

Bueno, hemos llegado al final de la unidad y ahora se van a aclarar muchas cosas. Seguro que hasta el momento has estado pensando "vaya lote de números y operaciones que he tenido que hacer, ¿y esto para qué?". Pues esperamos poder aclarártelo en este tema.

Quizás no sepas que, desde hace bastantes años, se considera que el aspecto fundamental de la enseñanza de las matemáticas debe ir dirigido hacia la resolución de problemas. Es decir, el objetivo final de las matemáticas debe ser la resolución de problemas. Y no nos referimos únicamente a los ejercicios algebraicos que verías en el instituto, nos referimos a todo tipo de problemas: cómo distribuir turnos en una fábrica, cómo organizar los elementos en un almacén, buscar la mejor ruta para viajar, optimizar el espacio en el maletero de un coche, etc.

Muchas veces, cuando es posible, se suelen reducir las cantidades, conocidas o no, y sus relaciones a simples ecuaciones o inecuaciones, pues disponemos de métodos que nos permiten resolver fácilmente esos elementos y así podemos encontrar la solución que nos puede resultar más favorable.

Sobre ese método de resolver problemas, es decir, el reducirlos a sistemas de ecuaciones y resolverlos por distintos métodos, es a lo que vamos a dedicar esta última parte de la unidad.



Ecuaciones en un autobús, de [Javi Valero](#) bajo licencia CC by-nd/2.0

1. ¿Me puede explicar en qué consiste?

Seguro que en tu vida cotidiana te encuentras en situaciones en las que hay cosas que sabes y otras que no conoces. Por ejemplo, cuando vas todos los días a trabajar seguro que conoces la distancia a la que queda tu trabajo, pero a menos que vayas andando o en bicicleta posiblemente no sepas a ciencia cierta lo que vas a tardar en llegar, pues depende de varios factores que desconoces. Si tienes un restaurante, puedes conocer cuánta comida puede gastar un comensal y cuántos alimentos tienes en la despensa, pero como no sabes exactamente cuántas personas se acercarán a tu restaurante, no puedes saber si andarás escasa de alimentos o te sobrarán muchos, lo que es especialmente problemático para los alimentos frescos que son más perecederos. Si tienes una consulta médica y quieres atender a todos los enfermos que te han solicitado cita, dependiendo de esa cantidad le podrás dedicar más o menos tiempo a cada uno de ellos.



En este tema lo que vamos a estudiar son esas situaciones en las que hay elementos que conocemos y otros que desconocemos y que, relacionándolos entre ellos, construimos una ecuación cuya resolución nos va a permitir descubrir esos valores desconocidos.

Antes de empezar vamos a ver un pequeño vídeo sobre la historia del Álgebra.

1.1. ¡Esto es lo que hay!



Suponemos que el mundo del Álgebra no es desconocido para ti. Ya en cursos anteriores has tomado contacto con él y habrás hecho tus pinitos con las ecuaciones. Como recordarás, uno de los aspectos más importantes en la resolución de problemas es conseguir traducir a lenguaje algebraico el lenguaje cotidiano que estemos utilizando para después aplicar los métodos de resolución. Por ejemplo, si las personas que forman un grupo, por ejemplo una clase de Bachillerato, se quieren agrupar en equipos de fútbol, cada uno de los cuales con 5 jugadores, y de fútbol, formados por 11 jugadores, como no sabemos cuántos grupos podemos hacer, la expresión correspondiente sería $5 \cdot x + 11 \cdot y$, siendo x el número de equipos de fútbol e y el de fútbol.



Fútbol sala, imagen de malojavio bajo CC

Importante

Se llama **ecuación lineal** con tres incógnitas a la suma de las tres incógnitas, multiplicadas por números, e igualada la suma a otro número. Por ejemplo, $6 \cdot x - 2 \cdot y + 9 \cdot z = 24$.

Esta definición puede ampliarse a cualquier cantidad de incógnitas. La única exigencia es que las variables vayan multiplicadas por números y sumadas. Puede darse que las variables aparezcan en distinto miembro, en ese caso basta agrupar todas las variables en un miembro y en el otro el término independiente. Por ejemplo, la ecuación $6x + 9z = 24 + 2y$ es equivalente a la anterior.

Se llama **solución de la ecuación lineal** a un conjunto de valores que al sustituirlos en las incógnitas hacen que se verifique la igualdad. Por ejemplo, los valores $x=2$, $y=3$, $z=2$ son solución de la ecuación anterior ya que se verifica que $6 \cdot 2 - 2 \cdot 3 + 9 \cdot 2 = 12 - 6 + 18 = 24$.

