



INSTITUTO de ENSEÑANZAS a DISTANCIA de ANDALUCÍA

2º de Bachillerato

Tecnología Industrial II

Contenidos

Sistemas automáticos y de control: Estabilidad

En los sistemas de regulación automáticos resulta fundamental conocer la respuesta de dicho sistema ante una determinada entrada.

Matemáticamente, esta respuesta viene dada por la **Ecuación Característica del sistema** de control, que puede llegar a ser muy compleja, como por ejemplo una ecuación diferencial.

Para resolver estas ecuaciones diferenciales se utiliza la **transformada de Laplace**. La transformada de Laplace es un método matemático que es muy útil en la resolución de algunas ecuaciones diferenciales.

El análisis de la respuesta de un sistema de control a través de su Ecuación Característica, puede ser también muy complejo desde el punto de vista matemático. Por eso, existen métodos que aunque no resuelven por completo las ecuaciones, si sirven para esbozar cuando y cuando no son estables los sistemas de control. Uno de ellos es el **método de Routh**.



1. Transformada de Laplace



En los sistemas de regulación automáticos resulta fundamental conocer la respuesta ante una determinada entrada. Suele ser difícil obtener una relación que permita conocer como va a responder el sistema en función del tiempo ante una entrada determinada, y cuando se conocen estas relaciones, en los regímenes transitorios las relaciones algebraicas (ecuaciones diferenciales) suelen presentar un cálculo muy dificultoso. Para unificar el tratamiento teórico de sistemas tan dispares como pueden ser un vehículo espacial, el control del blanco de una lanzadera de misiles, una central térmica, una tostadora de pan,... se utilizan unas herramientas matemáticas que nos simplifican los cálculos.

Una de esas herramientas consiste en reemplazar funciones de una variable real (tiempo, distancia,...) por otras funciones que dependen de una variable compleja, simplificando ostensiblemente los cálculos. Las operaciones como la integración y la diferenciación se sustituyen por operaciones algebraicas en el plano complejo. Una vez conocido el comportamiento del sistema en el dominio complejo, se puede regresar al dominio del tiempo y de esta manera establecer cuál va a ser la respuesta ante cualquier situación.

Esta técnica se conoce como transformada de LAPLACE, y es una herramienta matemática indispensable en la Regulación Automática.

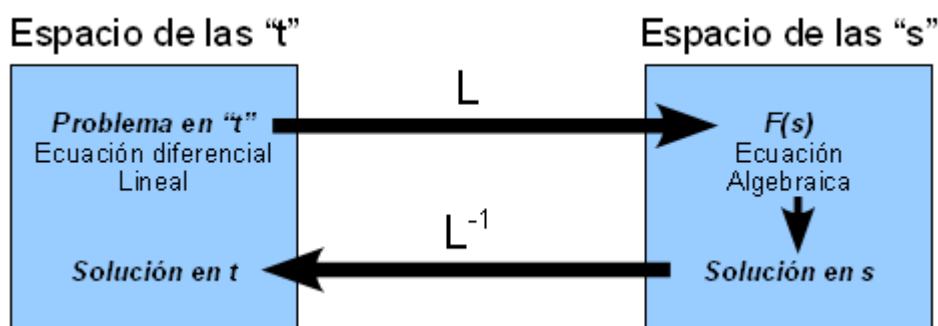


Imagen de elaboración propia

Definición de la transformada de Laplace de $F(t)$

$$L[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot f(t) \cdot dt = F(s)$$

En general $F(s)$ existe siempre que $s > a$, donde a es un parámetro constante, y donde L es llamado el operador de la transformada de Laplace.

A la función $F(s)$ se le denomina transformada de Laplace de la función $f(t)$. Y simbólicamente se representa así:

$$F(s) = L[f(t)]$$

La solución es función de la variable compleja s . Después de haber solucionado el problema en términos de s es necesario invertir la transformación para obtener la solución en el dominio del tiempo.

Definición de la transformada inversa de Laplace de $F(s)$

Si $L[f(t)] = F(s)$, entonces $f(t) = L^{-1}[F(s)]$ es la transformada inversa de Laplace de $F(s)$. L^{-1} se llama operador de la transformada inversa de Laplace.

El cálculo de esta integral es muy laborioso, por lo que se emplean tablas de transformadas y antitransformadas para su resolución.

Los cálculos de hacer la transformada o la transformada inversa, no son sencillos, pero tiene una ventaja muy importante... ¡están ya hechos!.

