Números reales. Aplicaciones: Las cuentas del dinero II

En las imágenes siguientes, tienes bancos, dinero, cheques, hasta el dios del dinero Prambanan (Jogyakarta, Indonesia). En este tema continuamos con las cuentas del dinero, seguiremos hablando de ahorro y préstamos pero a largo plazo.

Fotografías en ISFTIC bajo CC

Fotografía en superlowpricedhouses bajo CC

¿Quieres montar un negocio?, ¿comprar una casa?, ¿irte de vacaciones?, ¿hacer unas reformas?, o ¿quizás un vehículo?

A todos nos pasa, **necesitamos dinero** .

Cuando nos ocurre esto, lo normal es acudir a un banco, caja de ahorro u otra entidad de crédito y solicitar un préstamo.

Nos lo conceden, 18.000 €, por ejemplo. Pero, como es lógico tenemos que pagarlo. Y es aquí donde hay que tener especial cuidado.

Podemos pagarlo por meses, trimestral, anual de 12 pagos o 14 pagos..., podemos decir que como mucho quiero pagar de una vez 300 €, o que como mucho quiero pagarlo en 5 años,...

En este apartado del tema vamos a tratar todas estas cuestiones. **Pagar** un préstamo se llama **amortizar** un préstamo.

Ejercicio resuelto

Nos han concedido el préstamo de 18.000 € que debemos amortizar (pagar) en 24 meses (dos años) con 24 pagos idénticos a mes vencido. El banco nos lo ha concedido a un interés del 12%.

El banco nos hace firmar un contrato en el que observamos que debemos pagar una mensualidad de 847 ¿Es esta cantidad la correcta? ¿Cómo calcularlo?

Fotografía de vivenuevayork bajo CC

Curiosidad

Fíjate la de operaciones que conlleva este simple préstamo y si te acuerdas de Marina, en TODAS ellas, todos los recortes a céntimos iban a su cuenta.

¿Ves como granito a granito se hace la montaña?

Fotografía en anunicototal bajo CC

En el apartado anterior te habrás quedado pensando ¿cómo se calculan los 847, que dice el banco que voy a pagar?

En este apartado vamos a razonarlo y lo vas a entender.

Te pongo al día con el ejemplo que se ha planteado anteriormente:

Capital concedido (C): 18.000 €

Tanto por ciento (r): 12 %

Tiempo (t): 2 años

Mensualidad: (m) : ?

Lo que vas a ver a continuación es lo que produce una mensualidad **m** al 1% mensual durante el tiempo que lo tiene el banco, desde 0 a 23.

$$m \longrightarrow (1mes) \longrightarrow m \bullet 1{,}01$$
$$m \longrightarrow (2meses) \longrightarrow m \bullet 1{,}01^2$$
$$m \longrightarrow (3meses) \longrightarrow m \bullet 1{,}01^3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$m \longrightarrow (23meses) \longrightarrow m \bullet 1{,}01^{23}$$
$$18.000 \longrightarrow (24meses) \longrightarrow 18.000 \bullet 1{,}01^{24} = 22855$$

Sumando nos sale:

$$m + m \cdot 0.1 + m \cdot (0.1)^2 + \ldots + m(0.1)^{23} = 22.855$$

y despejando queda:

$$m = 18.000 \cdot \frac{(1+\frac{12}{1200})^{24}}{(1+\frac{12}{1200})^{24}-1} \cdot \frac{12}{1200} = 847$$

¡No te asustes!, te doy la fórmula, solo tienes que sustituir los números por las letras que le hemos asignado. En el apartado 2.2. se incluye un " *Para saber más*" en el que te explicamos cómo se obtendría esta fórmula.