Comprueba lo aprendido

Indica si son verdaderas o falsas las siguientes frases.

La ecuación $3xy - 2 = 5$ es lineal.

[Sugerencia](#)

☐ Verdadero ☐ Falso

Falso

No es lineal ya que las variables x e y están multiplicadas entre sí.

La expresión $3x - 5 + 2y = 7 - 6z$ es una ecuación lineal.

[Sugerencia](#)

☐ Verdadero ☐ Falso

Verdadero

Es lineal ya que se puede reordenar de la forma $3x + 2y + 6z = 12$, que es lineal.

Los valores $x=1$, $y=2$, $z=-2$ son solución de la ecuación $3x + 4y + 5z = 1$

[Sugerencia](#)

☐ Verdadero ☐ Falso

Verdadero

Es verdadera ya que se verifica que $3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot (-2) = 3 + 8 - 10 = 1$.

Importante

Se llama **sistema de ecuaciones lineales** a un conjunto de ecuaciones lineales referidas todas ellas a las mismas incógnitas. En general se indica tanto el número de ecuaciones como de incógnitas.

Por ejemplo a continuación tenemos un sistema de 3 ecuaciones con tres incógnitas y otro de 2 ecuaciones con cuatro incógnitas.

$$\begin{cases} 3x - y + z = 0 \\ x + 2y - z = 1 \\ -x + 3y - z = -4 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 3y - 2z + 4t = 10 \\ 3x + 2y + 5z - 7t = 21 \end{cases}$$

La **solución de un sistema de ecuaciones lineales** es el conjunto de valores que verifican todas y cada una de las ecuaciones.

Por ejemplo, los valores $x=1$, $y=-3$, $z=-6$ verifican el primer sistema anterior ya que se verifica:

$$\begin{cases} 3 \cdot 1 - (-3) + (-6) = 3 + 3 - 6 = 0 \\ 1 + 2 \cdot (-3) - (-6) = 1 - 6 + 6 = 1 \\ -1 + 3 \cdot (-3) - (-6) = -1 - 9 + 6 = -4 \end{cases}$$

Reflexiona



Fotografía del ITE

En un grupo de Bachillerato formado por 35 alumnos los hemos repartido formando tres equipos de baloncesto, dos de balonmano y uno de balonvolea. En otro grupo hemos formado dos de baloncesto, uno de balonmano y dos de balonvolea, juntando en total 29 alumnos. Por último, con 30 alumnos hemos conseguido un equipo de baloncesto, otro de balonmano y tres de balonvolea.

1. Si x representa el número de alumnos que forman un equipo de baloncesto, y los del balonmano y z los que componen un equipo de balonvolea, escribe un sistema de tres ecuaciones con esas tres incógnitas que recoja la información anterior.
2. Comprueba que $x=5$, $y=7$ y $z=6$ es solución del sistema anterior. ¿Qué representan esos valores?

1) El sistema sería
$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 35 \\ 2x + y + 2z = 29 \\ x + y + 3z = 30 \end{cases}$$

2) Sustituimos los valores y comprobamos:
$$\begin{cases} 3 \cdot 5 + 2 \cdot 7 + 6 = 15 + 14 + 6 = 35 \\ 2 \cdot 5 + 7 + 2 \cdot 6 = 10 + 7 + 12 = 29 \\ 5 + 7 + 3 \cdot 6 = 5 + 7 + 18 = 30 \end{cases}$$

Esa solución nos aclara que el equipo de baloncesto tiene 5 jugadores, el de balonmano 7 y el de balonvolea 6 componentes.

Una forma muy cómoda de trabajar con un sistema es mediante su forma matricial, pues vamos a poder aplicar todo lo que hemos aprendido hasta el momento en la unidad.

Si tenemos un sistema general $\begin{cases} a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y + a_{13} \cdot z = c_1 \\ a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y + a_{23} \cdot z = c_2 \\ a_{31} \cdot x + a_{32} \cdot y + a_{33} \cdot z = c_3 \end{cases}$, se agrupan en forma matricial los términos como: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$

La matriz $M_c = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ recibe el nombre de **matriz de los coeficientes** y esta formada, por filas, por los coeficientes de cada una de las ecuaciones y por columnas por los coeficientes de cada variable.

La matriz $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ es la **matriz de las incógnitas** y $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ la **matriz de los términos independientes**.

