



2º de Bachillerato

Tecnología Industrial II

Contenidos

**Circuitos y sistemas lógicos:
Simplificación de funciones lógicas**

Una vez obtenida la función canónica de una expresión lógica, se debe buscar una expresión simplificada de ésta, con el menor número de términos. Con ello se consigue minimizar el número de errores posibles y abarata su implementación.

Existen dos métodos para conseguir simplificar funciones lógicas: la simplificación por el método algebraico y la simplificación por el método de Karnaugh.

Vamos a ver cómo se aplican estos métodos en la simplificación de funciones lógicas.

1. Método algebraico

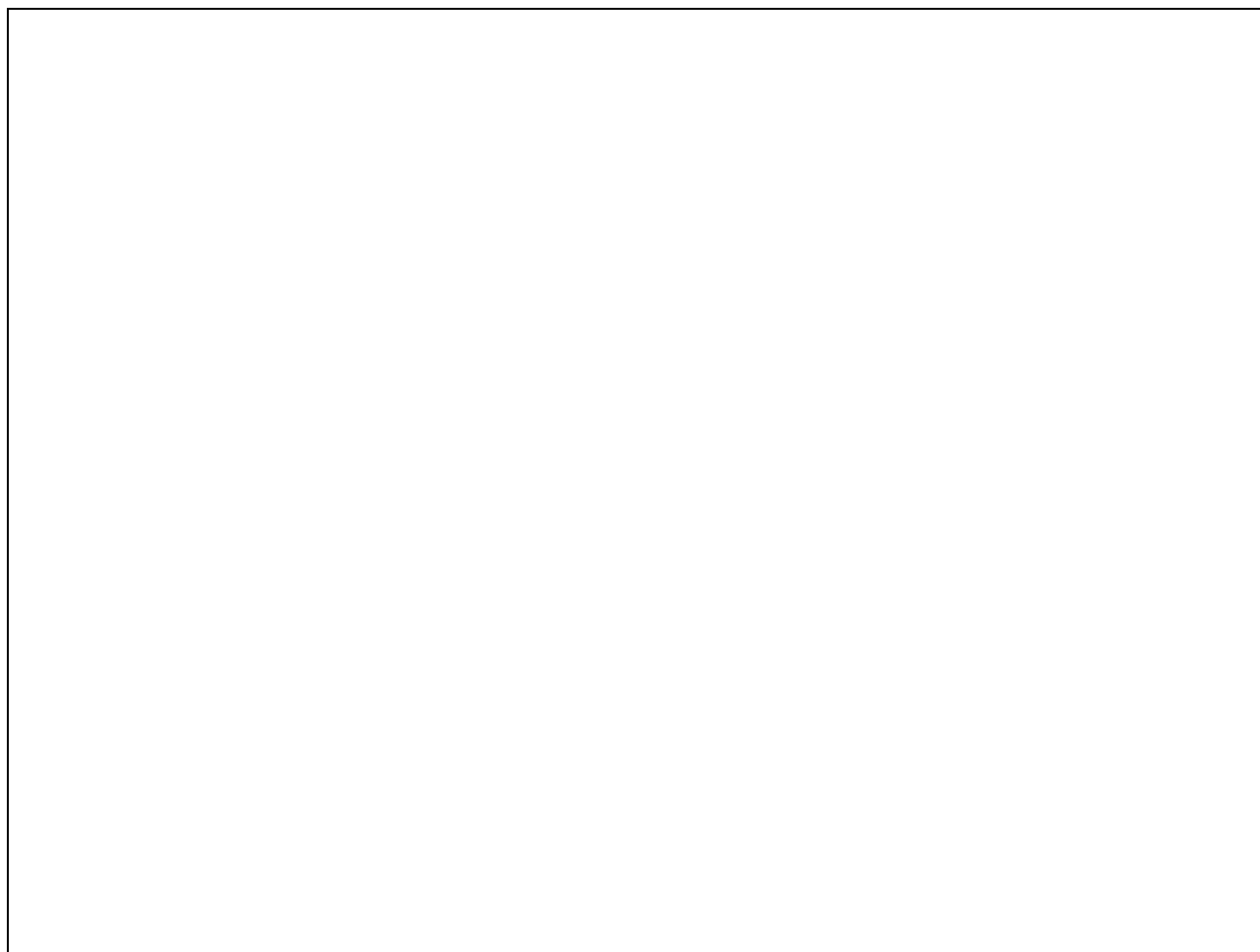


El método algebraico consiste en utilizar todos los postulados, leyes y teoremas del Álgebra de Boole que se han visto en el tema anterior.

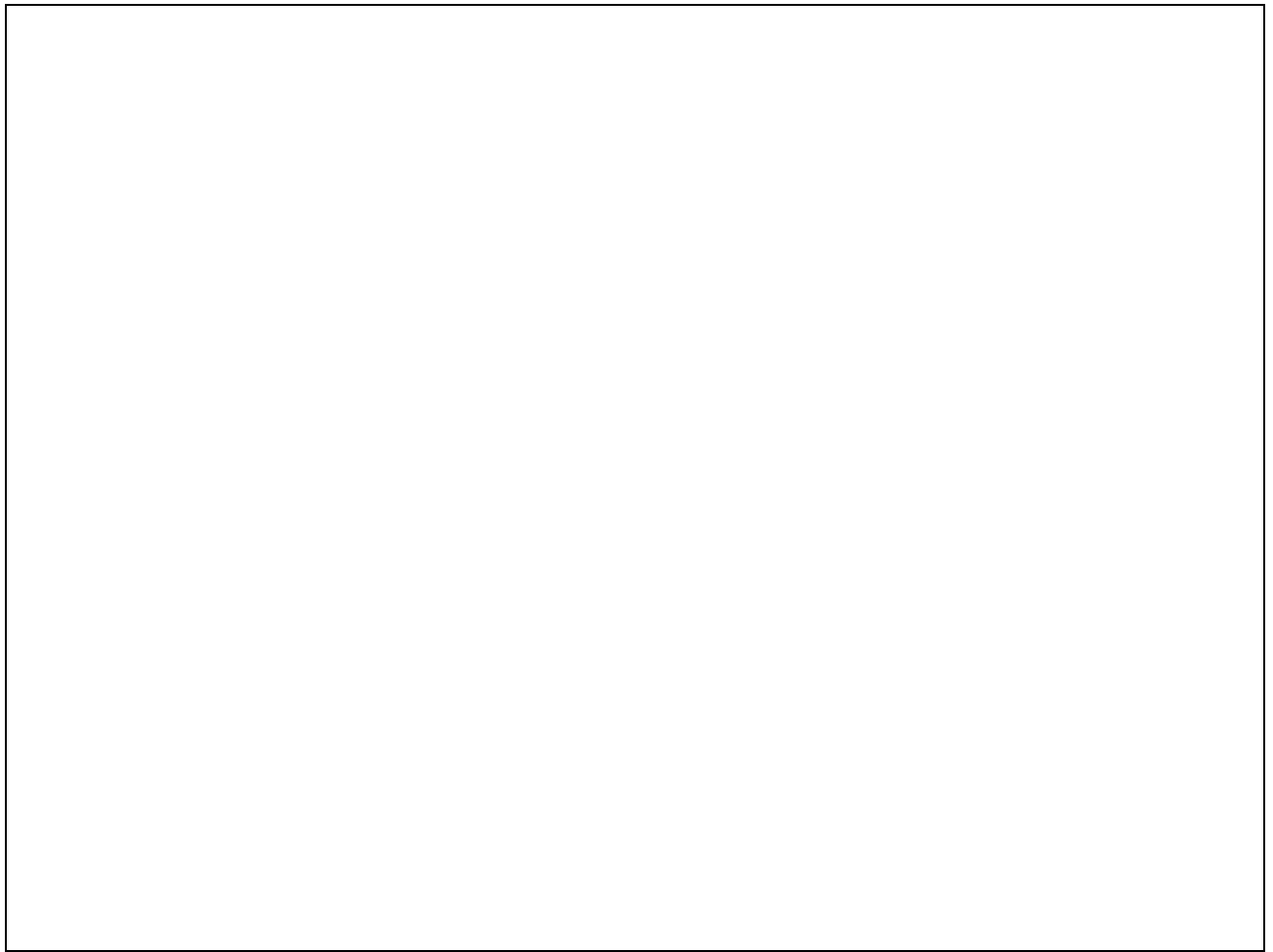
Con este método se consiguen simplificaciones óptimas.