Importante

Fórmula de **mensualidad** para amortizar un préstamo

$$m = C \cdot \frac{(1+\frac{r}{1200})^t}{(1+\frac{r}{1200})^t - 1} \cdot \frac{r}{1200}$$

$t \longrightarrow meses$

$C \longrightarrow capital\ prestado$

$r \longrightarrow \%$

$m \longrightarrow mensualidad$

Reflexiona

Así no se hace

Doña Isabel hizo el siguiente cálculo: 18.000 · 0,12=2.160 € al año (ha aplicado el 12% a la cantidad pedida). Como son dos años, pensó, serán 4.320. Al banco debo pagar 18.000+4.320= 22.320 en 24 meses. Dividiendo 22.320 entre 24 se obtiene una cuota mensual de 930 €.

¿Por qué no coinciden?

Comprueba lo aprendido

Dí si son verdaderos o falsos los argumentos que te expongo:

Doña Isabel tiene razón.

○

Falso

No ha tenido en cuenta que cada mes que paga los intereses son menores.

Verdadero

Falso

La deuda va disminuyendo conforme se hacen efectivas las mensualidades.

Verdadero

Falso

Por supuesto que existen créditos cuya amortización se hace año a año. Como en el apartado anterior vamos a suponer que los 18.000 € que hemos pedido lo pagamos en dos años, pero con la amortización anual.

Para que te hagas una idea, si el préstamo se nos hace efectivo el 1 de diciembre de 2010 la 1ª anualidad se paga el 30 de noviembre de 2011 y la segunda el mismo día de 2012.

Fotografía en stuartrealtor bajo CC

Capital concedido (C): 18.000 €

Tanto por ciento (r): 12 %

Tiempo (t): 2 años

Anualidad (a) : ?

Recuerda esta formula para la **mensualidad:**

$$m = C \cdot \frac{(1+\frac{r}{1200})^{t}}{(1+\frac{r}{1200})^{t}-1} \cdot \frac{r}{1200}$$

$t \longrightarrow meses$

$C \longrightarrow capital\ prestado$

$r \longrightarrow \%$

$m \longrightarrow mensualidad$

Observa ésta otra para la **anualidad:**

$$a = C \cdot \frac{(1+\frac{r}{100})^{t}}{(1+\frac{r}{100})^{t}-1} \cdot \frac{r}{100}$$

Sólo se diferencia en que, **r** (tanto por ciento) **se divide por 1.200** , **si es mes** a mes **o por 100** , **si es año** a año. Eso sí ¡CUIDADO! t, en este caso, son AÑOS

Ejercicio resuelto

Importante

Si saldamos la deuda de 18.000 con dos pagos de **10.650,56** € son **21301,12 €** , lo que supone que hemos pagado al banco **3301,12 €** de intereses.

¿Recuerdas qué intereses se pagó saldando el préstamo con mensualidades? Te lo recuerdo.

24 mensualidades de 847 € ello supone (multiplicando por 24)=20328 €, y por tanto **2328 €.**

¿Por qué esa diferencia?

Comprueba lo aprendido

Los intereses son mayores cuando pagamos la deuda año a año que mes a mes.

- ○ Verdadero
- ○ Falso

Al pagar la deuda mes a mes, el capital se va reduciendo y por tanto los intereses son más pequeños

- ○

Falso

A los bancos le da igual cómo sea la devolución, ganan de todas formas.

Verdadero

Falso

Comprueba lo aprendido

Ahora haz tú las dos actividades que siguen

Julián pide un préstamo de 100.000 € para la compra de una vivienda. Si el interés anual es del 5% y se ha de devolver en 25 años. ¿Cuánto debe pagar cada año?

7.095,25 €

4.000 €

7.000 €

Ninguna de las anteriores es correcta.

Julián pide un préstamo de 100.000 € para la compra de una vivienda. Si el interés anual es del 5% y se ha de devolver en 25 años haciendo pagos mensuales. ¿Cuánto debe pagar cada mes?

333,33 €

600 €

Aproximadamente 7.095 €.

Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

Fotografía en ISFTIC bajo CC

Fuente propia

Es habitual que una familia necesite ahorrar para comprarse una vivienda o que nos planteemos asegurarnos la pensión para el día de la jubilación.