Se llama **matriz ampliada** a la que se obtiene añadiéndole a la matriz de los coeficientes la columna de los términos independientes.

$$M_a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & c_3 \end{pmatrix}$$

Reflexiona

Dado el sistema $\begin{cases} 3x-y+z=10 \\ 2x+2y-2z=12 \\ -x+3y+3z=4 \end{cases}$ escríbelo en forma matricial y comprueba que, aplicando las operaciones con matrices, esa expresión es equivalente al sistema original.

¿Cuál sería la matriz ampliada en ese sistema?

La forma matricial sería $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix}$ y si en ella multiplicamos las matrices del primer miembro, obtendríamos entonces una igualdad entre matrices que sería $\begin{pmatrix} 3x-y+z \\ 2x+2y-2z \\ -x+3y+3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix}$ y si igualamos miembro a miembro se obtiene el sistema inicial.

En nuestro caso la matriz ampliada sería $M_a = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 10 \\ 2 & 2 & -2 & 12 \\ -1 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Importante

Dos **sistemas de ecuaciones lineales** son **equivalentes** cuando tienen exactamente las mismas soluciones, es decir, todas las soluciones del primer sistema lo son del segundo y viceversa.

Las propiedades que permiten convertir un sistema de ecuaciones en otro equivalente ya las has visto en cursos anteriores y son muy parecidas a las que hemos utilizado para aplicar Gauss en los temas anteriores. Si no las recuerdas o quieres repasarlas puedes hacerlo en el siguiente enlace.

[Sistemas equivalentes](#)

1.2. Para todos los gustos.

Aunque hay gente que suele decir que todo tiene solución menos la muerte, lo cierto es que en la vida cotidiana hay veces que tenemos algunas restricciones en nuestros problemas que unas veces hacen que tengamos solución y otras veces no, incluso a veces tenemos varias soluciones posibles. Por ejemplo si queremos viajar de Cádiz a Madrid por carretera hay varias formas de hacerlo, ya que podemos ir en dirección a Córdoba y después recorrer la autovía de Andalucía o bien llegar a Sevilla y tomar dirección a Mérida y al llegar a ella tomar ya la dirección de Madrid.

Con los sistemas va a pasar algo parecido, habrá veces que tengan una única solución o varias.



Importante

Un sistema de ecuaciones lineales se dice que es **Compatible** si tiene solución y en caso contrario se llama **Incompatible**.

Si el sistema tiene una única solución recibe el nombre de **Compatible Determinado**. Si tiene infinitas soluciones se llama **Compatible Indeterminado**.

El problema se nos va a plantear para saber cuándo un sistema es de un tipo u otro. Por ejemplo, el sistema
$$\begin{cases} x+y+2z=5 \\ 3x-y+z=2 \\ 2x+y-z=3 \end{cases}$$
 tiene como única solución los valores (1, 2, 1), puedes comprobar que si intentas cualquier otro trio de valores para x, y, z siempre te va a dar que no es solución.

Sin embargo el sistema
$$\begin{cases} x-y+z=1 \\ 2x+y+z=4 \end{cases}$$
 no solo tiene por solución
$$\begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases}$$
, si no que cualquiera de las ternas (2, 1, -1) ó (-1, 2, 4) también son solución, y no son las únicas.

Vamos a ver cómo todo lo que hemos aprendido hasta el momento en la unidad tiene su aplicación.

Importante

El **Teorema de Rouché** o de Rouché-Frobenius nos dice que en un sistema de ecuaciones lineales el número de soluciones depende de los rangos que tengan la matriz ampliada y la de los coeficientes mediante la siguiente regla.

- 1) Si el rango de la matriz de los coeficientes es igual al rango de la matriz ampliada e igual al número de incógnitas, el sistema es Compatible Determinado.
- 2) Si el rango de la matriz de los coeficientes es igual al rango de la matriz ampliada pero menor que el número de incógnitas, el sistema es Compatible Indeterminado.
- 3) Si el rango de la matriz de los coeficientes es distinto del rango de la matriz ampliada, el sistema es incompatible.

En el siguiente video puedes ver ejemplos del estudio, mediante el teorema anterior, de distintos sistemas de ecuaciones.

3. Ejemplos del Teorema de Rouché.

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y - z = 3 \\ x + 3y + 2z = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x - 3y + 2z = -3 \\ 5x - y = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + y - z = 2 \\ x - y + 3z = 5 \\ 7x + y + z = 3 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 5 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 10 + 1 - 15 - 0 + 4 = 0 \quad \text{rang } A = 2$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & -3 \\ 5 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{rang } A^* = 2$$

rang = rang A^* \leftarrow no es incompatible
 \hookrightarrow C.I

Para que puedas practicar lo que has visto, en el siguiente enlace tienes un test en el que te hacen preguntas sobre la utilización del Teorema de Rouché para estudiar un sistema. Contesta a las preguntas para ver si has entendido lo que llevamos hasta el momento.

