Aritmética: Capitalización y amortización

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I

1º Bachillerato

Contenidos

Aritmética

Capitalización y amortización

1. Introducción

En este tema vamos a estudiar operaciones financieras más complejas. En el tema anterior, estudiamos qué intereses producía un determinado capital depositado a un cierto tiempo y con un porcentaje de rendimiento determinado. Pero, ¿qué ocurre si yo voy haciendo depósitos o ingresos mes a mes? ¿Y si es el banco el que me presta el dinero a mí? ¿Qué interés se lleva? ¿Qué riesgos tengo al contratar cualquiera de estos productos? ¿Puedo perder mi dinero?

Por desgracia, noticias como la siguiente son cada vez más frecuentes:


EL PAÍS MADRID

ANDALUCÍA CATALUÑA C. VALENCIANA GALICIA MADRID PAÍS VASCO MÁS COMUNIDADES TITULARES »

Condenada Bankia por vender preferentes a una mujer de 80 años enferma de alzheimer

La juez dice que es imposible que la clienta entendiera la información facilitada por la entidad bancaria

Captura de pantalla de una noticia elpais.com del 23/04/2017

Uno de los principales problemas que tenemos al contratar un producto financiero es la desinformación sobre los requisitos y exigencias que conlleva. Normalmente, estos contratos vienen acompañados de riesgos, cláusulas, obligaciones y comisiones que desconocemos.

Los productos financieros los podemos englobar en tres grandes categorías:

Productos de ahorro **Productos de inversión** **Productos de financiación**



Iconos en Freepik . Licencia CC.

¿Qué buscamos nosotros en este tipo de productos?

Si buscas **rentabilizar** tu dinero, necesitas un producto de ahorro o un producto de inversión. La principal diferencia entre ellos es que con los primeros mantenemos nuestro poder adquisitivo y con los segundos podemos aumentarlo pero corriendo ciertos riegos.

En el caso de productos de financiación buscamos que nos presten dinero al **menor coste** posible.

¿En qué debemos fijarnos para tomar la decisión?

El primer paso es saber qué buscamos, y ser conscientes de nuestra situación presente y futura (si vamos a necesitar el dinero que invirtamos, si tenemos un trabajo estable para poder hacernos cargo de una hipoteca...)

Otro factor a tener en cuenta, en el caso de los productos de ahorro o inversión, es saber hasta qué punto estamos dispuestos a asumir riesgos.

2. Financiación

Podemos distinguir 3 tipos de productos de financiación:

- Préstamo personal
- Hipotecas
- Tarjetas de crédito

Imagen de mohamed_hassan en Pixabay. Licencia CC

Un **préstamo personal** (crédito) es el producto financiero básico de financiación. Podemos encontrar muchos tipos diferentes según sea la finalidad del dinero solicitado. Así podemos encontrar préstamos para comprar un coche, para un viaje... El tipo de interés de un crédito oscila, normalmente, entre el 6%-12% aunque dependiendo de la finalidad, de las condiciones y del importe que solicitemos puede variar bastante.

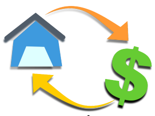

Imagen de OpenClipArt-Vectors en Pixabay. Licencia CC

Las **hipotecas** son un producto financiero enfocado exclusivamente a la compra de vivienda. Debido al alto coste de una vivienda es realmente complicado que una persona tenga ahorrado en su totalidad por lo que le es necesario solicitar una hipoteca. Una hipoteca es un crédito, con un tipo de interés más bajo que un préstamo personal debido a que se responde con el bien hipotecado. Esto se compensa por la cantidad de dinero solicitada, muy superior a la de un préstamo personal y por los años de duración de la hipoteca, que como mínimo es de 10-12 años y puede alcanzar hasta los 35 años. Algunas veces incluso más.

Imagen de Memed_Nurrohmad en Pixabay. Licencia CC

Y acabamos con las **tarjetas de crédito**. Este tipo de producto financiero nos permite acceder al dinero sin trámites, simplemente usando la tarjeta de crédito. Este es su principal beneficio, la inmediatez con la que podemos tener el dinero, sin embargo, esto se equilibra con los altos tipos de interés que una tarjeta de crédito tiene, en el caso de querer financiar nuestra compra. En las tarjetas de crédito el interés puede llegar hasta ser el doble que en un préstamo personal. Existen también **tarjetas de fidelización**, como por ejemplo, la del Corte Inglés, Carrefour... que sin ser tarjetas bancarias, nos pueden ofrecer condiciones de financiación muy ventajosas, como pagar en 12 meses sin intereses. Con esto los comercios se aseguran que el cliente recurra a ellos para realizar sus compras.

2.1 ¿En qué consiste?

Cuando queremos adquirir un producto, podemos pagarlo al contado (con dinero en efectivo) o recurrir a otras fórmulas de pago relacionadas con terceros, por lo general, con entidades bancarias o de crédito. Si recurrimos a este segundo modelo, decimos que estamos financiando nuestra compra.

Hay muchos productos de financiación, dependiendo por lo general del producto que queramos adquirir (no es lo mismo una casa que un coche que un electrodoméstico), el plazo en el que lo queramos pagar, incluso qué estamos dispuestos a pagar.

Pero todos ellos tienen algo en común:

Importante

En un producto de financiación, **siempre se paga en función de lo que se debe.** Desde el punto de vista financiero, se entiende por **amortización** el reembolso gradual de una deuda.

¿Cómo funciona la devolución de un préstamo?

En cualquier préstamo intervienen tres factores clave: el capital prestado, el tipo de interés al que se presta y el plazo de amortización. Estas tres variables combinadas, nos ayudan a dibujar nuestro cuadro de amortización, que detalla mes a mes la composición de la cuota.

- Capital prestado: es el dinero total que recibimos como clientes.
- Tipo de interés: es el precio de acceder a ese dinero. El tipo de interés puede ser fijo (nunca cambia) o variable (evoluciona en función de un índice de referencia, que suele ser el euríbor).
- Plazo de amortización: el tiempo que tenemos para devolver el préstamo.

La amortización de préstamos se suele calcular en España por el método francés, que consiste en que el cliente siempre pagará la misma cuota mensual durante toda la vida del préstamo. Por supuesto, esto depende del tipo de interés que se escoja –a tipo fijo o variable- y de las posibles condiciones bajo las que se contrate el préstamo; por ejemplo, algunas entidades ofrecen préstamos cuya cuota mensual es menor durante los primeros años del préstamo.

De cualquier forma, esa cuota mensual siempre estará compuesta de dos elementos: el capital que nos han prestado y que estamos devolviendo, y los intereses que pagamos por ese dinero.

Importante

Un **cuadro de amortización** es una tabla en la que podemos ver cómo evoluciona nuestra deuda mes a mes, con el pago de las cuotas, y comprobar que los intereses que pagamos por el capital que hemos solicitado representan cada mes que pasa una parte menor de la cuota, en proporción a lo que nos resta de devolver del préstamo.

En este punto conviene resaltar que **el coste de un préstamo es mayor cuanto más tiempo se tarda en devolver ese dinero**, ya que se pagan intereses por más tiempo. Pero veámoslo todo de manera más clara con el siguiente ejemplo.

Caso práctico

Nos han concedido el préstamo de 18.000 € que debemos amortizar (pagar) en 24 meses (dos años) con 24 pagos idénticos a mes vencido. El banco nos lo ha concedido a un interés del 12%.