Los planes de pensiones son operaciones de capitalización en la que el interesado ingresa una cantidad de dinero cada cierto tiempo de modo que, cuando llegue su jubilación, dispondrá del total de las cantidades abonadas y los intereses generados.

Las cuentas ahorro vivienda son operaciones de capitalización que se realizan para sufragar en el futuro parte del coste de una vivienda. La duración de estas operaciones, como norma general, es inferior a la de los planes de jubilación.

Fotografía en ISFTIC bajo CC

Las **operaciones de capitalización** son operaciones financieras en las que el interesado entrega un determinado capital cada cierto período de tiempo, de modo que, al finalizar la operación de capitalización se dispone de un capital igual a la suma de las cantidades aportadas más los intereses producidos por cada una de las aportaciones.

Por ejemplo: una persona puede hacer una cuenta vivienda, y entrega cada mes una cantidad de dinero y cuando pasen los años establecidos tendrá en su cuenta el dinero que ha ido entregando más los intereses que dicho dinero ha producido.

Cuando el periodo de entrega de dinero a la operación de capitalización es anual se habla de **anualidad de capitalización** .

Ejercicio resuelto

ANUALIDADES DE CAPITALIZACIÓN.

En primer lugar, nos planteamos la idea de crear un fondo de capitalización. Para eso cada determinado período de tiempo, en este caso, cada año entregaremos una cierta cantidad de dinero durante varios años. Así, pensemos que vamos a aportar ***a*** euros, durante ***t*** años, a un interés compuesto del ***r* %** anual. ¿Cuánto dinero tendremos al final de los *t* años?

Vamos a plantearlo con un ejemplo: Jorge, con 60 años, abre en un banco un plan de pensiones. Al comienzo de cada año y hasta la edad de su jubilación, a los 65 años, aportará 1.000 €, siendo el interés del 6 % anual.

¿Qué capital habrá acumulado cuando se jubile?

PRINCIPIO DEL:	APORTA:	FINAL DEL:	CAPITAL ACUMULAD

(60 AÑOS)	1.000 €	año	$= 1.000 + 1000 \cdot 0{,}06 = 1.000 \cdot (1$ $C = 1.000 \cdot 1{,}06 = 1.060$ €.

Observa que al capital aportado hemos sumado los intereses ger por ese dinero durante el año. Es muy importante que te fijes er operación se resume en multiplicar el dinero que tenemos al p del período (en este caso los 1.000 € aportados) por 1,06 (es más el resultado de dividir el interés anual entre 100).

Segundo año (61 AÑOS)	1.000 €	Segundo año	$C = (1.060 + 1.000) \cdot (1 + 0{,}06)$ $C = 2.060 \cdot 1{,}06 = 2183{,}6$ €

De nuevo hemos multiplicado la cantidad acumulada al princi período (los 1.060 € ahorrados más los 1.000 € de la nueva apoı por 1,06.

Tercer año (62 AÑOS)	1.000 €	Tercer año	$C = (2.183{,}6 + 1.000) \cdot (1 + 0{,}06)$ $C = 3.183{,}6 \cdot 1{,}06 = 3.374{,}62$ €
Cuarto año (63 AÑOS)	1.000 €	Cuarto año	$C = (3.374{,}62 + 1.000) \cdot (1 + 0{,}0$ $C = 4.374{,}62 \cdot 1{,}06 = 4.637{,}10$
Quinto año (64 AÑOS)	1.000 €	Quinto año (Final de la operación)	$C = (4.637{,}10 + 1.000) \cdot (1 + 0{,}06$ $C = 5637{,}10 \cdot 1{,}06 = 5.975{,}33$

Por tanto, al finalizar la operación se encuentra con 5.975,3 fundamental que observes que en cada paso hemos multipli capital acumulado por 1,06 (1+0,06).

Comprueba lo aprendido

Una familia abre una cuenta de ahorro vivienda para dentro de 5 años comprarse su casa. Piensan aportar a su cuenta 5.000 € cada año. ¿Qué capital tendrán ahorrado al finalizar esta operación si el interés es del 6 % anual?

