veces la suma de los n primeros números naturales es igual al n·(n+1). Esto quiere decir que la suma de los n primeros números naturales es igual a:

$$\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n^2+n}{2}$$

¿Será posible realizar un razonamiento similar para la suma de los primeros términos de cualquier progresión aritmética?

Comprobemos que sí en el siguiente vídeo:

[Enlace a recurso reproducible >> https://www.youtube.com/embed/s1H8-TsqLFk](https://www.youtube.com/embed/s1H8-TsqLFk)

Vídeo de tutomate alojado en Youtube

Importante

La suma de los n primeros términos de una progresión aritmética de término general a_n es igual a

$$S_n=\frac{(a_1+a_n)\cdot n}{2}$$

Caso de estudio

Volvamos al número de asientos que tiene el patio de butacas del teatro Antonio Gala, que vimos en el apartado anterior. Recordemos que la primera fila tenía 20 asientos y que el resto de filas aumenta en 2 asientos respecto a la que tiene delante.

Ahora nos preguntamos, cuántos asientos hay en el patio de butacas si dispone de 15 filas en total.

El problema planteado se resuelve si hallamos la suma de los 15 primeros términos de una progresión aritmética de la que sabemos que $a_1=20$ y $d=2$.

De un ejercicio anterior sabemos que $a_{15}=48$.

Aplicamos la fórmula anterior para la suma de los n (en este caso $n=15$) primeros términos de una progresión aritmética, y tenemos que:

$$S_{15}=\frac{(20+48)}{2}\cdot 15=\frac{68}{2}\cdot 15=34\cdot 15=510$$

Por lo que el número de asientos totales del patio de butacas es 510.

Ejercicio Resuelto

Sabiendo que el primer término de una progresión aritmética es 30 y el cuarto es 39, halla la diferencia de la progresión y la suma de sus primeros 25 términos.

Los pasos a seguir son idénticos a los del ejercicio anterior.

Primero hallamos la diferencia d, para lo que conocemos a_1 y a_4:

$a_4=a_1+3d$, es decir, $39=30+3d$. Por tanto, $d=3$.

Antes de calcular la suma de los 25 primeros términos tendremos que conocer cuánto vale a_{25}. Operamos:

$a_{25}=30+24\cdot 3=102$

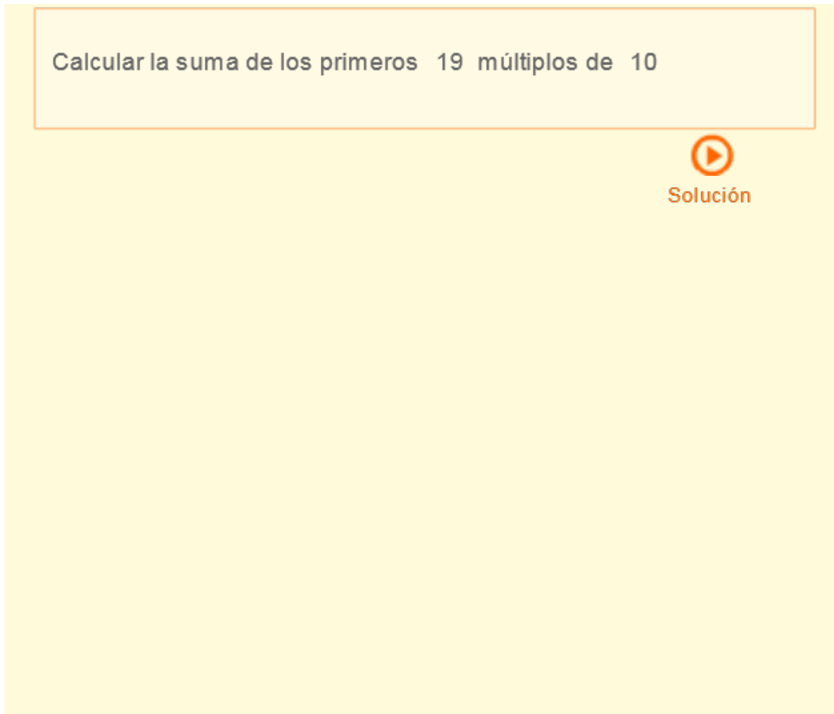
Ya podemos aplicar la fórmula y tendremos que

$S_{25}=\frac{(a_1+a_{25})\cdot 25}{2}=\frac{(30+102)\cdot 25}{2}=\frac{132\cdot 25}{2}=1.650$.