El banco nos hace firmar un contrato en el que observamos que debemos pagar una mensualidad de 847 ¿Es esta cantidad la correcta? ¿Cómo calcularlo?

El primer mes: Los 18.000 € del primer mes paga de interés 1%, que es el resultado de dividir 12% anual entre los 12 meses de un año, por tanto,

18.000·0,01 = 180 €, le debemos al banco 17333 € que es el resultado de restar a (18.000+180)-847.

El segundo mes: Volvemos a hacer la misma operación 17333·0,01 = 173 €de intereses y 847 de pago quedaría (17333+173)-847=16659 €

A continuación puedes ver el cuadro completo de amortización y como va evolucionando a lo largo de los 24 meses.

Cuadro completo de amortización

Periodo actual	Periodos pendientes	Préstamo vivo	mensualidad	interés del periodo	cuota amortización
0	24	18.000	847	180	667
1	23	17.333	847	173	674
2	22	16.659	847	167	681
3	21	15.978	847	160	688
4	20	15.290	847	153	694
5	19	14.596	847	146	701
6	18	13.895	847	139	708
7	17	13.186	847	132	715
8	16	12.471	847	125	723
9	15	11.748	847	117	730
10	14	11.018	847	110	737
11	13	10.281	847	103	745
12	12	9.537	847	95	752
13	11	8.785	847	88	759
14	10	8.025	847	80	767
15	9	7.258	847	73	775
16	8	6.483	847	65	782
17	7	5.701	847	57	790
18	6	4.911	847	49	798
19	5	4.112	847	41	806
20	4	3.306	847	33	814
21	3	2.492	847	25	822
22	2	1.670	847	17	831
23	1	839	847	8	839

¿Qué debemos tener en cuenta la contratar un producto de financiación?

Aunque en los productos de financiación, también hay riesgos como hemos visto en la presentación anterior (puede aumentarnos el tipo de interés en las revisiones y se nos pueden disparar los intereses), pero los principales problemas surgen con las condiciones que tenemos que cumplir para que nos den un préstamo:

<u>1.- Comisiones</u>

La **comisión** es la cantidad que se cobra por realizar transacciones comerciales que corresponden a un porcentaje sobre el importe de la operación, por lo que dependerá de la cantidad de dinero que debamos.

- Comisión de apertura, es la cantidad de dinero que la entidad financiera cobra al formalizar el préstamo, y en base o justificación a cubrir los gastos administrativos y de gestión del préstamo.
- Comisión de cancelación parcial, es la cantidad de dinero que la entidad financiera cobra cada vez que usted desea amortizar (anticipar) parte del capital pendiente del préstamo hipotecario.
- Comisión de cancelación total, si llegado el momento decidimos saldar nuestra deuda estamos hablando de una cancelación o amortización total de nuestro préstamo, y la comisión puede variar de la parcial.
- Comisión por cuota pendiente, es el recargo que se le aplica a una cuota si no se paga en el momento establecido. Estas comisiones pueden ir aumentando dependiendo del tiempo trascurrido desde que tenía que haberse hecho el cobro.

2.- Obligaciones

A la hora de darnos un préstamo o una hipoteca, los bancos ponen sus condiciones, por lo que pueden exigirte la contratación de alguno de sus productos como: seguros de vida, de desempleo, plan de pensiones, apertura de cuentas de ahorro, traspaso de nómina... Estos pequeños detalles pueden suponer un gran gasto anual o mensual.

También es frecuente, encontrarnos estas contrataciones ligadas a descuentos en los tipos de interés.

3.- Cláusulas

Las cláusulas son las condiciones del contrato.

Quizás recientemente hayas escuchado hablar de las cláusulas suelo, o del suelo de una hipoteca. Estos términos hacen referencia a una cláusula que establece un porcentaje mínimo a pagar en las cuotas de la hipoteca, aunque el interés surgido de la suma del índice de referencia y el diferencial sea inferior. Quizás hayas escuchado que se están devolviendo las cláusulas suelo y que son ilegales, pero solo en los casos de falta de transparencia y desinformación.

Curiosidad

Desde 2016...

Adiós a las comisiones por cancelación a partir del sexto año de hipoteca

» Dado que el recargo por cancelación suele estar en el 1%, supone un ahorro de 1.200 euros para un préstamo tipo de 120.000 euros

Captura de una noticia de ABC del 02/08/2016

Para saber más

Sistemas de amortización

A la hora de devolver un préstamo, es importante tener en cuenta el sistema de amortización que vamos a emplear para devolverlo puesto que pueden diferir en gran medida los tipos de interés que se pagarán en total.

Aunque en España el sistema más utilizado es el Sistema de amortización francés, cuyas cuotas son siempre de la misma cuantía, existen otros sistemas que merece la pena conocer:

https://docs.google.com/presentation/d/1NCR4ZKlK7m0394e8w7AqoOAtmyUbuOoLm3m0Yd8jrG0/embed?start=false&loop=false&delayms=3000

Presentación de elaboración propia.

Para saber más

Cuadro de amortización con hoja de cálculo

En el siguiente vídeo puedes ver cómo se realiza el cuadro de amortización de un préstamo por el sistema francés:

Enlace a recurso reproducible >> https://www.youtube.com/embed/QY1PvNeG6tk

Vídeo créditosrápidos alojado en Youtube

2.2 Cálculo de las cuotas

Cuotas mensuales

En el apartado anterior te habrás quedado pensando ¿cómo se calculan los 847, que dice el banco que voy a pagar?

En este apartado vamos a razonarlo y lo vas a entender.

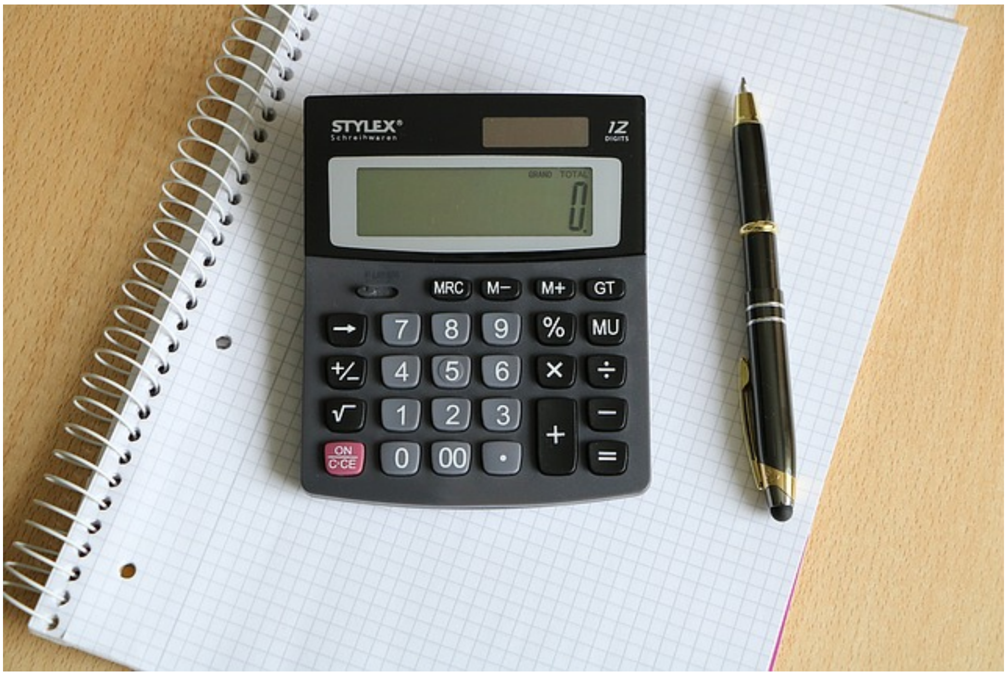

Imagen de 22594 en Pixabay. Licencia CC

Tomemos los datos utilizamos anteriormente:

Capital concedido (C): 18.000 €

Tanto por ciento (r): 12 %

Tiempo (t): 2 años

Mensualidad: (m) : ?