- 25.000 €
- 29.876,59 €
- 26.500 €
- Ninguna de las anteriores es correcta.

En el punto anterior hemos obtenido el dinero que habría acumulado Jorge, pero haciendo el proceso completo, año a año. Si fuesen muchos años esto nos complicaría bastante el proceso, ¿no?

Fuente propia

Fuente propia

Reflexionemos sobre otro ejemplo:

Ejercicio resuelto

El hijo de Jorge, viendo que su padre ha conseguido un capital final bastante pequeño en el momento de jubilación, decide hacerse un plan de pensiones desde joven. Ahora tiene 25 años y se plantea aportar 500 € cada año, hasta su jubilación (a los 65 años), en una entidad financiera, en la que le ofrecen un 4 % de interés anual.

En la siguiente tabla, iremos desarrollando la situación planteada, pero a la vez, intentaremos sacar conclusiones que nos puedan servir para cualquier caso. Se trata de encontrar un modelo que nos permita encontrar el capital que obtendremos al final sin hacer el recorrido por todos los años que dure la operación de capitalización. Este modelo sería: Se aportan ***a*** euros, durante ***t*** años, a un interés compuesto del ***r %*** anual.

¿Cuánto dinero tendremos al final de esos *t* años?

AÑO	EJEMPLO	GENERALIZA(
Primer año	Aporta 500 € y a final de año tiene: $C=500\cdot(1+0{,}04)=500\cdot 1{,}04=520$ €	Aporta *a* € y a final c tiene: $C=a\cdot(1+\frac{r}{100})=a\cdot(1+$

Recuerda que para obtener el capital acumulado a final de un pe
con multiplicar el dinero disponible al principio del mismo por 1 m
en tanto por uno (es decir, el interés dividido por 100). Aquí, hen

Segundo año	Aporta 500 € y a final de año tiene: $C=(520+500)\cdot(1{,}04)=1.060{,}8$	Aporta *a* € y a final c tiene: $C=(a\cdot(1+i)+a)\cdot(1+i$ $C=a\cdot(1+i)^2+a\cdot(1+i$
Tercer año	Aporta 500 € y a final de año tiene: $C=(1.060{,}8+500)\cdot1{,}04=1.623{,}23$ €	Aporta *a* € y a final c tiene: $C=(a\cdot(1+i)^2+a\cdot(1+$ $C=a\cdot(1+i)^3+a\cdot(1+i$ €

Insistimos en hacer notar que siempre, en cada paso, al capital a sumamos la aportación periódica y multiplicamos por 1+ *i* .

Observa la expresión teórica que da el capital en cada paso (f sumandos que tiene, tantos como el número del período, y en los de (1+ *i*)).

Claro, seguir con este proceso hasta el final de esta operación (qu años) sería demasiado laborioso y pesado. Convendría tener un para obtener el resultado sin hacer el cálculo todos los años.

Tras 40 años	¿Qué capital tendrá este joven pasados los 40 años?. Va intentar razonarlo sobre nuestro desarrollo teórico.
	Sabemos que el capital acumulado será la suma de lo ap los intereses generados. Si nos fijamos en lo que ha ocu 3 primeros años, la *fórmula* para el capital acumulado *t* años sería:

$$C=a\cdot(1+i)^t+a\cdot(1+i)^{t-1}+.....+a\cdot(1+i)^3+a\cdot(1+i)^2+$$

TRAS *t* *AÑOS*	Como comentábamos antes, ha de tener *t* sumanc hablamos de *t* años (todos los sumandos con el factor y el primer sumando lleva el factor (1+ *i*) elevado al años (*t*), el segundo a *t* -1, y así, bajando de expor quedarse en 1+ *i* .
	Sin embargo, pensarás que si no se lo que hay en suspensivos cómo voy a sumar. No te preocupes, utilizando propiedades de las progresiones geométric necesitas conocer (pero que podrás estudiar si lo dese saber más...") se llega a la siguiente fórmula, que r hacer el cálculo deseado:

$$C=\frac{a\cdot[(1+i)^{t+1}-(1+i)]}{i}$$

APORTACIÓN PERIÓDICA:	INTERÉS ANUAL:	TIEMPO:
$a = 500$ €	$r = 4\%$	$t = 40$ años

$$i=\frac{r}{100}=\frac{4}{100}=0{,}04$$

$$C=\frac{500\cdot[(1+0{,}04)^{41}-(1+0{,}04)]}{0{,}04}$$

$$C=\frac{500\cdot[1{,}04^{41}-1{,}04]}{0{,}04}=\frac{500\cdot[4{,}99-1{,}04]}{0{,}04}$$

$$C=\frac{500\cdot 3{,}95}{0{,}04}=\frac{1975}{0{,}04}=49.375$$

Importante

Por lo tanto, para calcular el capital final después de t años de ahorro con un interés i, utilizamos la fórmula:

$$C=\frac{a\cdot[(1+i)^{t+1}-(1+i)]}{i}$$

donde a es la anualidad.

Ejercicio resuelto

Recordemos la operación de capitalización realizada por Jorge. Con 60 años abrió en un banco un plan de pensiones. Al comienzo de cada año y hasta la edad de su jubilación, a los 65 años, aportará 1.000 €, siendo el interés del 6 % anual.

¿Qué capital habrá acumulado cuando se jubile?

Comprueba lo aprendido

Realizamos una operación financiera consistente en ingresar 400 € al principio de cada año, durante 15 años, con un tipo de interés del 5%. ¿De qué capital dispondremos al cabo de los 15 años?

- 6.000 €
- Aproximadamente, 12470 €.
- 9.063 €
- 9500 €

Para saber más

Progresiones Geométricas.

Una **progresión geométrica** es una sucesión de números en la que cada término es igual al anterior multiplicado por un número fijo llamado razón de

a) 2, 4, 8, 16, 32, ... (cuya razón es 2).

b) 27, 9, 3, 1, $\frac{1}{3}$, ... (cuya razón es $\frac{1}{3}$).

Se llama término general de una progresión geométrica a una expresión que te permite hallar un término cualquiera de la progresión. Este término se obtiene con la fórmula:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

En los ejemplos anteriores:

a) En esta sucesión $a_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$. Y así, el vigésimo término de esta sucesión sería: $a_{20} = 2^{20} = 1.048.576$.

b) En este caso $a_n = 27 \cdot (\frac{1}{3})^{n-1} = \frac{27}{3^{n-1}} = \frac{3^3}{3^{n-1}} = 3^{4-n}$. Y el octavo término será: $a_8 = 3^{4-8} = 3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$

En una progresión geométrica es posible obtener la suma de *n* términos consecutivos de la misma. La expresión que nos permite obtener esta suma es:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (r^n - 1)}{r - 1}$$

Si nos planteamos la suma de los 10 primeros términos de la progresión geométrica 2, 4, 8, 16, 32, ... $S_{10} = \frac{2 \cdot (2^{10} - 1)}{2 - 1} = \frac{2 \cdot 1.023}{1} = 2.046$.

Utilizando la expresión anterior, de la suma de los *n* términos de una progresión geométrica, se obtiene la expresión que nos da el capital acumulado en una operación de capitalización.

En el siguiente enlace puedes ampliar más sobre progresiones aritméticas y geométricas .

Ejercicio resuelto

Fuente propia

Marina, nuestra joven trabajadora de banca, se encontró una vez con un cliente que le planteó la siguiente situación: "Si abro una cuenta vivienda para poder pagar dentro de 6 años 60.000 euros de entrada en la compra de mi casa, ¿cuánto debo ingresar cada año con el interés de 4,5% que me ofreces?".

Marina, aunque ladrona, sabe de su trabajo, y rápidamente hizo los cálculos. Veamos su razonamiento.

Capital final que deseamos tener:
C = 60.000 €.