No obstante cuando las funciones tienen una expresión grande el procedimiento algebraico puede provocar el que cometamos errores por ser complejo y pesado de utilizar, sobre todo si quien lo realiza no es un experto.

A continuación, se puede ver un sencillo ejemplo de su uso.



Otro ejemplo de este método es el siguiente:



2. Método de Karnaugh

El método de Karnaugh es un método más rápido y eficaz, sobre todo ante problemas complejos, que el método algebraico.

Se basa en la construcción de unas **tablas** con la característica de que entre cada celda y su contigua o adyacente solamente cambia el valor de una variable de entrada.

En este punto vamos a mostrar el funcionamiento del método de Karnaugh. A continuación se adjuntan los mapas de Karnaugh para tres y cuatro variables, indicando en el interior de cada celda a que combinación de variables de entrada corresponde.

Presta atención a la colocación de las filas de cabecera: **00 01 11 10**

AB C	00	01	11	10
0	ABC	ABC	ABC	ABC
1	$\bar{A}BC$	$\bar{A}BC$	$\bar{A}BC$	$\bar{A}BC$

AB CD	00	01	11	10
00	$AB\bar{C}\bar{D}$	$AB\bar{C}D$	$AB\bar{C}\bar{D}$	$AB\bar{C}D$
01	$AB\bar{C}\bar{D}$	$AB\bar{C}D$	$AB\bar{C}\bar{D}$	$AB\bar{C}D$
11	$ABCD$	$ABCD$	$ABCD$	$ABCD$
10	$ABCD$	$ABCD$	$ABCD$	$ABCD$

Imagen de elaboración propia

Se colocará un 1 en las celdas correspondientes a las combinaciones de las variables de entrada que hacen que la salida sea un 1.

Hay que tener en cuenta que las tablas son contiguas por los flancos extremos, es decir en una tabla de cuatro variables de entrada, las celdas de la columna de la derecha son contiguas a las de la columna de la izquierda, e igualmente ocurre con las casillas de la fila superior y las de la fila inferior.