Tarea

A continuación, algunos ejercicios para practicar con la suma de los términos de una progresión aritmética:

https://proyectodescartes.org/EDAD/materiales_didacticos/EDAD_3eso_progresiones-JS-LOMCE/3q5_ejercicios_resueltos_2c.htm



Escena de Miguel Ángel Cabezón Ochoa en Proyecto Descartes. Licencia CC

3. Progresiones geométricas

Existe una leyenda sobre el supuesto inventor del juego del ajedrez, Sissa Ben Dahir . Cierto rey hindú se encontraba muy triste debido a la muerte de su hijo. Para aliviar su pena, Sissa le enseñó a jugar al ajedrez.

Imagen de PgmJanssen en Pixabay. Licencia Pixabay

Quedó tan contento el monarca que le ofreció el regalo que él quisiera. Sissa tan sólo le pidió que le diera un grano de trigo por la primera casilla del tablero de ajedrez, el doble por la segunda, el doble por la tercera y así sucesivamente hasta completar las 64 casillas.

El rey accedió entre satisfecho y sorprendido a la extraña petición, pero al realizar los cálculos se dio cuenta de que le sería imposible cumplirla.

El número de granos de arroz que corresponde a cada una de las casillas es una sucesión numérica:

$$a_1=1,\ a_2=2,\ a_3=4,\ a_4=8,\ a_5=16\ \cdots$$

El primer término es 1, los términos posteriores se obtienen multiplicando por 2 el término anterior, es decir:

$$a_1=1,\ a_2=2\cdot1=2=2^1,\ a_3=2\cdot2=4=2^2,\ a_4=4\cdot2=8=2^3,\ a_5=8\cdot2=16=2^4\ \cdots$$

Podríamos escribir lo anterior de la siguiente forma: $a_1=1$ y $a_n=2^{n-1}$.

Esto nos permite saber cómodamente el número de granos de la última casilla, la 64:

$2^{64-1} = 2^{63} = 9.223.372.036.854.780.000$ granos de trigo.

Es decir, $9.22 \cdot 10^{18}$ granos. Y aún tendríamos que sumar todos los granos de las 64 casillas.

¿Entiendes ahora cómo se quedó el rey cuando se dio cuenta del regalo que le debía a Sissa?

A este tipo de sucesiones se les denomina progresiones geométricas .

3.1. Término general

Te has parado alguna vez a pensar a que velocidad puede extenderse un rumor. Supongamos que Juan se entera de una información que le resulta interesante y se la comunica a 3 amigos a través de una red social tardando un minuto en ello. Posteriormente estos 3 amigos la transmiten cada uno a otros tres en el siguiente minuto, y así sucesivamente. ¿Cómo evolucionaría el número de personas que tienen conocimiento de la información a lo largo del tiempo? La secuencia que obtenemos sería la siguiente: 1 (Juan), 3,9,27,81,243... En cinco minutos 243 personas estarían al tanto de la información. ¿Te sorprende esto? A los fenómenos que evolucionan de esta forma decimos que siguen una progresión geométrica.

Fotografía de LoboStudioHamburg en Pixabay. Licencia Pixabay

Importante

Se llama progresión geométrica a toda sucesión en la que cada término, exceptuando el primero, es el producto del anterior por una cantidad fija llamada razón.

Es decir $a_n = a_{n-1} \cdot r$, donde $r \neq 0$ es la razón, y $n > 1$.

En la progresión geométrica de los granos de trigo la razón es 2, un número mayor que 1 en valor absoluto. Esto implica que los términos de la progresión se vayan haciendo muy grande en valor absoluto, como hemos podido comprobar con los granos que habría que poner en la casilla 64.