[Test sobre sistemas](#)

Comprueba lo aprendido

Tenemos tres sistemas, cada uno con una cantidad distinta de soluciones. Utiliza el Teorema de Rouché para responder a las cuestiones:

$$1 \begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ 2x + y + 3z = 7 \\ x + 2y + 3z = 5 \end{cases} \quad 2 \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x + 2y = 4 \\ 3x + 4y = 6 \end{cases} \quad 3 \begin{cases} 2x + y + z = 5 \\ x + 2y + z = 3 \end{cases}$$

El sistema compatible determinado es el número .

El sistema compatible indeterminado es el número .

El sistema incompatible es el número .

Enviar

2. Y esto, ¿como se soluciona?

No sabemos si serás una persona aficionada a la cocina, pero desde luego sobre el tema de las comidas todos sabemos algo, aunque sea freír un huevo. Para conseguirlo necesitamos aceite, un huevo y una pizca de sal, pero una vez que tenemos los ingredientes tenemos que saber cómo manipularlos para conseguir el huevo frito. Puede parecer que esto es muy simple, pero si queremos hacer un bacalao al pil pil ya el proceso de resolución se complica.

Algo parecido ocurre con las matemáticas. Mientras tenemos problemas simples hay, a veces, distintas formas de resolverlos, algunas muy simples, pero a medida que se van complicando los elementos que entran dentro del problema, los métodos de resolución se van complicando.

Hasta el momento has visto cómo saber el número de soluciones que tiene un sistema, ahora es el momento de ver cómo hallarlas.



Imagen del ITE bajo CC

2.1. Lo tradicional hay que cuidarlo

¿Qué tal andamos de memoria? Imaginamos que si sois como nosotros, nunca os vendrá mal repasar un poquito los conceptos aprendidos hace tiempo.

Las matemáticas tienen una estructura que es muy similar a muchos aspectos del mundo que nos rodea. Para poder dar un paso es necesario haber dado el paso previo. Por ejemplo, la construcción de las pirámides no pudo hacerse empezando por el vértice superior, ya que para construir un nivel era necesario tener construido el nivel inferior. Eso mismo ocurre hoy en día, para construir un piso de una casa debemos tener construido el piso inferior, si no todo se viene abajo.

Pues bien, en este apartado vamos a repasar los métodos de resolución de sistema de ecuaciones que viste en cursos anteriores. Los métodos seguramente los viste para sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas, pero son aplicables a cualquier situación. Existen tres métodos: Reducción, Sustitución e Igualación. Si quieres repasarlos más exhaustivamente puedes ir al [enlace](#) siguiente.

En la siguiente presentación aparece explicado paso a paso el **Método de Reducción**. Pulsa en el botón de siguiente paso para ver como se resuelve el sistema.



Puedes practicar el Método de Reducción en los ejemplos que hay en el siguiente [enlace](#). Resuelve tu primero el sistema y después comprueba si has hecho los cálculos correctos.

Veamos ahora el **Método de Sustitución**.



Practica este método en el siguiente [enlace](#).

Por último repasamos el **Método de Igualación**.



Ejemplos de resolución de sistema por el Método de Igualación los puedes ver [aquí](#).

Comprueba lo aprendido

La empresa de transportes "El Gusano Veloz", especializada en transporte infantil y juvenil, tiene varios grupos de clientes fijos para los que realiza excursiones a distintos lugares. El nuevo gerente quiere saber la cantidad fija de personas que componen esos grupos, pero al revisar los datos sólo tiene los resultados globales.

En concreto, trabaja con un club que tiene un grupo de fútbol y otro de baloncesto. Siempre que viaja cada grupo lleva el mismo número de personas, entre jugadores, encargados y acompañantes. Sabe que el mes pasado hizo tres viajes con el grupo de fútbol y dos con el de baloncesto y en total llevó a 141 personas. Hace dos meses realizó para el primer grupo dos viajes y para el de baloncesto cuatro, desplazando en total a 142.

Si llamamos x al número de personas que viajan en el grupo de fútbol e y al de personas del grupo de baloncesto, completa el siguiente sistema:

$$\square x + \square y = \square$$

$$\square x + \square y = \square$$

Resuelve el sistema por el método que quieras e indica el número de personas de cada grupo:

x = el grupo de fútbol tiene personas

y = el grupo de baloncesto se compone de personas.

Enviar

.....