Lo que vas a ver a continuación es lo que produce una mensualidad **m** al 1% mensual durante el tiempo que lo tiene el banco, desde 0 a 23.

$$
\begin{array}{l}
m \longrightarrow (1 mes) \longrightarrow m \bullet 1{,}01 \\
m \longrightarrow (2 meses) \longrightarrow m \bullet 1{,}01^{2} \\
m \longrightarrow (3 meses) \longrightarrow m \bullet 1{,}01^{3} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
m \longrightarrow (23 meses) \longrightarrow m \bullet 1{,}01^{23} \\
18.000 \longrightarrow (24 meses) \longrightarrow 18.000 \bullet 1{,}01^{24} = 22855
\end{array}
$$

Sumando nos sale:

$$m + m \cdot 0.1 + m \cdot (0.1)^2 + ... + m(0.1)^{23} = 22.855$$

y despejando queda:

$$m = 18.000 \cdot \frac{(1+\frac{12}{1200})^{24}}{(1+\frac{12}{1200})^{24}-1} \cdot \frac{12}{1200} = 847$$

Importante

Fórmula de mensualidad para amortizar un préstamo

$$m = C \cdot \frac{(1+\frac{r}{1200})^{t}}{(1+\frac{r}{1200})^{t}-1} \cdot \frac{r}{1200}$$

$t \longrightarrow meses$

$C \longrightarrow capital\ prestado$

$r \longrightarrow \%$

$m \longrightarrow mensualidad$

Reflexiona

Imagina el siguiente cálculo:

18.000 · 0,12=2.160 € al año (ha aplicado el 12% a la cantidad pedida).

Como son dos años, pensó, serán 4.320. Al banco debo pagar 18.000+4.320= 22.320 en 24 meses. Dividiendo 22.320 entre 24 se obtiene una cuota mensual de 930 €.

¿Por qué no coinciden?

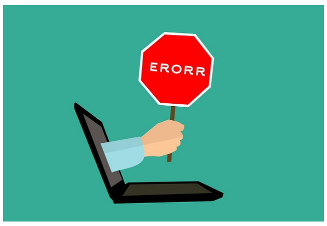

Imagen de mohammed_hassan en Pixabay. Licencia CC.

Se están pagando más intereses de los que corresponden, ya que el capital amortizado deja de generar intereses.

Cuotas anuales

Por supuesto que existen créditos cuya amortización se hace año a año. Como en el apartado anterior vamos a suponer que los 18.000 € que hemos pedido lo pagamos en dos años, pero con la amortización anual.

Para que te hagas una idea, si el préstamo se nos hace efectivo el 1 de diciembre de 2010 la 1ª anualidad se paga el 30 de noviembre de 2011 y la segunda el mismo día de 2012.

Capital concedido (C): 18.000 €

Tanto por ciento (r): 12 %

Tiempo (t): 2 años

Anualidad (a) : ?

Importante

La anualidad de un préstamo se calcula a través de la siguiente fórmula:

$$a = C \cdot \frac{(1+\frac{r}{100})^t}{(1+\frac{r}{100})^t - 1} \cdot \frac{r}{100}$$

Sólo se diferencia en que, **r** (tanto por ciento) **se divide por 1200**, si es mes a mes **o por 100**, si es año a año.

Eso sí ¡CUIDADO! **t**, en este caso, son AÑOS

Caso práctico

Calculemos la anualidad de este préstamo.

Los valores a sustituir son:

$$C=18.000;\ r=12\%;\ t=2$$
$$a=18.000\bullet\frac{(1+\frac{12}{100})^2}{(1+\frac{12}{100})^2-1}\bullet\frac{12}{100}=10650{,}56$$

Hacemos dos pagos (anuales) de 10650,56 €

Si saldamos la deuda de 18.000 con dos pagos de **10.650,56** € son **21.301,12 €**, lo que supone que hemos pagado al banco **3.301,12 €** de intereses.

¿Recuerdas qué intereses se pagó saldando el préstamo con mensualidades? Te lo recuerdo:

> 24 mensualidades de 847 € ello supone (multiplicando por 24)=20.328 €, y por tanto (le quitamos 18.000): **2.328 €.**

¿Por qué esa diferencia?

Comprueba lo aprendido

Los intereses son mayores cuando pagamos la deuda año a año que mes a mes.

○ Verdadero

○ Falso

Correcto!

Vuelve a mirar el ejemplo anterior

Solución

1. Opción correcta
2. Incorrecto

Al pagar la deuda mes a mes, el capital se va reduciendo y por tanto los intereses son más pequeños

- ○ Verdadero
- ○ Falso

Correcto, cuando le prestes a alguien de tu familia.... que se note que ya no te pueden timar.

Piénsalo bien

Solución

1. Opción correcta
2. Incorrecto

A los bancos le da igual cómo sea la devolución, ganan de todas formas.

- ○ Verdadero
- ○ Falso

¡Correcto!. Bueno yo no he visto ningún banco rico, quizás algunos banqueros.

Piénsalo bien

Solución

1. Opción correcta
2. Incorrecto

Comprueba lo aprendido

Una persona pide un préstamo de 100.000 € para la compra de una vivienda. Si el interés anual es del 5% y se ha de devolver en 25 años. ¿Cuánto debe pagar cada año?

- 7.095,25 €
- 4.000 €
- 7.000 €
- Ninguna de las anteriores es correcta.

Correcto. $a = \frac{100.000 \cdot (1+0,05)^{25} \cdot 0,05}{(1+0,05)^{25} - 1} = 7.095,25$ €

Ten en cuenta que debes pagar intereses, no sólo el capital pedido.

Repasa la expresión utilizada y las operaciones.

Repasa la expresión utilizada y las operaciones.

Solución

1. Opción correcta
2. Incorrecto
3. Incorrecto
4. Incorrecto

Al final dicha persona se decanta por un préstamo con las mismas condiciones pero haciendo pagos mensuales. ¿Cuánto debe pagar cada mes?

- 333,33 €
- 600 €
- Aproximadamente 7.095 €.
- Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

Repasa la explicación y los cálculos, pero es posible que sólo hayas tenido en cuenta el capital y no los intereses.

Repasa los cálculos y la explicación.

Repasa la explicación y los cálculos, pero es posible que haya utilizado anualidades en vez de mensualidades.

Muy bien. Ya que la respuesta es: $m=\frac{100000\cdot(1+\frac{5}{1200})^{25\cdot 12}\cdot\frac{5}{1200}}{(1+\frac{5}{1200})^{25\cdot 12}-1}=584{,}59$ €

Solución

1. Incorrecto
2. Incorrecto
3. Incorrecto
4. Opción correcta

3. Capitalización

Icono de Madebyoliver en Flaticon. Licencia CC

Productos financieros de ahorro

Son productos financieros enfocados a acumular el dinero que vamos ahorrando, frecuentemente mes a mes. A cambio recibimos un beneficio en forma de intereses. Es un producto ideal para mantener nuestro poder adquisitivo ya que el tipo de interés que ofrecen es muy similar a la inflación.