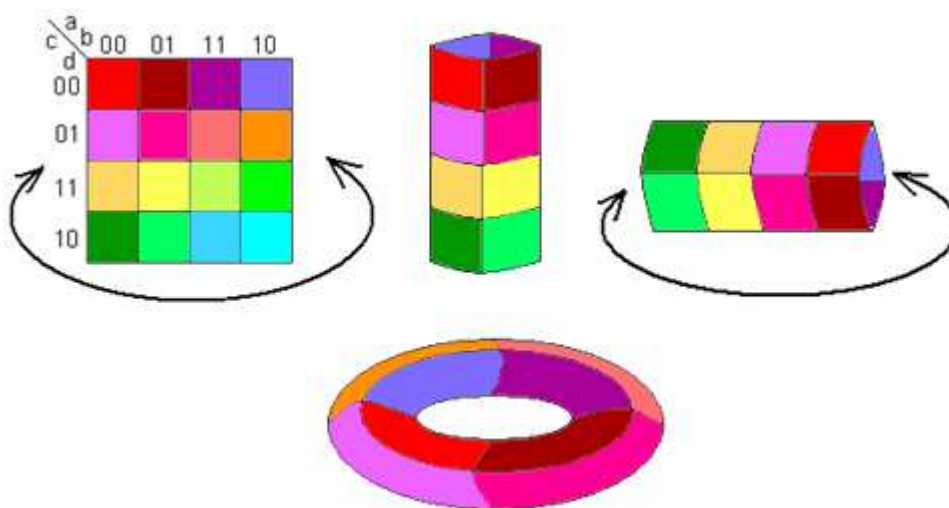


Imagen de elaboración propia

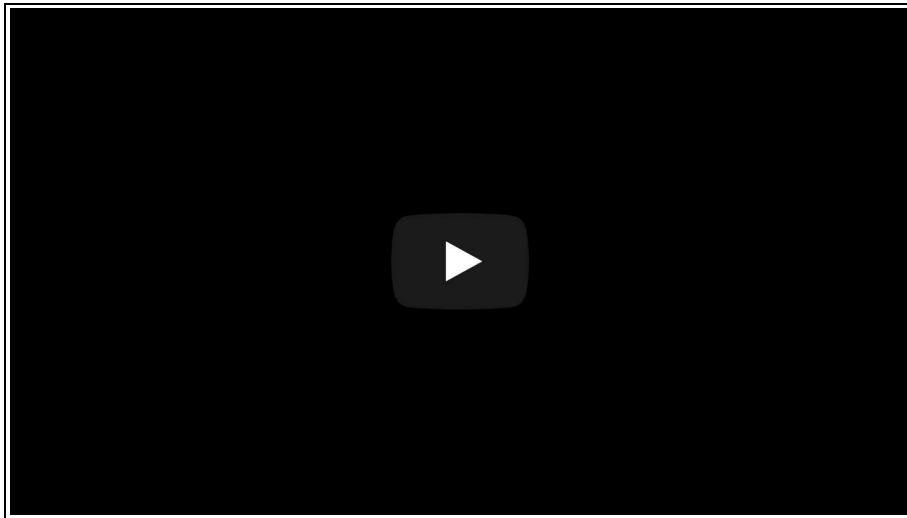
Es decir se puede considerar que se doblan formando un cilindro, como se observa en la figura anterior, y se vuelve a doblar de nuevo formando un toroide.

Las celdas que ocupan los extremos también son adyacentes, por lo anteriormente descrito.

El método se basa en **hacer agrupamientos con el mayor número de celdas posible**, siempre que sean potencias de dos (16, 8, 4, 2), tratando que todas las celdas que contengan 1 pertenezcan a agrupaciones de celdas. Consideraciones:

- Se debe tratar de que no haya celdas comunes a varias agrupaciones, siempre que sea posible. Pero no está prohibido que haya celdas que pertenezcan a más de una agrupación.
- Las agrupaciones serán horizontales y verticales; las diagonales no están permitidas.
- Aunque si están permitidos las verticales y horizontales que lleguen al final de la fila o la columna, y vuelvan a enlazarse otra vez al inicio, o viceversa.
- Se debe procurar que haya el menor número de agrupaciones con el mayor número de unos posible.
- La función simplificada tendrá tantos términos como agrupaciones o bolsas tenga el mapa de Karnaugh.

En el siguiente video se explica detalladamente el método:



En el apartado siguiente se muestran ejemplos de simplificación por el método de Karnaugh.

3. Ejemplos de simplificación por el método de Karnaugh



A continuación se muestran cinco ejemplos correspondientes a tablas de Karnaugh de tres y cuatro variables:

Ejemplo 1. Con 3 variables: $f = ab\bar{c} + abc$

ab \ c	00	01	11	10
0			1	
1			1	

Diagram illustrating the Karnaugh map for $f = ab\bar{c} + abc$. The map shows two 1s in the column where $ab = 11$. A red box groups these two 1s, indicating the term ab . The result is $f = ab$.