2.2. ¿Alguien se había olvidado de Gauss?

¿Te acuerdas de Raimundo? Él sigue con su trabajo en la cadena de supermercados. Quizás recuerdes que su trabajo consistía en trabajar con los datos de que disponía y lo que solía hacer era elaborar tablas o matrices con ellas para tener toda la información más a la vista y más fácil de comparar. Eso ocurre muchas veces en la vida cotidiana. El entrenador de un equipo de baloncesto va recogiendo todo el proceso que se sigue a lo largo de un partido mediante tablas comparativas, muchas de las cuales puedes verlas en las páginas deportivas de los diarios. El trabajar con esas matrices de números hace que sea más fácil seguir la evolución de los jugadores en lugar de tenerlo todo escrito según cada uno de los cuartos.



Imagen del ITE bajo CC

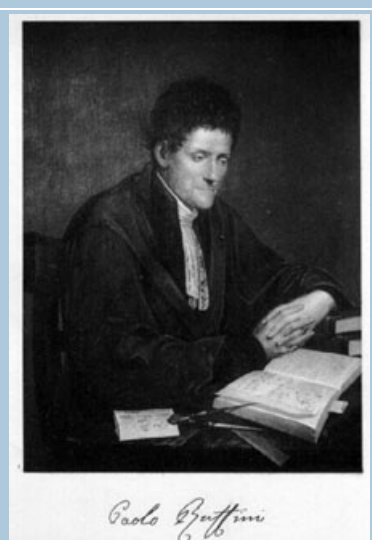
En este apartado lo que vamos a ver es como, para resolver un sistema, es posible trabajar con expresiones más simples que las que hemos visto hasta el momento. En concreto vamos a trabajar solamente con los coeficientes del sistema y no vamos a tener que arrastrar las incógnitas ni las igualdades. Quizás pienses que esto es algo nuevo pero no es así.

Curiosidad

El trabajar sólo con coeficientes para no tener que ir arrastrando las variables no es algo que debe resultarte desconocido. Aunque no lo recuerdes, seguro que en tus años de estudiante en el instituto viste la Regla de Ruffini para hallar el cociente y resto de la división de un polinomio entre divisores de la forma $x-a$, siendo a un número cualquiera. En dicha regla se distribuyen, en una caja, ordenadamente los coeficientes del polinomio y mediante sumas y multiplicaciones es posible hacer la división.

El matemático italiano Paolo Ruffini (1765, 1822) se graduó, además de en Matemáticas, en Medicina y Filosofía. Durante muchos años ocupó las cátedras de Medicina y Matemáticas en la Universidad de Modena, de la que fue Rector. Como curiosidad comentar que enfermó durante una epidemia de tifus, y que algunos años más tarde presentó un estudio de dicha enfermedad basado en su propia experiencia.

Trabajó principalmente en el campo del álgebra, en concreto en la búsqueda de las soluciones de ecuaciones de grado inferior a cinco.



6. Paolo Ruffini, imagen de dominio público tomada de Wikimedia Commons.

El **Método de Gauss** para resolver sistemas de ecuaciones lineales consiste en tomar la matriz ampliada del sistema y, mediante las transformaciones típicas de Gauss, conseguir una matriz triangular superior. Una vez conseguida, basta volver a recomponer el sistema que queda obteniéndose un sistema escalonado, es decir, un sistema donde cada ecuación tiene una incógnita más que la anterior.

Recordemos, antes de empezar, los procedimientos que podemos seguir en el método de Gauss.

1. Podemos cambiar dos filas entre sí.
2. Podemos multiplicar o dividir una fila completa por cualquier número.
3. Si hay dos filas iguales podemos eliminar una de ellas.
4. Si una fila es completa de ceros, podemos eliminarla.
5. A una fila le podemos sumar otra cualquiera multiplicada por un número.

Si te fijas en concreto en la última propiedad puedes comprobar que el Método de Gauss es una generalización del Método de Reducción que viste en el apartado anterior.

Lo mejor es que veamos, con un ejemplo, como se aplica el método de Gauss. Puedes verlo en la presentación adjunta.

En el siguiente [enlace](#) puedes ver ejemplos de aplicación del método de Gauss.

La siguiente escena de GeoGebra te puede ayudar a entender la resolución de los ejercicios que aparecen en este apartado. Mueve los deslizadores que aparecen en la parte superior de la escena para seleccionar los coeficientes de cada ecuación.

Cada ecuación se corresponde con cuatro deslizadores en sentido vertical, y los coeficientes se van seleccionando de arriba abajo, siendo el superior el de la x , el siguiente el de la y , etc. La primera ecuación se corresponde con los primeros 4 deslizadores de la izquierda.