En general podemos encontrar dos tipos de productos financieros de ahorro:

- Cuentas de ahorro
- Depósitos a plazo fijo

En los primeros, podemos disponer de nuestro dinero en cualquier momento, mientras que en los segundos, nos comprometemos a tener nuestro dinero depositado durante un período de tiempo, y, generalmente, debemos pagar una comisión si retiramos el dinero antes de finalizar el plazo de imposición. A cambio el tipo de interés que ofrecen los depósitos a plazo fijo es superior al de las cuentas de ahorro. Se puede decir que las cuentas de ahorro están dirigidas al ahorro a corto plazo mientras que los depósitos a plazo fijo son para dinero que queramos tener guardado a medio-largo plazo.

Icono de Freepick en Flaticon. Licencia CC

Productos financieros de inversión

Son también operaciones financieras de capitalización. Si lo quieres es que tus ahorros ganen poder adquisitivo, es decir, que obtengan una rentabilidad superior, entonces tienes que usar alguno de los productos financieros de inversión.

Como parte negativa, en los productos de inversión podemos perder parte del capital invertido, algo mucho más difícil que ocurra en los productos de ahorro, donde el riesgo es muy bajo.

De estos productos hay muchos tipos aunque básicamente podemos encontrar 2:

- Fondos de inversión
- Planes de pensiones

Un fondo de inversión es un instrumento de ahorro que reúne a un gran número de personas que quieren invertir su dinero. El fondo pone en común el dinero de este grupo de personas y una entidad gestora se ocupa de invertirlo (cobrando comisiones por ello) en una serie de activos como pueden ser acciones.

La diferencia entre los planes de pensiones respecto a los fondos de inversión es que es un producto financiero enfocado exclusivamente a la jubilación, con importantes deducciones fiscales.

Sin embargo, hay que indicar que los planes de pensiones tienen importantes inconvenientes. La rentabilidad media es bastante baja y en muchos casos no supera a la inflación, al utilizar el dinero invertido en el plan de pensiones se pagan en casi su totalidad los impuestos que antes nos habíamos deducido y, por último, presentan comisiones de gestión bastante elevadas.

3.1 ¿En qué consiste? ¿Qué tener en cuenta?

Es habitual que una familia necesite ahorrar para comprarse una vivienda o que nos planteemos asegurarnos la pensión para el día de la jubilación.

Vivienda
Imagen de Free-Photos en Pixabay. Licencia CC

Importante

Las **operaciones de capitalización** son operaciones financieras en las que el interesado entrega un determinado capital generalmente en períodos de tiempo regulares, de modo que, al finalizar la operación de capitalización, se dispone de un capital igual a la suma de las cantidades aportadas más los intereses producidos por cada una de las aportaciones.

¿Qué debemos tener en cuenta al contratar un producto de este tipo?

Lo más importante es conocer el riesgo financiero del producto que estamos contratando.

Importante

El **riesgo financiero** se refiere a la probabilidad de ocurrencia de un evento que tenga consecuencias financieras negativas para una organización.

Luego lo más importante a la hora de contratar un producto de este tipo es valorar el riesgo que tiene y saber cómo minimizarlo. En la siguiente presentación puedes ahondar en esta información:

https://docs.google.com/presentation/d/1tfNZ4GQ2Dpkk50n9dIvtofHQe1_g63dBzdZ3Ht5MRnM/embed?start=false&loop=false&delayms=3000

Presentación propia.

Curiosidad

¿En qué consiste una estafa piramidal?

Bernard Madoff es el responsable de la mayor estafa de la historia de Wall Street, del mayor fraude cometido por una sola persona en el mundo. Su legado: un fraude de 50.000 millones de dólares (cinco veces el de Enron, por ejemplo), grandes instituciones financieras y grandes fortunas afectadas en todo el mundo (también en España, con cientos de millones de euros invertidos), toques de atención a los que nadie hizo caso durante años... ¿Cómo lo consiguió? Con una estafa piramidal que la mayoría tomó como una buena inversión. En el siguiente vídeo lo explican claramente y con humor:

Enlace a recurso reproducible >> https://www.youtube.com/embed/yUM7UYp65qc

Vídeo de LeopoldoAbadía en **Youtube**

Para saber más

Fondo de Garantías de Depósito de Entidades de Crédito

Cuando una entidad bancaria sufre una crisis que le impide afrontar sus compromisos con los clientes, estos pueden recuperar hasta 100.000 euros por depositante gracias al Fondo de Garantía de Depósitos.

FGD Fondo de Garantía de Depósitos de Entidades de Crédito

Todas las entidades están obligadas a formar parte de este Fondo.

3.2. Cálculo del capital final

Por ejemplo: una persona puede hacer una cuenta vivienda, y entrega cada mes una cantidad de dinero y cuando pasen los años establecidos tendrá en su cuenta el dinero que ha ido entregando más los intereses que dicho dinero ha producido.

Cuando el periodo de entrega de dinero a la operación de capitalización es anual se habla de **anualidad de capitalización**.

Caso práctico

Anualidades de capitalización

En primer lugar, nos planteamos la idea de crear un fondo de capitalización. Para eso cada determinado período de tiempo, en este caso, cada año entregaremos una cierta cantidad de dinero durante varios años. Así, pensemos que vamos a aportar ***a*** euros, durante ***t*** años, a un interés compuesto del ***r %*** anual. ¿Cuánto dinero tendremos al final de los ***t*** años?

Vamos a plantearlo con un ejemplo: Jorge, con 60 años, abre en un banco un plan de pensiones. Al comienzo de cada año y hasta la edad de su jubilación, a los 65 años, aportará 1.000 €, siendo el interés del 6 % anual.

¿Qué capital habrá acumulado cuando se jubile?

<table>
<tr><th>PRINCIPIO DEL:</th><th>APORTA:</th><th>FINAL DEL:</th><th>CAPITAL ACUMULADO:</th></tr>
<tr><td>Primer año
(60 AÑOS)</td><td>1.000 €</td><td>Primer año</td><td>$C = 1.000 + 1.000 \cdot \frac{6}{100} =$
$= 1.000 + 1000 \cdot 0{,}06 = 1.000 \cdot (1 + 0{,}06)$
$C = 1.000 \cdot 1{,}06 = 1.060$ €.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Observa que al capital aportado hemos sumado los intereses generados por ese dinero durante el año. Es muy importante que te fijes en que la operación se resume en multiplicar el dinero que tenemos al principio del período (en este caso los 1.000 €</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="4">aportados) por 1,06 (es decir, 1 más el resultado de dividir el interés anual entre 100).</td></tr>
<tr><td>Segundo año

(61 AÑOS)</td><td>1.000 €</td><td>Segundo año</td><td>$C = (1.060 + 1.000) \cdot (1 + 0{,}06)$

$C = 2.060 \cdot 1{,}06 = 2183{,}6$ €</td></tr>
<tr><td colspan="4">De nuevo hemos multiplicado la cantidad acumulada al principio del período (los 1.060 € ahorrados más los 1.000 € de la nueva aportación) por 1,06.</td></tr>
<tr><td>Tercer año