Veamos una tabla en la que se muestran algunas transformadas (y transformadas inversas) de Laplace:

$f(t) \xrightarrow{L} F(s)$	
1	$\frac{1}{s}; s > 0$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}; s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}; s > a$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}; s > a$
$\sin bt$	$\frac{b}{s^2+b^2}; s > 0$
$\cos bt$	$\frac{s}{s^2+b^2}; s > 0$
$\delta(t)$	1

$F(s) \xrightarrow{L^{-1}} f(t)$	
$\frac{1}{s}$	1
$\frac{1}{s^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
$\frac{1}{(s-a)^n}$	$\frac{t^{n-1} e^{at}}{(n-1)!}$
$\frac{1}{s^2+b^2}$	$\frac{\sin bt}{b}$
$\frac{s}{s^2+b^2}$	$\cos bt$

Imagen de elaboración propia

Curiosidad

Si te gustan las matemáticas y/o la física, y no has oído nunca hablar de la **delta de Dirac**, abre [este enlace](#). Si lees el primer párrafo verás dos "curiosidades"

- La delta de Dirac en realidad no es una función es **una distribución**, que tiene otra definición matemática.
- La delta de Dirac se utiliza para representar **un pulso**

Definición.

Un sistema de control es estable cuando al aplicar en su entrada una señal estándar, llamada Delta de Dirac $\delta(t)$, la respuesta en la salida es una señal que decrece con el tiempo, es decir, se hace cero al tender el tiempo a infinito.

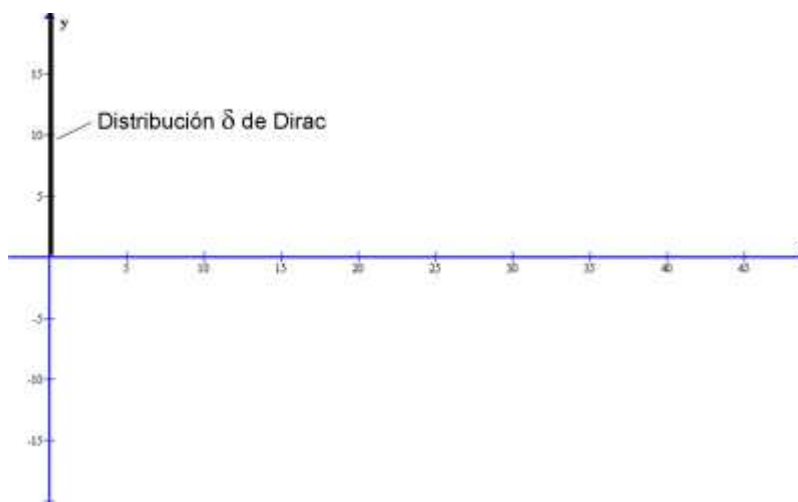


Imagen de elaboración propia

Las respuestas a una señal de entrada, pueden ser de seis modos diferentes que se representan en las gráficas siguientes.