Pero también podemos considerar progresiones geométricas en que la razón es número menor que 1 en valor absoluto. Observa con detenimiento el siguiente vídeo:

Enlace a recurso reproducible >> https://www.youtube.com/embed/BplpQa_a3UY

Vídeo de tutomate alojado en Youtube

La progresión geométrica anterior $a_1 = \frac{1}{2}$, la razón $r = \frac{1}{2}$, y el término general $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Ya veremos cómo podemos calcular las sumas de las dos progresiones geométricas anteriores.

Al igual que ocurre con las progresiones aritméticas, existe una ley de formación para las geométricas.

$$a_1,\ a_2 = a_1 \cdot r,\ a_3 = a_2 \cdot r = a_1 \cdot r^2,\ a_4 = a_3 \cdot r = a_1 \cdot r^3,\ a_5 = a_4 \cdot r = a_1 \cdot r^4 \ \ldots$$

Importante

Una progresión geométrica cuyo primer término es a_1 y de razón $r \neq 0$, tiene como término general:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

Ejercicio Resuelto

Halla los cinco primeros términos de una progresión geométrica de la que sabemos que $a_1 = 1$ y $a_5 = 81$.

Sabemos que $a_5 = a_1 \cdot r^4$, por tanto: $81 = 1 \cdot r^4$. Despejando, tenemos que $r = \sqrt[4]{81} = 3$ o -3.

Por lo que hay dos progresiones posibles:

En el caso de que $r = 3$: 1, 3, 9, 27, 81 .

Y, para $r = -3$: 1, -3, 9, -27, 81 .

Comprueba lo aprendido

Interpola tres medios geométricos entre 3 y 48.

Interpolar tres medios geométricos entre dos números *a* y *b* quiere decir intercalar tres números *c*, *d* y *e* entre *a* y *b*, de tal forma que los cinco números *a*, *c*, *d*, *e* y *b* formen una progresión geométrica.

Este problema se puede extender a cualquier cantidad de números entre dos números conocidos. Por ejemplo, interpolar seis medios geométricos entre *a* y *b* quiere decir intercalar seis números entre ellos, de tal forma que los ocho números, ordenados de menor a mayor, formen una progresión geométrica.

Para saber más sobre interpolación geométrica puedes ir a este enlace.

Para resolver el problema planteado, completa las siguientes frases.

Tenemos que buscar tres números a, b y c, de tal forma que 3, a, b, c y ____ determinen una progresión geométrica.

El primer término de la progresión es 3 y el ____ 48. Sabemos que $a_5 = a_1 \cdot r^4$, donde ____ es la razón. Sustituyendo: ____ $= 3 \cdot r^4$.

Despejando nos queda que $r^4 =$ ____ , por tanto r = ____ .

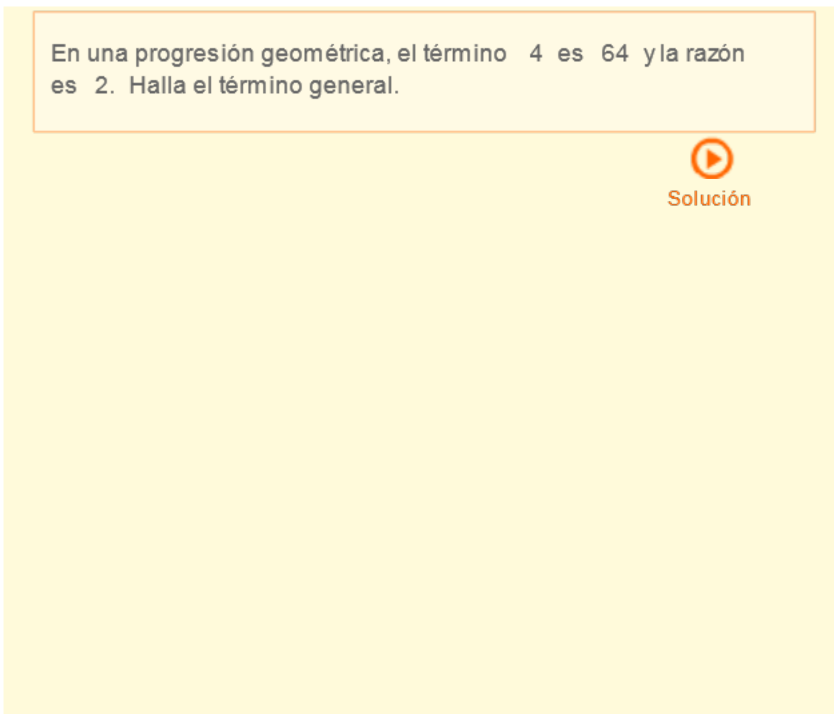
Tenemos entonces que los tres números buscados son ____ , ____ y ____ , que junto con 3 y 48 formarán la progresión geométrica.