(62 AÑOS)</td><td>1.000 €</td><td>Tercer año</td><td>$C = (2.183{,}6 + 1.000) \cdot (1 + 0{,}06)$

$C = 3.183{,}6 \cdot 1{,}06 = 3.374{,}62$ €</td></tr>
<tr><td>Cuarto año

(63 AÑOS)</td><td>1.000 €</td><td>Cuarto año</td><td>$C = (3.374{,}62 + 1.000) \cdot (1 + 0{,}06)$

$C = 4.374{,}62 \cdot 1{,}06 = 4.637{,}10$ €</td></tr>
<tr><td>Quinto año

(64 AÑOS)</td><td>1.000 €</td><td>Quinto año

(Final de la operación)</td><td>$C = (4.637{,}10 + 1.000) \cdot (1 + 0{,}06)$

$C = 5637{,}10 \cdot 1{,}06 = 5.975{,}33$ €</td></tr>
<tr><td colspan="4">Por tanto, al finalizar la operación se encuentra con 5.975,33 €. Es fundamental que observes que en cada paso hemos multiplicado el capital acumulado por 1,06 (1+0,06).</td></tr>
</table>

El capital final es de 5.975,33 €. No es un gran interés el recibido, 975,33 € (los 5.975,33 acumulados menos los 5.000 € aportados) pero hay que tener en cuenta que corresponde sólo a 5 años.

Comprueba lo aprendido

Contesta a la siguiente cuestión:

Una familia abre una cuenta de ahorro vivienda para dentro de 5 años comprarse su casa. Piensan aportar a su cuenta 5.000 € cada año. ¿Qué capital tendrán ahorrado al finalizar esta operación si el interés es del 6 % anual?

Sugerencia

- 25.000 €
- 29.876,59 €
- 26.500 €
- Ninguna de las anteriores es correcta.

Esa es la cantidad aportada.

Bien, al final del primer año: 5.300 €; del segundo año: 10.918 €; del tercer año: 16.873,08 €; del cuarto año: 23185,46 €; y al final del quinto año:29.876,59.

Revisa las operaciones y repasa el material trabajado.

Revisa las operaciones y repasa el material trabajado.

Solución

1. Incorrecto
2. Opción correcta
3. Incorrecto
4. Incorrecto

En el punto anterior hemos obtenido el dinero que habría acumulado Jorge, pero haciendo el proceso completo, año a año. Si fuesen muchos años esto nos complicaría bastante el proceso, ¿no?

Reflexionemos sobre otro ejemplo:

Caso práctico

El hijo de Jorge, viendo que su padre ha conseguido un capital final bastante pequeño en el momento de jubilación, decide hacerse un plan de pensiones desde joven. Ahora tiene 25 años y se plantea aportar 500 € cada año, hasta su jubilación (a los 65 años), en una entidad financiera, en la que le ofrecen un 4 % de interés anual.

En la siguiente tabla, iremos desarrollando la situación planteada, pero a la vez, intentaremos sacar conclusiones que nos puedan servir para cualquier caso. Se trata de encontrar un modelo que nos permita encontrar el capital que obtendremos al final sin hacer el recorrido por todos los años que dure la operación de capitalización. Este modelo sería: Se aportan ***a*** euros, durante ***t*** años, a un interés compuesto del ***r* %** anual.

¿Cuánto dinero tendremos al final de esos *t* años?

<table>
<tr><th>AÑO</th><th>EJEMPLO</th><th>GENERALIZACIÓN</th></tr>
<tr><td>Primer año</td><td>Aporta 500 € y a final de año tiene:
$C=500\cdot(1+0{,}04)=500\cdot1{,}04=520$ €</td><td>Aporta a € y a final de año tiene:
$C=a\cdot(1+\frac{r}{100})=a\cdot(1+i)$ €</td></tr>
<tr><td colspan="3">Recuerda que para obtener el capital acumulado a final de un período basta con multiplicar el dinero disponible al principio del mismo por 1 más el interés en tanto por uno (es decir, el interés dividido por 100). Aquí, hemos llamado i al resultado de $\frac{r}{100}$.</td></tr>
<tr><td>Segundo año</td><td>Aporta 500 € y a final de año tiene:
$C=(520+500)\cdot(1{,}04)=1.060{,}8$ €</td><td>Aporta a € y a final de año tiene:
$C=(a\cdot(1+i)+a)\cdot(1+i)$
$C=a\cdot(1+i)^2+a\cdot(1+i)$ €</td></tr>
<tr><td>Tercer año</td><td>Aporta 500 € y a final de año tiene:</td><td>Aporta a € y a final de año tiene:
$C=(a\cdot(1+i)^2+a\cdot(1+i)+a)\cdot(1+i)$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>$C=(1.060,8+500)\cdot 1,04=1.623,23$ €</td><td>$C=a\cdot(1+i)^3+a\cdot(1+i)^2+a\cdot(1+i)$ €</td></tr>
<tr><td colspan="3">Insistimos en hacer notar que siempre, en cada paso, al capital acumulado le sumamos la aportación periódica y multiplicamos por 1+i.

Observa la expresión teórica que da el capital en cada paso (fíjate en los sumandos que tiene, tantos como el número del período, y en los exponentes de (1+i)).

Claro, seguir con este proceso hasta el final de esta operación (que durará 40 años) sería demasiado laborioso y pesado. Convendría tener una expresión para obtener el resultado sin hacer el cálculo todos los años.</td></tr>
<tr><td>Tras 40 años</td><td colspan="2">¿Qué capital tendrá este joven pasados los 40 años?. Vamos a intentar razonarlo sobre nuestro desarrollo teórico.</td></tr>
<tr><td>TRAS t AÑOS</td><td colspan="2">Sabemos que el capital acumulado será la suma de lo aportado más los intereses generados. Si nos fijamos en lo que ha ocurrido en los 3 primeros años, la fórmula para el capital acumulado al cabo de t años sería:

$C=a\cdot(1+i)^t+a\cdot(1+i)^{t-1}+.....+a\cdot(1+i)^3+a\cdot(1+i)^2+a\cdot(1+i)$

Como comentábamos antes, ha de tener t sumandos ya que hablamos de t años (todos los sumandos con el factor común a), y el primer sumando lleva el factor (1+i) elevado al número de años (t), el segundo a t-1, y así, bajando de exponente hasta quedarse en 1+i.

Sin embargo, pensarás que si no se lo que hay en los puntos suspensivos cómo voy a sumar. No te preocupes, en realidad utilizando propiedades de las</td></tr>
</table>

	progresiones geométricas (que no necesitas conocer, pero que podrás estudiar si lo deseas en este enlace) se llega a la siguiente fórmula, que nos permite hacer el cálculo deseado: $C=\frac{a\cdot[(1+i)^{t+1}-(1+i)]}{i}$

Apliquemos la fórmula al plan de pensiones del hijo de Jorge:

APORTACIÓN PERIÓDICA:	INTERÉS ANUAL:	TIEMPO:
a = 500 €	*r* = 4% $i=\frac{r}{100}=\frac{4}{100}=0{,}04$	*t* = 40 años
$C=\frac{500\cdot[(1+0{,}04)^{41}-(1+0{,}04)]}{0{,}04}$ $C=\frac{500\cdot[1{,}04^{41}-1{,}04]}{0{,}04}=\frac{500\cdot[4{,}99-1{,}04]}{0{,}04}$ $C=\frac{500\cdot3{,}95}{0{,}04}=\frac{1975}{0{,}04}=49.375$		

Vemos, como con una aportación total de 20.000 €, 40 años a 500 € cada año, se obtiene un capital final de 49.375 €

Importante

Por lo tanto, para calcular el capital final después de t años de ahorro con un interés i, utilizamos la fórmula:

$$C=\frac{a\cdot[(1+i)^{t+1}-(1+i)]}{i}$$

Donde a es la anualidad.