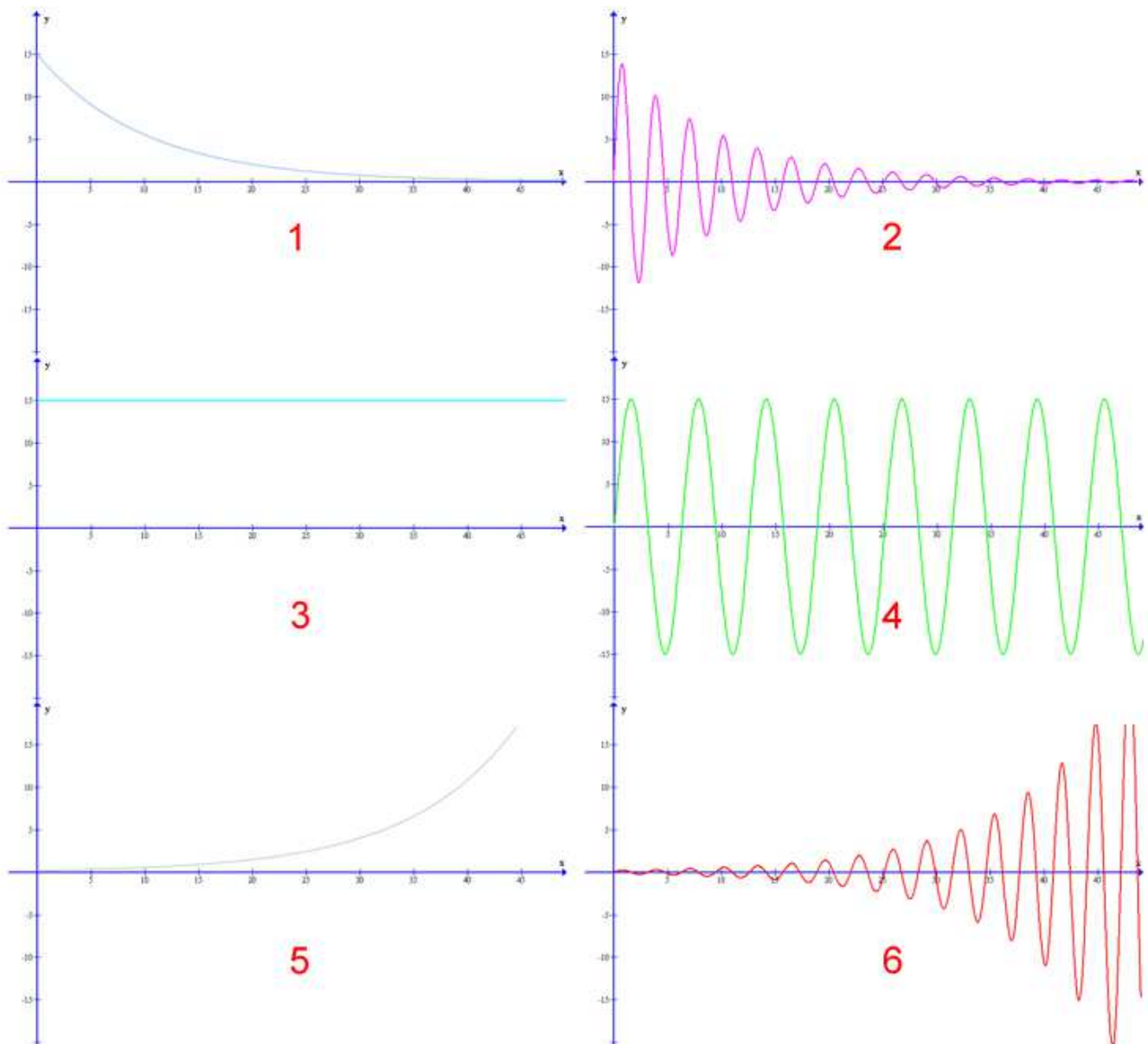


Imagen de elaboración propia

- 1.- Decrecimiento exponencial.
- 2.- Senoide amortiguada exponencialmente.
- 3.- Constante.
- 4.- Senoide de amplitud constante.
- 5.- Incremento exponencial.
- 6.- Senoide incrementada exponencialmente.

Un sistema estable es el que permanece en reposo a no ser que sea excitado por alguna fuente externa, en cuyo caso alcanzará de nuevo el reposo una vez que desaparezcan todas las excitaciones. Por ejemplo las respuestas de los modos 1 y 2 son estables.

Para que un sistema sea estable, es necesario que todas las raíces de la ecuación característica (polos) estén situados en el lado izquierdo del semiplano complejo de Laplace, es decir deben tener parte real negativa.

¡pulsar play

Los polos situados en el origen o sobre el eje imaginario dan lugar a respuestas continuas o constantes que son consideradas inestables.

Los polos en la parte derecha del plano complejo dan lugar a respuestas que crecen con el tiempo y por lo tanto son inestables.

Reflexiona

Supongamos que tenemos dos sistemas de control, en los que:

- Sistema 1, con una ecuación característica con un polo en el valor: $3+2j$
- Sistema 2, con una ecuación característica con un polo en el valor: $-2+3j$

¿son estables?

Mostrar retroalimentación

Multimedia 02. Elaboración propia

3. Análisis de la respuesta de un sistema de regulación



El régimen nominal de funcionamiento de un sistema no se produce instantáneamente tras aplicarle una entrada determinada, si no que transcurre un cierto tiempo, durante el que suceden una serie de fenómenos transitorios. Por lo que se puede diferenciar:

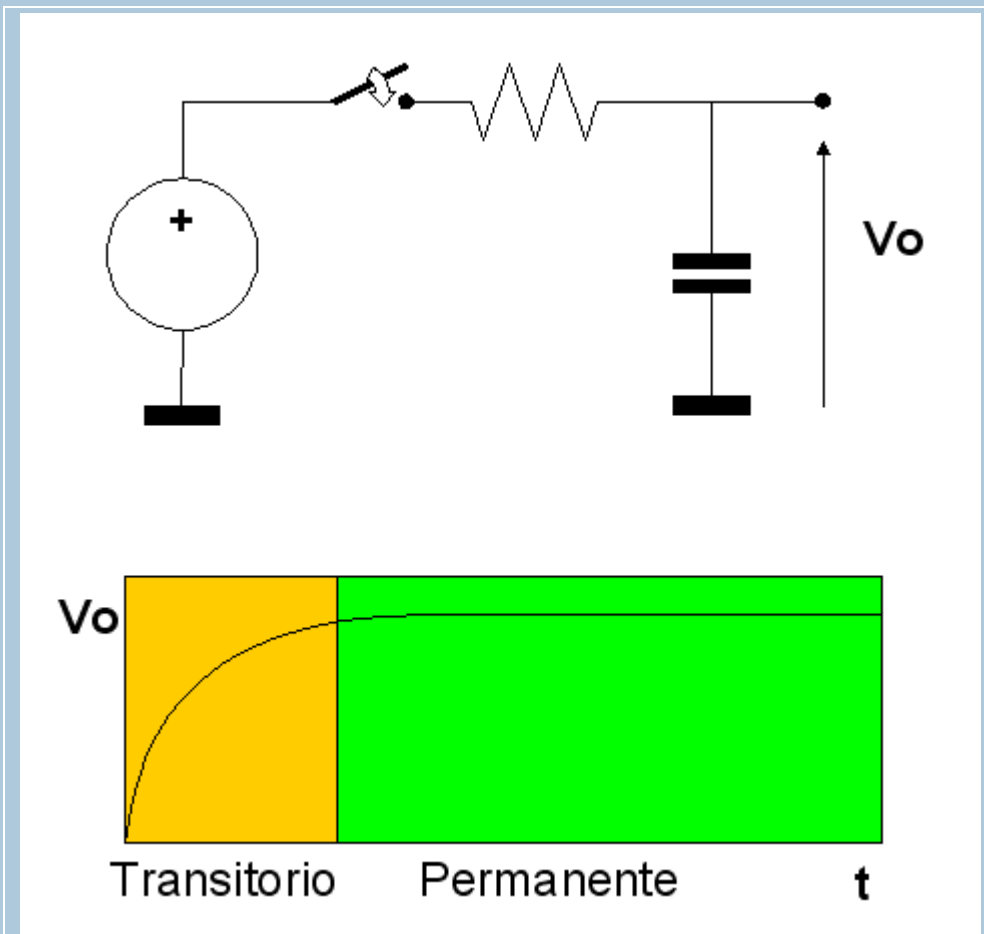
- Régimen transitorio.
- Régimen permanente.

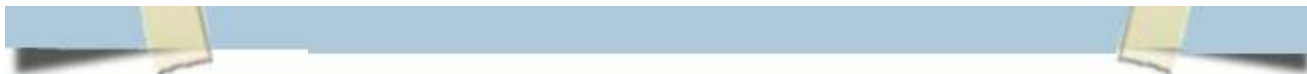
Siendo la respuesta en régimen permanente, la que ofrece el sistema después de que sus variables se hayan estabilizado y ofrezcan un valor de funcionamiento normal.

Mientras, la respuesta transitoria, es la que ofrece el sistema hasta alcanzar la respuesta permanente. Durante el tiempo de respuesta transitoria, presenta sus variables sin estabilizar. Esta parte de la repuesta tiende a anularse a medida que transcurre el tiempo. La respuesta transitoria no debe ser ni brusca ni muy lenta y da una idea de estabilidad y rapidez del sistema, mientras que la respuesta permanente da una idea de la precisión del sistema.

Curiosidad

Esta imagen muestra el transitorio de la respuesta de un circuito RC





4. Estudio de la estabilidad. Método de Routh



Aplicando el criterio de estabilidad de Routh, podremos saber si un sistema de regulación es estable sin necesidad de resolver la **ecuación característica**, es decir sin tener que calcular los polos de la ecuación polinómica sea del grado que sea. lo que simplifica significativamente los cálculos, ya que el criterio de estabilidad de Routh indica si hay o no raíces positivas o con parte real positiva en una ecuación, sin tener que resolverla.

Para que un sistema sea estable la ecuación característica debe cumplir las siguientes premisas:

1. El polinomio en s de la **ecuación característica**, se escribe ordenado.

$$D(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_{n-1} s^1 + a_n s^0$$

El polinomio debe ser completo (todos los coeficientes tienen que ser distintos de cero, $a_n \neq 0$)

2. Si alguno de los coeficientes es nulo o negativo y hay coeficientes positivos, el sistema no es estable
3. Si todos los coeficientes son positivos, con ellos se construye la tabla de Routh, como se indica. Debe tener tantas filas como el número de términos del polinomio de la función característica, se colocan en filas y columnas como sigue: Las dos primeras filas se van llenando con los coeficientes de los monomios de la ecuación característica, alternando la primera fila con la segunda, y así sucesivamente, hasta que se terminan los coeficientes.