Si haces clic en este enlace, accederás una página del portal Vitutor donde está planteado el problema anterior. Si seleccionas el número 3 que está recuadrado, podrás ver otra forma de resolverlo.

Comprueba lo aprendido

A continuación, algunos ejercicios para practicar con el término general de una progresión geométrica

https://proyectodescartes.org/EDAD/materiales_didacticos/EDAD_3eso_progresiones-JS-LOMCE/3q5_ejercicios_resueltos_3b.htm



Escena de Miguel Ángel Cabezón Ochoa en Proyecto Descartes. Licencia CC

3.2. Suma

Del mismo modo que ocurría con una progresión aritmética, también nos puede interesar en algunas ocasiones saber cuánto vale la suma de los términos de una progresión geométrica. Por ejemplo para saber cuántos granos de trigo debería entregar el rey a Sissa o demostrar que la suma de las potencias de $\frac{1}{2}$ vale 1.

Veamos cuáles son las fórmulas que nos permiten sumar algunos o muchos términos de una progresión geométrica.

[Enlace a recurso reproducible >> https://www.youtube.com/embed/4SucxkVRQkg](https://www.youtube.com/embed/4SucxkVRQkg)

Vídeo de Tutomate alojado en [Youtube](https://www.youtube.com)

Importante

- La suma de los n primeros términos de una progresión geométrica de razón r es igual a: $S_n = \frac{r \cdot a_n - a_1}{r-1}$
- Si la razón es, en valor absoluto, menor que 1, $(|r|<1)$ la suma de los infinitos términos de la progresión geométrica toma un valor finito y se calcula utilizando la fórmula: $S_\infty = \frac{a_1}{1-r}$

Veamos el siguiente vídeo en el que se explica cuándo se puede realizar la suma de todos los términos de una progresión geométrica:

[Enlace a recurso reproducible >> https://www.youtube.com/embed/s1H8-TsqLFk](https://www.youtube.com/embed/s1H8-TsqLFk)

Vídeo de Tutomate alojado en [Youtube](https://www.youtube.com)

Caso de estudio

Calcula el total de granos de trigo que tuvo que dar el rey a Sissa.
Recuerda que la progresión formada por los granos que corresponden a las 64 casillas es geométrica con $a_1=1$ y $r=2$.

Resolveremos el problema utilizando la calculadora científica. En primer lugar hallamos el último término:

$a_{64}=a_1\cdot\ r^{63}=1\cdot\ 2^{63}=9.2233\cdot\ 10^{18}$ granos de trigo.

Veamos la suma total de granos en todo el tablero de ajedrez: $S_{64}=\frac{r\cdot a_{64}-a_1}{r-1}=\frac{2\cdot 9.22\,10^{18}-1}{2-1}=1.844\cdot 10^{19}$ granos de trigo.

¿Te parecen muchos?

Ejercicio Resuelto

Demuestra que la suma de los infinitos términos de la sucesión formada por las sucesivas potencias de $\frac{1}{2}$ es 1.