En la parte de la derecha aparece el sistema de ecuaciones tal como va quedando a medida que vas seleccionando los coeficientes, así como la representación matricial del mismo. Cuando los hayas seleccionado todos te aparecerán abajo los sistemas equivalentes al que quieres resolver, siendo el último de la derecha el sistema escalonado.

En la parte inferior izquierda aparecen las soluciones del sistema, en el caso de que este las tenga. Los términos de sistema compatible e incompatible se explican en el apartado 3 de este tema.



Si no puedes ver esta escena de geogebra accede a la siguiente [página](#).



Reflexiona

Raimundo ha recibido los datos de las compras de pescado destinado a la sección correspondiente de sus supermercados.



Su cadena suele trabajar con tres mercados distintos según el tipo de pescado que reciben. Sabe que la caja de pescado que sirve el primer mercado la pagan a 30 €, la del segundo a 20 € y a 40 € cada caja de pescado servida por el tercer mercado. En el mes pasado han tenido que pagar 40500 euros por las 1500 cajas de pescado que han recibido en total de los tres mercados el último mes. Además, le han comentado que del segundo mercado han recibido tantas cajas de pescado como del primero y tercero juntos. ¿Cuántas cajas se habrán comprado a cada uno de los mercados?

Si llamamos x al número de cajas recibidas del primer mercado, y a las del segundo y z a las del tercero, tendremos el siguiente sistema de ecuaciones, que puede simplificarse en su forma general que aparece en el segundo sistema.

$$\begin{cases} x+y+z=1500 \\ 30x+20y+40z=40500 \\ y=x+z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x \end{cases}$$

Las soluciones de ese sistema son:

$x = 450$ cajas de pescado del primer mercado.

$y = 750$ cajas del segundo mercado.

$z = 300$ cajas servidas por el mercado tercero.

Para acabar el tema vamos a ver, como en los temas anteriores, una serie de ejercicios que han aparecido en exámenes de Selectividad de cursos pasados. Recuerda que este apartado es un complemento y que no es objetivo de estos contenidos el preparar para esa prueba, pero si ayudarte si deseas presentarte a ella.

Ejercicio resuelto

En una excavación arqueológica se han encontrado sortijas, monedas y pendientes. Una sortija, una moneda y un pendiente pesan conjuntamente 30 gramos. Además, 4 sortijas, 3 monedas y 2 pendientes han dado un peso total de 90 gramos. El peso de un objeto deformado e irreconocible es de 18 gramos.

Determina si el mencionado objeto es una sortija, una moneda o un pendiente, sabiendo que los objetos que son del mismo tipo pesan lo mismo.

Consideramos las variables: x =peso de una sortija; y =peso de una moneda; z =peso de un pendiente.

Obtenemos el sistema parcial siguiente
$$\begin{cases} x+y+z=30 \\ 4x+3y+2z=90 \end{cases}$$

El problema se plantea con la última condición. Sabemos que 18 es el peso de uno de los tres elementos, pero no sabemos cuál. Por ello debemos probar cada caso.

Si suponemos que la sortija es la que pesa 18 gramos quedaría el sistema
$$\begin{cases} x+y+z=30 \\ 4x+3y+2z=90 \\ x=18 \end{cases}$$
, pero al resolverlo nos saldría como solución $x=z=18$ e $y=-6$ y lógicamente es imposible que una moneda pese -6 gramos. Luego la hipótesis de que la sortija pesara 18 gramos no es válida.

Supongamos ahora que lo que pesa 18 gramos es la moneda, entonces
$$\begin{cases} x+y+z=30 \\ 4x+3y+2z=90 \\ y=18 \end{cases}$$
, en cuyo caso la solución sería $x=z=6$ gramos e $y=18$ gramos, que si es una solución aceptable.

Veamos el último caso, por si acaso obtenemos otra posible solución:
$$\begin{cases} x+y+z=30 \\ 4x+3y+2z=90 \\ z=18 \end{cases}$$

Ahora obtenemos de solución $x=z=18$ e $y=-6$, por lo que tampoco nos vale como solución.

Comprueba lo aprendido

Una empresa cinematográfica dispone de tres salas: A, B y C. Los precios de entrada a estas salas son 3, 4 y 5 euros, respectivamente. Un día la recaudación conjunta de las tres salas fue de 720 euros y el número total de espectadores fue de 200. Si los espectadores de la sala A hubieran asistido a la sala B y los de la sala B a la sala A, se hubiese obtenido una recaudación de 20 euros más. Calcula el número de espectadores que acudió a cada una de las salas.