Caso práctico

Recordemos la operación de capitalización realizada por Jorge. Con 60 años abrió en un banco un plan de pensiones. Al comienzo de cada año y hasta la edad de su jubilación, a los 65 años, aportará 1.000 €, siendo el interés del 6 % anual.

¿Qué capital habrá acumulado cuando se jubile?

Intenta resolver este problema utilizando la fórmula, no dando todos los pasos como en el apartado anterior.

Es decir, Jorge tendría 5.975 €. Existe una ligera diferencia entre este resultado y el obtenido en el apartado anterior, debido al redondeo con los decimales.

La fórmula es:

$$C = \frac{a \cdot [(1+i)^{t+1} - (1+i)]}{i}$$

En nuestro problema tenemos: t = 5 años, i = 0,06 y a = 1000 €.

Resolvemos:

$$C = \frac{a \cdot [(1+i)^{t+1} - (1+i)]}{i} = \frac{1.000 \cdot [(1+0{,}06)^{6} - (1+0{,}06)]}{0{,}06} = \frac{1.000 \cdot [1{,}06^{6} - 1{,}06]}{0{,}06}$$

De donde:

$$C = \frac{1.000 \cdot [1{,}4185 - 1{,}06]}{0{,}06} = \frac{1.000 \cdot 0{,}3585}{0{,}06} = \frac{358{,}5}{0{,}06} = 5975$$

Comprueba lo aprendido

Realizamos una operación financiera consistente en ingresar 400 € al principio de cada año, durante 15 años, con un tipo de interés del 5%. ¿De qué capital dispondremos al cabo de los 15 años?

Sugerencia

- 6.000 €
- Aproximadamente, 12470 €.
- 9.063 €

○ 9500 €

Esa es la cantidad aportada. No has calculado los intereses generados.

Has trabajado con la fórmula del interés compuesto, pero como si toda la aportación se hubiese hecho en la primera vez.

Muy bien. $C = \frac{400 \cdot [(1+0{,}05)^{16} - (1+1{,}05)]}{0{,}05} = 9.063$ €.

Repasa los cálculos.

Solución

1. Incorrecto
2. Incorrecto
3. Opción correcta
4. Incorrecto

3.3. Cálculo de la anualidad o mensualidad

Utilizando la fórmula anterior, y conociendo el capital final que queremos obtener podemos averiguar las aportaciones mensuales, anuales... para llegar a dicho capital. Solo tendremos que despejar.

Imagen de mohammed_hassan en Pixabay. Licencia CC

Aportaciones anuales

Caso práctico

Si abro una cuenta vivienda para poder pagar dentro de 6 años 60.000 euros de entrada en la compra de mi casa, ¿cuánto debo ingresar cada año con el interés de 4,5%?

<table>
<tr>
<td>Capital final que deseamos tener:
C = 60.000 €.
Interés: R = 4,5%
Tiempo: t = 6 años
Aportación periódica: a = ?</td>
<td>$C = \frac{a \cdot [(1+i)^{t+1} - (1+i)]}{i}$
Despejando a:
$a = \frac{C \cdot i}{(1+i)^{t+1} - (1+i)}$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">$a = \frac{C \cdot i}{(1+i)^{t+1} - (1+i)} = \frac{60.000 \cdot 0,045}{1,045^7 - 1,045} = \frac{2.700}{1,361 - 1,045} = \frac{2.700}{0,316} = 8.544,3$
La aportación anual a esta cuenta vivienda debe ser de 8.544,3 €</td>
</tr>
</table>

Comprueba lo aprendido

Una señora inicia un plan de pensiones, su deseo es tener 40.000 € dentro de 25 años, que es cuando desea empezar a disfrutar del mismo. Ha encontrado un banco que le ofrece un interés del 5%, ¿cuánto debe aportar cada año para conseguir su objetivo?.

Sugerencia

- 17.718 €
- 2.400 €
- 2000 €
- Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

Te estás confundiendo, revisa lo estudiado. Es un problema de capitalización.

Te estás confundiendo, revisa lo estudiado. Es un problema de capitalización.

Con esas aportaciones acabaría con más de 100.000 €. Te estás confundiendo, revisa lo estudiado. Es un problema de capitalización.

Cierto. Con la fórmula que aparece arriba: $a = \frac{40000 \cdot 0{,}05}{1{,}05^{26} - 1{,}05} = 798{,}19\,€$

Solución

1. Incorrecto
2. Incorrecto
3. Incorrecto
4. Opción correcta

Aportaciones por meses

En todos los ejemplos que hemos hecho sobre operaciones de capitalización hemos supuesto que las aportaciones se hacían anualmente (anualidades). No obstante, esto no tiene que ser necesariamente así. Los pagos pueden hacerse mensualmente, trimestralmente, semestralmente,... Veamos unos ejemplos para aprender a adaptarnos a estas situaciones.

Ejemplo 1.