Ejemplo 2. Con 3 variables: $f = \bar{a}\bar{b}\bar{c} + \bar{a}bc + a\bar{b}\bar{c} + abc + a\bar{b}c$

ab \ c	00	01	11	10
0		1		
1	1	1	1	1

Diagram illustrating the Karnaugh map for $f = \bar{a}\bar{b}\bar{c} + \bar{a}bc + a\bar{b}\bar{c} + abc + a\bar{b}c$. The map shows four 1s. A red box groups the 1s at $(0,1)$ and $(1,1)$, representing $\bar{a}b$. A blue box groups the 1s at $(1,0)$, $(1,1)$, $(1,1)$, and $(1,0)$, representing a . The result is $f = \bar{a}b + a$.

Ejemplo 3. Con 3 variables: $f = \bar{a}bc + abc + ab\bar{c}$

ab \ c	00	01	11	10
0			1	
1		1	1	

Diagram illustrating the Karnaugh map for $f = \bar{a}bc + abc + ab\bar{c}$. The map shows three 1s. A red box groups the 1s at $(0,1)$ and $(1,1)$, representing bc . A blue box groups the 1s at $(1,0)$ and $(1,1)$, representing ab . The result is $f = bc + ab$.

Ejemplo 4. Con 3 variables: $f = \bar{a}\bar{b}\bar{c} + \bar{a}bc + ab\bar{c} + abc + a\bar{b}\bar{c} + a\bar{b}c$

ab \ c	00	01	11	10
0	1		1	1
1	1		1	1

Diagram illustrating the Karnaugh map for $f = \bar{a}\bar{b}\bar{c} + \bar{a}bc + ab\bar{c} + abc + a\bar{b}\bar{c} + a\bar{b}c$. The map shows six 1s. A blue box groups the 1s at $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, and $(1,1)$, representing \bar{b} . A red box groups the 1s at $(0,1)$, $(1,1)$, $(0,0)$, and $(1,0)$, representing a . The result is $f = \bar{b} + a$.

Ejemplo 5. Con 4 variables:

$$f = \bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d} + \bar{a}b\bar{c}\bar{d} + a\bar{b}\bar{c}\bar{d} + ab\bar{c}\bar{d} + \bar{a}\bar{b}c\bar{d} + \bar{a}b c\bar{d} + a\bar{b}c\bar{d} + ab c\bar{d} + \bar{a}\bar{b}\bar{c}d + \bar{a}b\bar{c}d + a\bar{b}\bar{c}d + ab\bar{c}d + \bar{a}\bar{b}cd + \bar{a}b cd + a\bar{b}cd + ab cd$$

ab \ cd	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

Diagram illustrating the Karnaugh map for the 4-variable function. The map is empty, indicating that the function is identically zero.

Ejercicio resuelto

A partir de la función lógica adjunta:

- Obtener la máxima simplificación posible.
- Implementar la función utilizando cualquier tipo de puertas lógicas de dos entradas.
- Implementar la función empleando únicamente puertas NAND.

$$F = \overline{A}B(\overline{C} + \overline{D}) + BC + \overline{A} \cdot \overline{D}$$

Mostrar retroalimentación

Como podemos ver se trata de una función de cuatro variables de entrada, que no está expresada en forma canónica, en primer lugar vamos a obtener su función canónica, en este caso vamos a utilizar el método de la tabla de verdad, para llegar hasta la función canónica:

A	B	C	D	\overline{A}	\overline{C}	\overline{D}	$A \cdot B$	$\overline{C} + \overline{D}$	$A \cdot B \cdot (\overline{C} + \overline{D})$	$C \cdot B$	$\overline{D} \cdot \overline{A}$	$C \cdot B + \overline{D} \cdot \overline{A}$	F
0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1
0	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1
1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	1
1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	0	0	1
1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1
1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1

Imagen 32. Recurso propio.