Recuerda que esa sucesión es una progresión geométrica en la que $a_1=\frac{1}{2}$ y $r=\frac{1}{2}$, por tanto $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

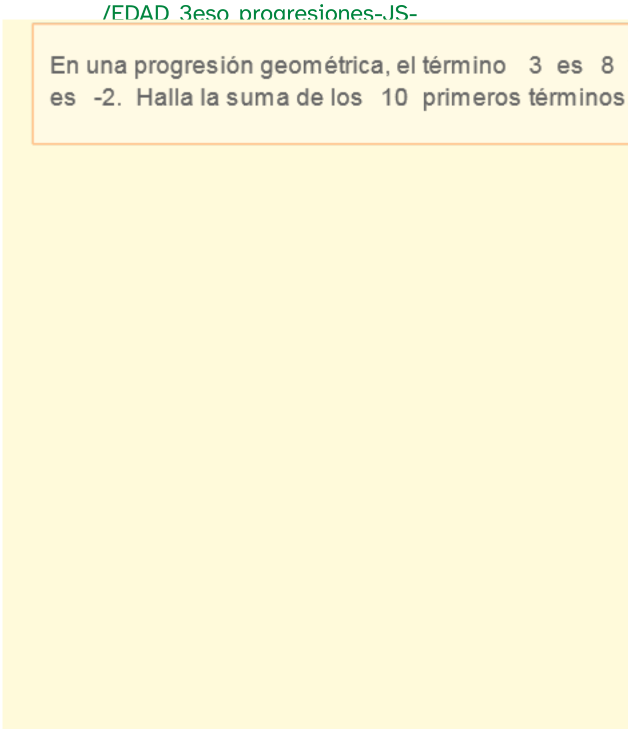
Aplicamos la fórmula de la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica, ya que la razón es menor que 1 en valor absoluto $\left(|r|=\frac{1}{2}<1\right)$. Por tanto tenemos:

$$S_n=\frac{a_1}{1-r}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=1$$

Que era el resultado que nos salía al ir sumando las áreas de los sucesivos triángulos que iban recubriendo el cuadrado de área 1.

Suma de los n primeros términos

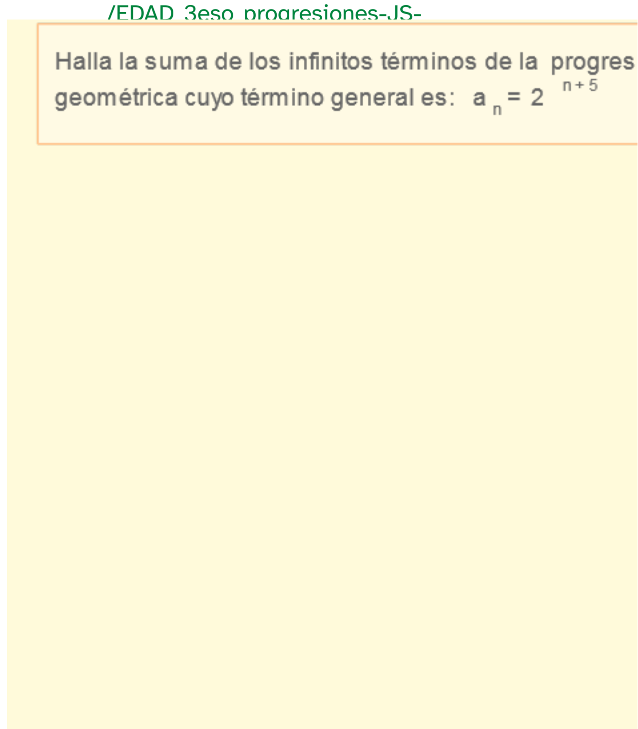
https://proyectodescartes.org
/EDAD/materiales_didacticos
/EDAD_3eso_progresiones-JS-



Escena de Miguel Ángel Cabezón Ochoa en Proyecto Descartes. Licencia CC

Suma de todos los términos

https://proyectodescartes.org
/EDAD/materiales_didacticos
/EDAD_3eso_progresiones-JS-



Escena de Miguel Ángel Cabezón Ochoa en Proyecto Descartes. Licencia CC

Curiosidad

Para terminar las curiosidades, ¿te acuerdas de Sissa Ben Dahir, el supuesto inventor del ajedrez? Aún tenemos pendiente saber si el rey le pudo pagar o no los granos de trigo que le correspondían.

Ya vimos que la suma total de granos de trigo ascendía a $1{,}844 \cdot 10^{19}$. Si consideramos que 1000 granos de trigo pueden pesar unos 30 gramos, entonces un grano pesaría 0,03 gramos.