Tomamos como variables:

x = nº de espectadores de la sala A

y = nº de espectadores de la sala B

z = nº de espectadores de la sala C

Completa el sistema según los datos reflejados:

$$\square x + \square y + \square z = 720$$

$$x + y + z = \square$$

$$\square x + \square y + 5z = \square$$

La solución de ese sistema sería

$x = \square$ espectadores en la sala A

$y = \square$ espectadores en la sala B

$z = \square$ espectadores en la sala C

Ejercicio resuelto

Tratamos de adivinar, mediante ciertas pistas, los precios de tres productos A, B y C.

Pista 1: Si compramos una unidad de A, dos de B y una de C gastamos 390 euros.

Pista 2: Si compramos n unidades de A, n+3 de B y tres de C gastamos 390 euros.

- a) ¿Hay algún valor de n para el que estas dos pistas sean incompatibles?
 b) Sabiendo que n=4 y que el producto C cuesta el triple que el producto A, calcula el precio de cada producto.

a) Al plantear el sistema tenemos
$$\begin{cases} x+2y+z=118 \\ nx+(n+3)y+3z=390 \end{cases}$$
, vamos a utilizar Gauss para estudiarlo.

En la matriz ampliada $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 118 \\ n & n+3 & 3 & 390 \end{array} \right)$ le restamos a la segunda fila la primera multiplicada por n y obtenemos:
 $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 118 \\ 0 & -n+3 & 3-n & 390-118n \end{array} \right)$. Vemos que si n=3 entonces $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 118 \\ 0 & 0 & 0 & 36 \end{array} \right)$ con lo que tenemos un sistema incompatible.

b) En este caso el sistema se completa con otra ecuación y queda
$$\begin{cases} x+2y+z=118 \\ 4x+7y+3z=390 \\ z=3x \end{cases}$$
, basta resolverlo y obtenemos los valores A = 69 euros, B = 13 euros y C = 23 euros.

Reflexiona

Un cajero automático contiene sólo billetes de 10, 20 y 50 euros. En total hay 130 billetes con un importe de 3000 euros.

- a) ¿Es posible que en el cajero haya el triple número de billetes de 10 que de 50?
 b) Suponiendo que el número de billetes de 10 es el doble que el número de billetes de 50, calcula cuántos billetes hay de cada tipo.

Llamamos x= nº de billetes de 10€; y= nº de billetes de 20€; z=nº de billetes de 50€.

a) En el primer apartado nos queda el sistema
$$\begin{cases} x+y+z=130 \\ 10x+20y+50z=3000 \\ x=3z \end{cases}$$
 si lo estudiamos es un sistema incompatible, luego no es posible la condición que nos indican.

b) En el segundo caso el sistema obtenido es
$$\begin{cases} x+y+z=130 \\ 10x+20y+50z=3000 \\ x=2z \end{cases}$$
 en cuyo caso la solución sería 80 billetes de 10 €, 10 billetes de 20 euros y 40 billetes de 50 €.

3.2. Sistemas con parámetros



Aunque no hemos visto este tipo de ejercicio dentro de los contenidos, suelen ser lo más corriente dentro de los exámenes de Selectividad. Consiste en estudiar como sería un sistema en el que uno o más de los coeficientes están sustituidos por un parámetro. Según el valor que se le dé a ese parámetro, el sistema será de distinto tipo. Ejercicios parecidos has visto en el tema anterior cuando te pedían calcular el rango o la matriz inversa dependiendo de un valor no conocido.

Ejercicio resuelto

Sea el sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{rcl} x + y & = & m+1 \\ x + my + z & = & 1 \\ mx + y - z & = & m \end{array}$$

- a) Determina los valores de m para los que el sistema es compatible.
b) Resuelve el sistema en el caso $m=-1$.

El proceso es siempre idéntico.

a) Escribimos la matriz ampliada $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & m+1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ m & 1 & -1 & m \end{array} \right)$. Ahora estudiamos el rango de la matriz de los coeficientes.

Para ello tenemos en cuenta que ya hay un menor de orden 2 distinto de cero $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$. Este paso incluso nos lo podíamos haber ahorrado englobándolo en el siguiente.

Ahora hallamos el determinante de la matriz de los coeficientes: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & -1 \end{vmatrix} = -m + m + 1 - 1 = 0$ y vemos que, independientemente del valor de m , la matriz de los coeficientes siempre tiene de rango 2.