Tomando las salidas que generan 1, tenemos:

$$F = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot \overline{D} + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C \cdot \overline{D} + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} \cdot \overline{D} + \overline{A} \cdot B \cdot C \cdot \overline{D} + \overline{A} \cdot B \cdot C \cdot D + A \cdot B \cdot \overline{C} \cdot \overline{D} + A \cdot B \cdot C \cdot \overline{D} + A \cdot B \cdot C \cdot D$$

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	1	
01			1	
11		1	1	
10	1	1	1	

Imagen 33. Recurso propio.

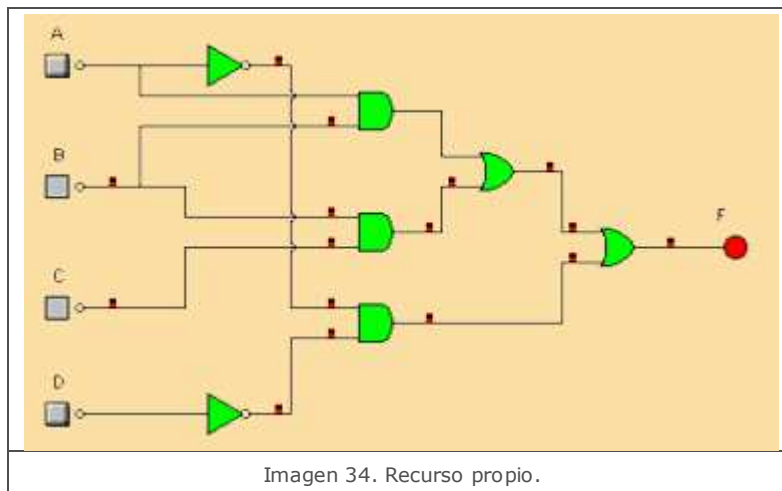
Se pueden hacer tres bolsas de cuatro celdas cada una, con lo que todas las celdas pertenecerán a alguna agrupación, aunque hay alguna celda que pertenece a más de una bolsa.

La función simplificada constará de tantos términos como bolsas hemos tomado para simplificar (3), de dos variables, ya que las bolsas son de $4=2^2$ celdas cada una. (En cada bolsa desaparecen 2 variables).

Se obtiene la función simplificada:

$$F = A \cdot B + \bar{A} \cdot \bar{D} + B \cdot C$$

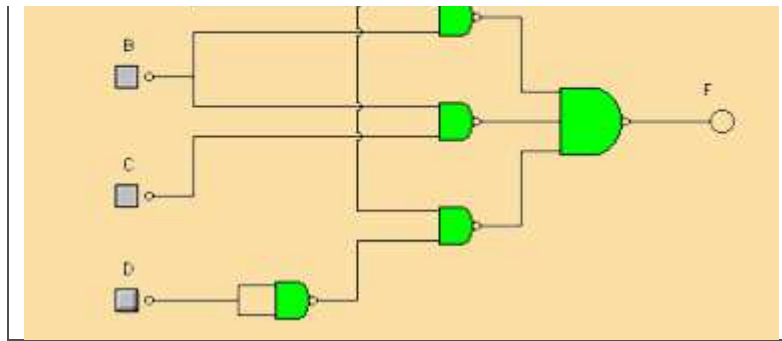
Que una vez implementada quedaría:



Para implementarlo empleando únicamente puertas NAND de dos entradas, se debe negar dos veces la función y aplicar el teorema de Morgan a una de las negaciones con lo que se obtiene la expresión:

$$F = \overline{\overline{A \cdot B + \bar{A} \cdot \bar{D} + B \cdot C}} = \overline{\overline{A \cdot B} \cdot \overline{\bar{A} \cdot \bar{D} + B \cdot C}}$$

Que una vez implementada quedará:



4. Términos indiferentes



En ocasiones, en algunos problemas lógicos, hay combinaciones de las variables de entrada que no se pueden producir, o bien el valor que tome la función para esas combinaciones de las entradas es indiferente para la salida, en ese caso en la tabla de verdad en vez de poner en la salida un 1 o un 0, se pone una x y al simplificar por el método de Karnaugh se considera que el valor es un 1 o un 0 según lo que más favorezca para simplificar. Vamos a verlo con un ejemplo.