Por tanto, $1{,}844 \cdot 10^{19} \cdot 0{,}03 = 5{,}433 \cdot 10^{17}$ gramos, que significan $5{,}433 \cdot 10^{11}$

toneladas de trigo, y expresado en millones de toneladas, son $5{,}433 \cdot 10^5$.

Las produccion mundial de trigo para la cosecha 2012/13 es de 651,42 millones de toneladas.

Realizando una simple división, tenemos que 543.300:651,42 = 834,02 cosechas mundiales.

Es decir, harían falta 834 años de producción mundial de trigo actuales, para que el rey pagara su deuda a Sissa.

Seguro que el monarca no sabía nada de progresiones.

Resumen

Importante

Sin duda lo más complicado de este tema de sucesiones es memorizar las fórmulas que aparecen, para poder luego aplicarlas con seguridad. Por este motivo te adjuntamos un mapa conceptual con la recopilación de todas:

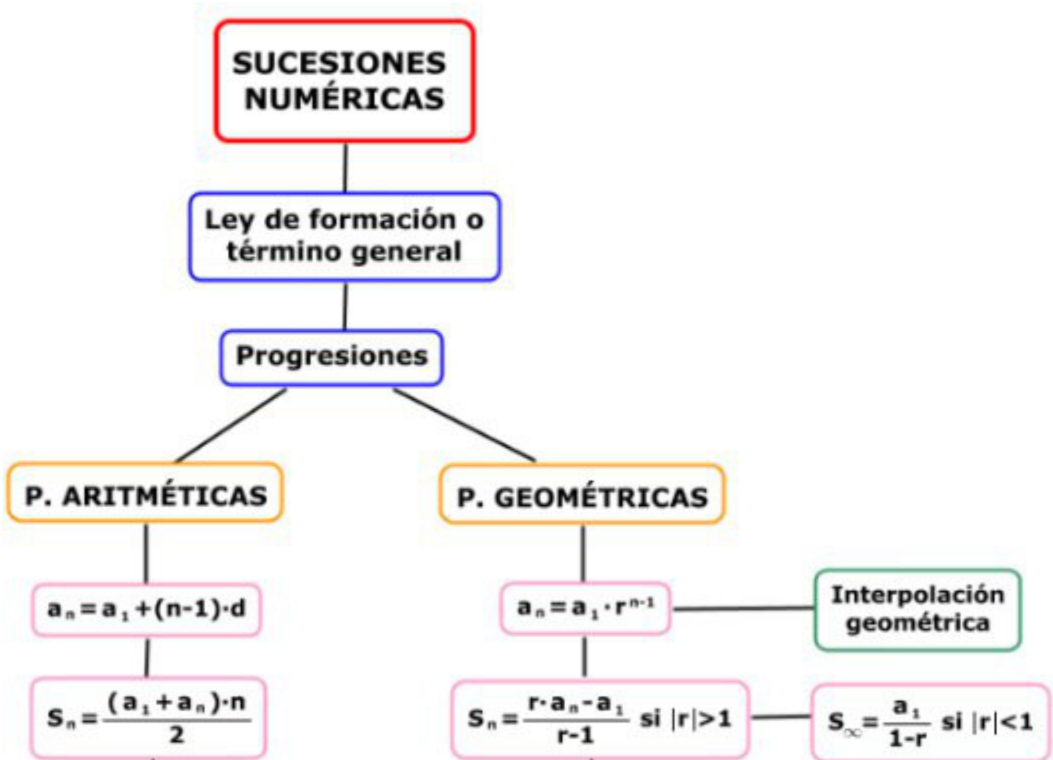


Imagen de elaboración propia

Imprimible

Descarga aquí la versión imprimible de este tema.

Si quieres escuchar el contenido de este archivo, puedes instalar en tu ordenador el lector de pantalla libre y gratuito NDVA.

Aviso legal

Las páginas externas no se muestran en la versión imprimible

http://www.juntadeandalucia.es/educacion/permanente/materiales/index.php?aviso#space