Interés: R = 4,5%

Tiempo: t = 6 años

$$C = \frac{a\cdot[(1+i)^{t+1} - (1+i)]}{i}$$

Despejando *a:*

$$a = \frac{C\cdot i}{(1+i)^{t+1} - (1+i)}$$

Aportación periódica: a = ?

$$a = \frac{C\cdot i}{(1+i)^{t+1} - (1+i)} = \frac{60.000\cdot 0,045}{1,045^{7} - 1,045} = \frac{2.700}{1,361 - 1,045} = \frac{2.700}{0,316} = 8.544,3$$

La aportación anual a esta cuenta vivienda debe ser de 8.544,3 €

Comprueba lo aprendido

Una señora inicia un plan de pensiones, su deseo es tener 40.000 € dentro de 25 años, que es cuando desea empezar a disfrutar del mismo. Ha encontrado un banco que le ofrece un interés del 5%, ¿cuánto debe aportar cada año para conseguir su objetivo?.

- 17.718 €
- 2.400 €
- 2000 €
- Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

Curiosidad

¿Sabías que existen hipotecas inversas?

Se llama **hipoteca inversa** a un producto bancario en el que una persona ingresa una cantidad de dinero en una entidad bancaria. La entidad, a cambio, le abona una cantidad fija anual (o con el acuerdo de periodicidad que se fije) durante el resto de su vida. Lo de llamarle hipoteca es debido a que en muchos casos lo que se entrega no es una cantidad de dinero sino la vivienda, para poder percibir en compensación un renta.

En todos los ejemplos que hemos hecho sobre operaciones de capitalización hemos supuesto que las aportaciones se hacían anualmente (anualidades). No obstante, esto no tiene que ser necesariamente así. Los pagos pueden hacerse mensualmente, trimestralmente, semestralmente,... Veamos unos ejemplos para aprender a adaptarnos a estas situaciones.

Ejemplo 1.: (Haz clic sobre la presentación para avanzar)

Fuente propia

Ejemplo 2: (haz clic sobre la presentación para avanzar)

Fuente propia

Comprueba lo aprendido

Contesta las dos cuestiones:

Mariano ingresa 3.000 euros semestralmente en un fondo. La entidad financiera le da un 4 % de interés. ¿Qué capital tendrá al cabo de 5 años?

- 30.000 €

- 16.898,93 €.

33.506,15 €

40.000 €

Una familia desea disponer de 80.000 € dentro de 10 años. Han encontrado un banco que le ofrece un interés del 6% anual haciendo aportaciones bimestrales. ¿De cuánto debe ser cada pago bimestral?.

969,86 €.

1.333,33 €

Aproximadamente, 5.725 €.

Ninguna de las anteriores es correcta.

Para saber más

Es posible también, sabiendo la cantidad que queremos aportar en cada período, el capital que se desea obtener al final y el interés anual, determinar el número de períodos necesarios, es decir, el tiempo que debemos estar pagando.

Veámoslo en un ejemplo: ¿Cuántos años debe estar Manuel aportando dinero a un fondo si piensa hacer aportaciones anuales de 4.000 euros a un interés anual del 3% y quiere obtener un capital final de 50.000 euros?

Bueno, con fórmula

$$50.000 = \frac{4.000\cdot[(1+0,3)^{t+1}-(1+0,03)]}{0,03}$$

=> $$50.000 = \frac{4.000\cdot[(1,3)^{t+1}-(1,03)]}{0,03}\ ,$$

y despejando,

$$1,03^{t+1}-1,03 = \frac{50.000\cdot 0,03}{4.000}$$

$$1,03^{t+1} = \frac{50.000\cdot 0,03}{4.000}+1,03 = 1,405$$

y tomando logaritmos:

$$log(1,03^{t+1}) = log(1,405)$$

=> $$(t+1)\cdot log(1,03) = log(1,405)$$

de donde: $t = \frac{log(1,405)}{log(1,03)}-1 = 10,5$ años.

Habrás observado que necesitamos del uso de logaritmos , si no recuerdas esta operación, puedes recurrir al enlace que te ponemos de la wikipedia.