Ejercicio resuelto

Sea un número inferior a diez codificado en binario.

- Obtén la tabla de verdad de la función $F = \leq 5$ (menor o igual de cinco), y escribe su función canónica.
- Simplifica la función obtenida por el método de Karnaugh.

Mostrar retroalimentación

- En primer lugar escribimos la tabla de verdad del problema:

Vamos a utilizar una tabla de cuatro bits.

decimal	A	B	C	D	S	decimal	A	B	C	D	S
0	0	0	0	0	1	8	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	9	1	0	0	1	0
2	0	0	1	0	1	10	1	0	1	0	x
3	0	0	1	1	1	11	1	0	1	1	x
4	0	1	0	0	1	12	1	1	0	0	x
5	0	1	0	1	1	13	1	1	0	1	x
6	0	1	1	0	0	14	1	1	1	0	x
7	0	1	1	1	0	15	1	1	1	1	x

Imagen 35. Recurso propio.

La función tomará el valor 1 en la salida cuando el número introducido es inferior o igual a cinco. Tomará el valor 0 cuando sea mayor que cinco.

A pesar de que existen las combinaciones de entrada correspondientes a los números entre diez y quince, estos valores no se darán nunca, ya que el enunciado del problema limita los datos hasta el decimal diez, por lo tanto a estas combinaciones de las variables de entrada se les asigne el valor x en la salida y se llaman términos indiferentes.

- Por lo tanto el mapa de Karnaugh será:

00	1	1	X	
01	1	1	X	
11	1		X	X
10	1		X	X

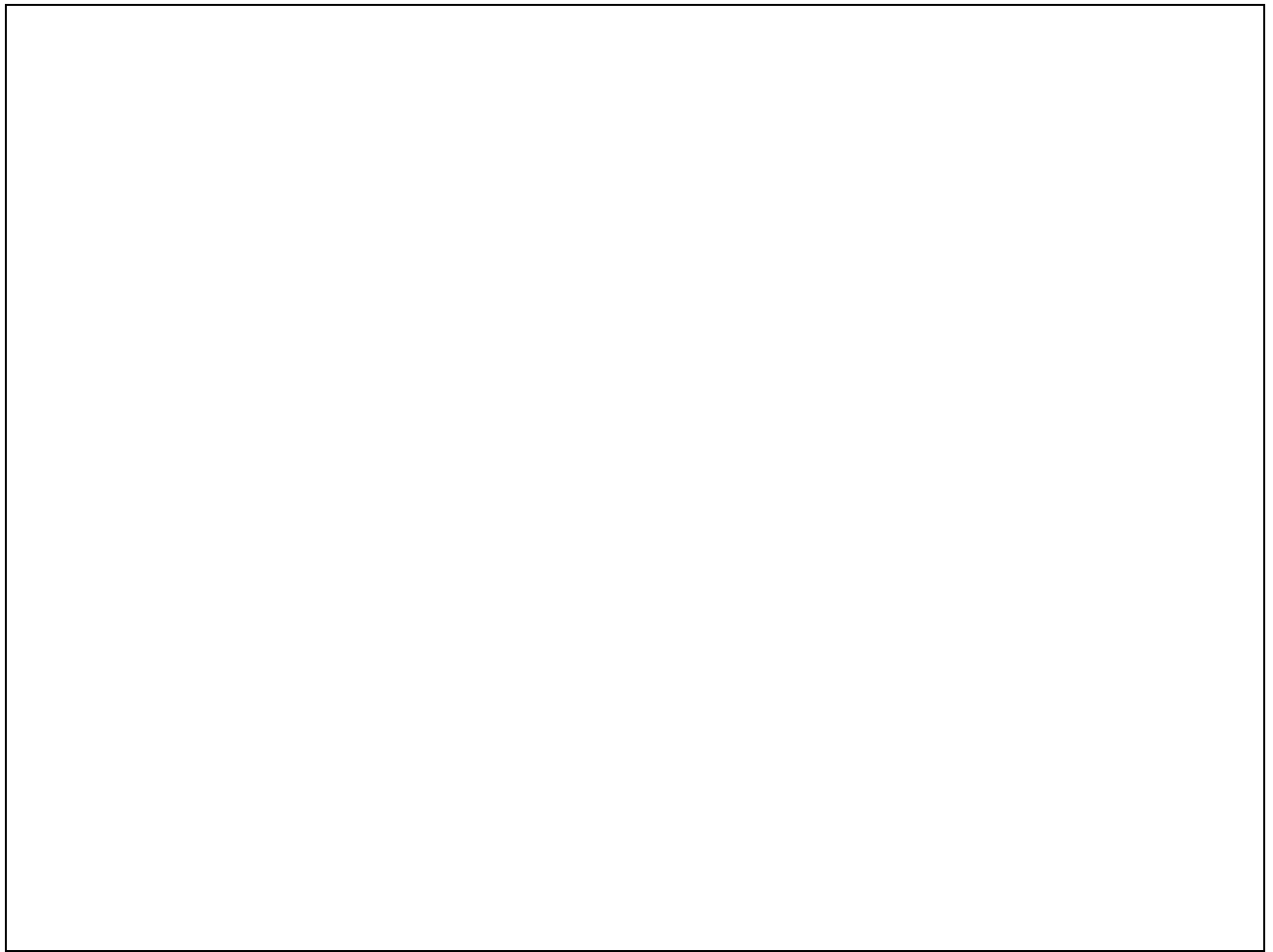
Imagen 37. Recurso propio.

En él se han representado las celdas que generan salidas 1 y x. De todas éstas, las que están situadas en la columna de la derecha las trataremos como si fuesen 1, porque de este modo favorecen la simplificación de la función, mientras que las demás celdas a las que hemos asignado el valor x, nos interesa tratarlas como 0, porque así se favorece la simplificación.

Obteniéndose la función:

$$F = \overline{A} \cdot \overline{C} + \overline{B} \cdot C$$

Otro ejemplo de simplificación donde aparecen términos indiferentes es el que se plantea a continuación:



Importante

Una vez obtenida la función canónica de una expresión lógica, se debe buscar una expresión simplificada de ésta, con el menor número de términos. Con ello se consigue minimizar el número de errores posibles y abarata su implementación.

Existen dos métodos para conseguir simplificar funciones lógicas.

Simplificación por el método algebraico:

Consiste en utilizar todos los postulados, leyes y teoremas enunciados anteriormente. Con este método se consiguen simplificaciones óptimas, pero hay que tener cierta práctica, no obstante cuando las funciones tienen una expresión grande el procedimiento algebraico puede provocar el que cometamos errores por ser complejo y pesado de utilizar, sobre todo si quien lo realiza no es un experto.

Simplificación por el método de Karnaugh:

Más rápido y eficaz, sobre todo ante problemas complejos. El método se basa en la construcción de unas tablas con la característica de que entre cada celda y su contigua o adyacente solamente cambia el valor de una variable de entrada.

Uf. Tenemos problemas para encontrar ese sitio.



No podemos conectar al servidor en adistancia.ced.junta-andalucia.es.

Si esa dirección es correcta, aquí hay otras tres cosas que puede probar:

- Vuelva a intentarlo más tarde.
- Compruebe su conexión de red.
- Si está conectado a través de un cortafuegos, compruebe que Firefox tiene permiso para acceder a la web.

Reintentar