Para calcular coeficientes de las siguientes filas de la tabla, se sigue la siguiente pauta.

Tabla de Routh

s^n	a_0	a_2	a_4	a_6	...	
s^{n-1}	a_1	a_3	a_5	a_7	...	
s^{n-2}	b_1	b_2	b_3	b_4	...	$b_i = \frac{a_1 a_{2i} - a_0 a_{2i+1}}{a_1}$
s^{n-3}	c_1	c_2	c_3	c_4	...	$c_i = \frac{b_1 a_{2i+1} - a_1 b_{i+1}}{b_1}$
s^{n-4}	d_1	d_2	d_3	d_4	...	$d_i = \frac{c_1 b_{i+1} - b_1 c_{i+1}}{c_1}$
.	
.	
.	
s^3	v_1	v_2				
s^2	x_1	x_2				$x_i = \frac{v_1 u_{i+1} - u_1 v_{i+1}}{v_1}$
s^1	y_1					$y_1 = \frac{x_1 v_2 + v_1 x_2}{x_1}$
s^0	z_1					$z_1 = x_2$

Imagen de elaboración propia

De la misma forma, vamos calculando las restantes filas, c, d, e, f,... Hasta completar la tabla.

4. El sistema será estable si en la primera columna de la tabla de Routh no existen cambios de signo.

La condición necesaria para que todas las raíces tengan parte real negativa es:

- Que el polinomio esté completo en s, es decir, que todas las potencias en s, desde s^n a s^0 , deben figurar en la ecuación.
- Si algún coeficiente distinto de a_n , es cero, o si hay algún coeficiente negativo, hay varias raíces positivas o raíces imaginarias con parte real positiva y el sistema es inestable.

Para aclarar lo anterior, vamos a verlo con un ejemplo

Reflexiona

Determinar, aplicando el método de Routh, si el sistema es estable.

Mostrar retroalimentación

Pulsar [AQUÍ](#) para ver la solución en PDF

Se pueden presentar dos casos especiales:

- Caso 1. **Un término de la primera columna, en cualquier fila, es 0 y los demás no.**
- Caso 2. **Si todos los coeficientes de la fila son cero**

4.1. Caso especial 1 (M. Routh)



Un término de la primera columna, en cualquier fila, es 0 y los demás no

1. Sustituimos el 0 por un infinitésimo positivo ϵ .
2. Si los signos de los coeficientes que hay por encima y por debajo del cero son del mismo signo, indica que hay dos raíces imaginarias.
3. Si los coeficientes que hay por encima y por debajo son de distinto signo, indica que hay un cambio de signo en el sistema, y por lo tanto es inestable.

Veamos un ejemplo.

Ejercicio resuelto

La función de transferencia de un sistema de control tiene como expresión:

$$G(s) = \frac{s^2 + 5s + 2}{s^3 + 3s^2 + s + 3}$$

Determinar, aplicando el método de Routh, si el sistema es estable.

Mostrar retroalimentación

Pulsar [AQUÍ para ver la solución en PDF](#)

4.2. Caso especial 2 (M. Routh)



Si todos los coeficientes de la fila son cero

Formamos un polinomio auxiliar con los coeficientes de la última fila, lo derivamos y los nuevos coeficientes los ponemos en la fila siguiente.

Ejercicio resuelto

La función de transferencia de un sistema de control tiene como expresión:

$$G(s) = \frac{3s^3 + s^2 + 2s - 3}{s^5 + 2s^4 + 2s^3 + 3s^2 + s + 1}$$

Determinar, aplicando el método de Routh, si el sistema es estable.

Mostrar retroalimentación

Pulsar [AQUÍ](#) para ver la solución en PDF

5. Ejercicios



Ejercicios Resueltos

Para practicar sobre la estabilidad de un sistema de control, te proponemos unos ejercicios, que para poder autoevaluarte están resueltos.

Es preferible que primero leas los enunciados, intentes hacer los ejercicios y si tienes dudas, o para corregirlos mires las soluciones.

Para hacer bien este proceso:

1. [Abre los enunciados](#) de los ejercicios
2. [Abre los ejercicios](#) con sus soluciones

Ejercicios Propuestos

Te proponemos también una serie de ejercicios para que intentes resolverlos sin conocer la solución . [Abrelos pulsando aquí](#).