Imagen 1

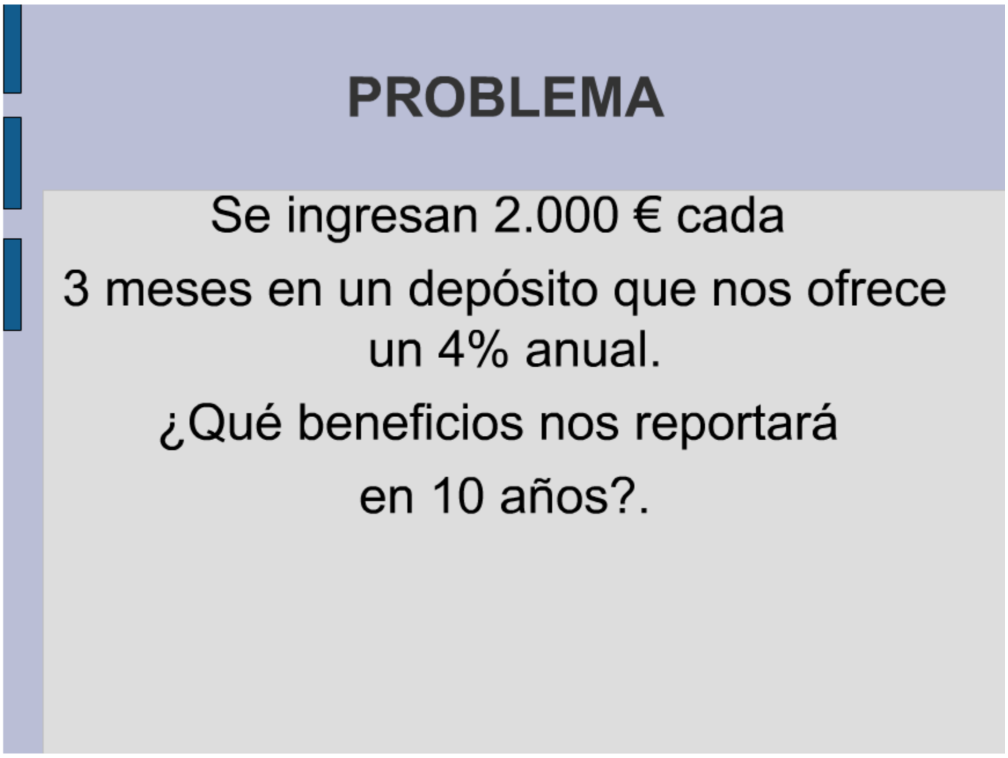

Imagen 2

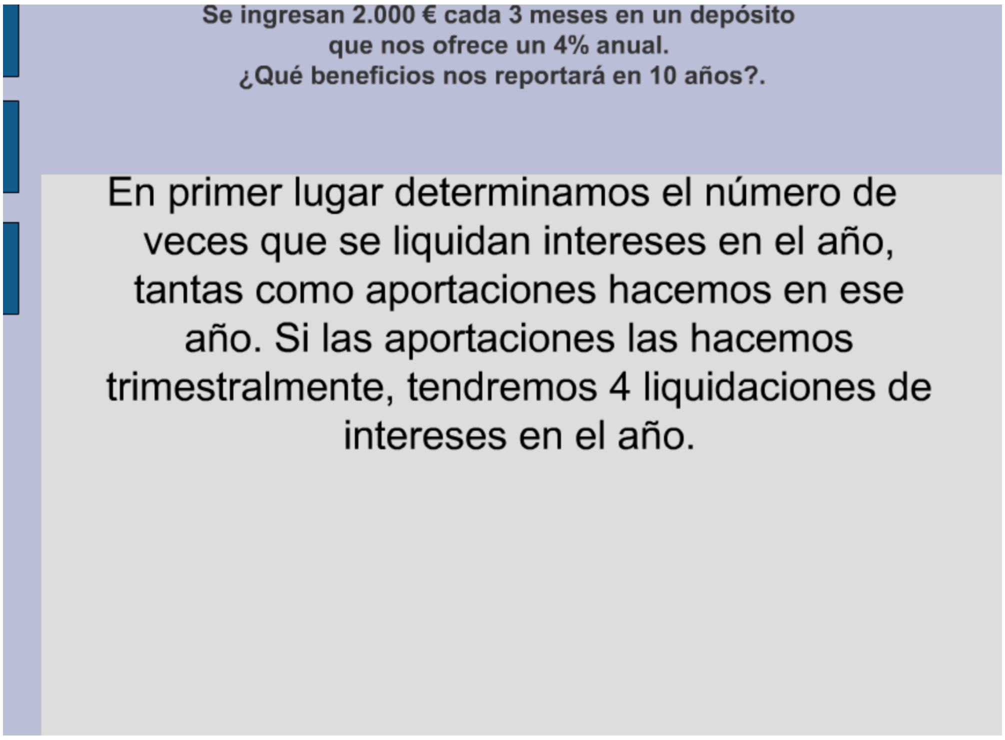

Imagen 3

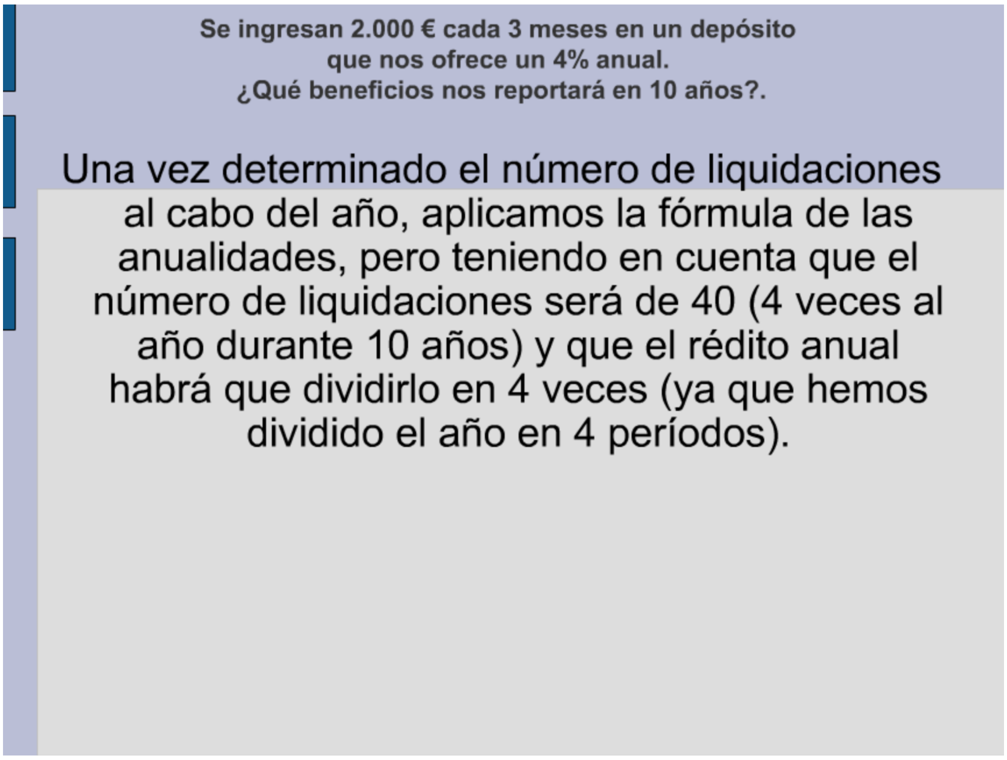

Imagen 4

Se ingresan 2.000 € cada 3 meses en un depósito
que nos ofrece un 4% anual.
¿Qué beneficios nos reportará en 10 años?.

Es decir, el capital acumulado *C* será:

$$C=\frac{a\cdot\left[\left(1+\frac{i}{4}\right)^{4\cdot t+1}-\left(1+\frac{i}{4}\right)\right]}{\frac{i}{4}}$$

$$C=\frac{2.000\cdot\left[\left(1+\frac{0,04}{4}\right)^{4\cdot 10+1}-\left(1+\frac{0,04}{4}\right)\right]}{\frac{0,04}{4}}$$

Imagen 5

Se ingresan 2.000 € cada 3 meses en un depósito
que nos ofrece un 4% anual.
¿Qué beneficios nos reportará en 10 años?.

Operando, *C = 98.000 €.*

$$C=\frac{2.000\cdot\left[1,01^{41}-1,01\right]}{0,01}$$

$$C=\frac{2.000\cdot[1,50-1,01]}{0,01}=\frac{980}{0,01}=98.000$$

Ejemplo 2.

Imagen 1

PROBLEMA

Se realiza una operación de capitalización en la que se obtiene un capital total final de 68.289,44 €, haciendo aportaciones mensuales durante 5 años con un interés anual del 5%.

¿Qué aportación mensual ha sido necesaria?.

Imagen 2

Se realiza una operación de capitalización en la que se obtiene un capital total final de 68.289,44 €, haciendo aportaciones mensuales durante 5 años con un interés anual del 5%.

¿Qué aportación mensual ha sido necesaria?.

- Estamos ante el segundo supuesto, queremos determinar la cantidad de dinero que ingresamos cada período, en este caso, cada mes.
- La fórmula manejada en el caso de las anualidades (pagos anuales) era:

$$a = \frac{C \cdot i}{(1+i)^{t+1} - (1+i)}$$

Imagen 3

Se realiza una operación de capitalización en la que se obtiene un capital total final de 68.289,44 €, haciendo aportaciones mensuales durante 5 años con un interés anual del 5%.

¿Qué aportación mensual ha sido necesaria?.

Bastará con tener en cuenta que si los pagos son mensuales haremos 12 pagos al año y, por tanto, el interés anual deberemos dividirlo en 12 partes, y que las aportaciones serán 60, 5 años por 12 veces cada año.

Imagen 4

Se realiza una operación de capitalización en la que se obtiene un capital total final de 68.289,44 €, haciendo aportaciones mensuales durante 5 años con un interés anual del 5%.

¿Qué aportación mensual ha sido necesaria?.

En resumen:

$$a = \frac{68.289,44 \cdot \dfrac{0,05}{12}}{\left(1+\dfrac{0,05}{12}\right)^{5\cdot 12+1} - \left(1+\dfrac{0,05}{12}\right)} = \frac{68.289,44 \cdot 0,0042}{0,0042^{61} - 0,0042}$$

$$a = \frac{286,816}{1,291 - 1,0042} = \frac{286,816}{0,2868} = 1.000,06$$

La cuota será aproximadamente de 1.000 €

Comprueba lo aprendido

Contesta las dos cuestiones:

Mariano ingresa 3.000 euros semestralmente en un fondo. La entidad financiera le da un 4 % de interés. ¿Qué capital tendrá al cabo de 5 años?

Sugerencia

- 30.000 €
- 16.898,93 €.
- 33.506,15 €
- 40.000 €

Esa es la cantidad aportada por Mariano, le faltan los intereses.

Has utilizado la fórmula de las anualidades, como si se hiciese un pago cada año. Observa que dice pagos semestrales.

Fenomenal. $C = \frac{3.000 \cdot [(1+\frac{0.04}{2})^{5 \cdot 2+1} - (1+\frac{0,04}{2})]}{\frac{0,04}{2}} = \frac{3.000 \cdot [1,02^{11} - 1,02]}{0,02} = 33.506,15$ €.

Revisa las operaciones y/o los contenidos.

Solución

1. Incorrecto
2. Incorrecto
3. Opción correcta
4. Incorrecto

Una familia desea disponer de 80.000 € dentro de 10 años. Han encontrado un banco que le ofrece un interés del 6% anual haciendo aportaciones bimestrales. ¿De cuánto debe ser cada pago bimestral?

Sugerencia

- 969,86 €.
- 1.333,33 €
- Aproximadamente, 5.725 €.
- Ninguna de las anteriores es correcta.

Muy bien. $a=\frac{80.000\cdot\frac{0,06}{6}}{(1+\frac{0,06}{6})^{10\cdot 6+1}-(1+\frac{0,06}{6})}=\frac{800}{1,01^{61}-1,01}=869,86$ €.

Cuidado, no has tenido en cuenta los intereses y has repartido el total entre los 60 pagos.

Cuidado, es posible que no hayas tenido en cuenta que los pagos son bimestrales.

Puede que tengas mal las operaciones o que hayas interpretado mal el problema.

Solución

1. Opción correcta
2. Incorrecto
3. Incorrecto
4. Incorrecto

Curiosidad

¿Sabías que existen hipotecas inversas?

Se llama **hipoteca inversa** a un producto bancario en el que una persona ingresa una cantidad de dinero en una entidad bancaria. La entidad, a cambio, le abona una cantidad fija anual (o con el acuerdo de periodicidad que se fije) durante el resto de su vida. Lo de llamarle hipoteca es debido a que en muchos casos lo que se entrega no es una cantidad de dinero sino la vivienda, para poder percibir en compensación un renta.

Para saber más

Es posible también, sabiendo la cantidad que queremos aportar en cada período, el capital que se desea obtener al final y el interés anual, determinar el número de períodos necesarios, es decir, el tiempo que debemos estar pagando.

Veámoslo en un ejemplo: ¿Cuántos años debe estar Manuel aportando dinero a un fondo si piensa hacer aportaciones anuales de 4.000 euros a un interés anual del 3% y quiere obtener un capital final de 50.000 euros?

Bueno, con fórmula

$C = \frac{a \cdot [(1+i)^{t+1} - (1+i)]}{i}$, tenemos: $50.000 = \frac{4.000 \cdot [(1+0,3)^{t+1} - (1+0,03)]}{0,03}$

=> $50.000 = \frac{4.000 \cdot [(1,3)^{t+1} - (1,03)]}{0,03}$,

y despejando,

$1,03^{t+1} - 1,03 = \frac{50.000 \cdot 0,03}{4.000}$

$1,03^{t+1} = \frac{50.000 \cdot 0,03}{4.000} + 1,03 = 1,405$

y tomando logaritmos:

$log(1,03^{t+1}) = log(1,405)$

=> $(t+1) \cdot log(1,03) = log(1,405)$

de donde: $t = \frac{log(1,405)}{log(1,03)} - 1 = 10,5$ años.

Habrás observado que necesitamos del uso de logaritmos, si no recuerdas esta operación, puedes recurrir al enlace que te ponemos de la wikipedia.

Resumen

Importante

En un producto de financiación, siempre se paga en función de lo que se debe. Desde el punto de vista financiero, se entiende por **amortización** el reembolso gradual de una deuda.

Un **cuadro de amortización** es una tabla en la que podemos ver cómo evoluciona nuestra deuda mes a mes, con el pago de las cuotas, y comprobar que los intereses que pagamos por el capital que hemos solicitado representan cada mes que pasa una parte menor de la cuota, en proporción a lo que nos resta de devolver del préstamo.

Si la deuda la pagamos mensualmente, hablamos de la mensualidad del préstamo. Para calcularla utilizamos la siguiente fórmula:

$$m = C \cdot \frac{(1+\frac{r}{1200})^{t}}{(1+\frac{r}{1200})^{t}-1} \cdot \frac{r}{1200}$$

$t \longrightarrow meses$
$C \longrightarrow capital\ prestado$
$r \longrightarrow \%$
$m \longrightarrow mensualidad$

Si en vez de pagar la deuda mensualmente, decidimos hacerlo anualmente:

La anualidad de un préstamo se calcula a través de la siguiente fórmula:

$$a = C \cdot \frac{(1+\frac{r}{100})^{t}}{(1+\frac{r}{100})^{t}-1} \cdot \frac{r}{100}$$

Importante

Las **operaciones de capitalización** son operaciones financieras en las que el interesado entrega un determinado capital generalmente en períodos de tiempo regulares, de modo que, al finalizar la operación de capitalización, se dispone de un capital igual a la suma de las cantidades aportadas más los intereses producidos por cada una de las aportaciones. Lo más importante en este tipo de productos es conocer su riesgo financiero.

Si queremos averiguar el capital final, después de t años de ahorro con un interés i, utilizamos la fórmula:

$$C = \frac{a \cdot [(1+i)^{t+1} - (1+i)]}{i}$$

Donde a es la anualidad.

Si queremos conocer, el importe de las anualidades para obtener un determinado capital podemos despejar de la fórmula anterior:

$$C = \frac{a \cdot [(1+i)^{t+1} - (1+i)]}{i}$$

Si las aportaciones no son anuales (pueden ser semestrales, mensuales...) multiplicamos el número de años por el número de pagos (si son semestrales serán 2, si son mensuales 12...) y dividimos i por ese mismo número.

Aviso Legal

Las páginas externas no se muestran en la versión imprimible

http://www.juntadeandalucia.es/educacion/permanente/materiales/index.php?aviso#space