A continuación hallamos el rango de la matriz ampliada. Para ello tomamos las filas y columnas en donde estaba comprendido el menor de orden 2 distinto de cero y lo ampliamos con la otra fila y la columna de los términos independientes. Así tenemos $\begin{vmatrix} 1 & 0 & m+1 \\ m & 1 & 1 \\ 1 & -1 & m \end{vmatrix} = m - m^2 - m - m - 1 + 1 = -m^2 - m$. Si igualamos a cero, ese determinante se anulará cuando $-m^2 - m = 0$, es decir, cuando $-m(m+1) = 0$ que es lo mismo que decir que cuando $m=0$ ó $m=-1$. Por lo tanto, si m fuese distinto de 0 y de -1, el rango de la matriz ampliada sería 3 y el sistema sería incompatible, y sólo será compatible si $m=0$ ó $m=-1$.

b) Ahora nos piden resolver el sistema $\begin{cases} x+y=0 \\ x-y+z=1 \\ -x+y-z=-1 \end{cases}$ que ya sabemos que es compatible indeterminado. En concreto podemos ver que la tercera ecuación es la misma que la segunda cambiada de signo.

Para resolver, y como el rango del sistema es 2, basta elegir dos ecuaciones que sean independientes y despejar dos cualesquiera de las incógnitas en función de la tercera.

Elegimos las dos primeras ecuaciones. De la primera sacamos que $y=-x$. Si eso lo sustituimos en la segunda nos queda $x+x+z=1$, de donde despejando sería $z=1-2x$.

La solución sería por tanto los infinitos valores x, y, z que cumplen $y=-x; z=1-2x$.

A veces se suele utilizar un parámetro y entonces la solución sería $\begin{cases} x=t \\ y=-t \\ z=1-2t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$, donde el último símbolo raro significa para todo, es decir, nos dice que para cualquier valor que sustituyamos en t nos da una solución del sistema.

Ejercicio resuelto

Considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+ty+z=2 \\ x+y+tz=t-1 \end{cases}$$

- a) Determina el valor de t para que el sistema sea incompatible.
b) Resuelve el sistema para $t=1$.

Como puedes ver el enunciado es casi clónico del anterior. Vamos a aprovecharlo para ver otro modo de resolverlo, utilizando el método de Gauss.

a) Tomamos la matriz ampliada. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & t & 1 & 2 \\ 1 & 1 & t & t-1 \end{array}\right)$ ahora realizamos las siguientes transformaciones:

A la segunda fila le restamos la primera multiplicada por 2 y a la tercera le restamos la primera. De esa forma obtenemos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & t-2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & t-2 & t-1 \end{array}\right).$$

Como podemos apreciar, si $t-2$ es distinto de 0, es decir, t es distinto de 2, obtenemos tres filas con valores distintos de cero, luego el rango de la matriz de los coeficientes y la ampliada valen 3 y el sistema sería compatible determinado. Pero

si t toma el valor 2 quedaría la matriz $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ que equivale a un sistema incompatible.

b) El apartado b es aún más fácil pues basta sustituir t por 1 en la matriz anterior. De la matriz $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$ basta

reconstruir el sistema $\begin{cases} x+y+z=0 \\ -y-z=2 \\ -z=0 \end{cases}$ y resolviendo de abajo hacia arriba sale la solución $z=0$; $y=-2$; $x=2$.

Ejercicio resuelto

Dado el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x+y &= 1 \\ ky+z &= 0 \\ x+(k+1)y+kz &= k+1 \end{aligned}$$

a) Determina el valor del parámetro k para que el sistema sea incompatible.

b) Halla el valor del parámetro k para que la solución del sistema tenga $z=2$.

a) El apartado primero es igual que en el caso anterior.

De la matriz $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & k & 1 & 0 \\ 1 & k+1 & k & k+1 \end{array}\right)$ pasamos a $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 & k \end{array}\right)$ restándole a la tercera fila las dos primeras.

Estudiemos el resultado. El determinante de la matriz de los coeficientes es distinto de cero siempre que sea k distinto de cero y de uno. En esos casos el sistema es compatible determinado. Veamos entonces que pasa cuando $k=0$ ó $k=1$.

Para $k=0$ nos quedaría la matriz $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. En este caso el sistema es compatible indeterminado.

Para $k=1$ queda $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ y en este caso es cuando el sistema es incompatible.

b) En el apartado segundo sustituimos z por 2 en el sistema y nos queda

$$\begin{cases} x+y=1 \\ ky+2=0 \\ x+(k+1)y+2k=k+1 \end{cases} \equiv \begin{cases} x+y=1 \\ ky=-2 \\ x+(k+1)y=-k+1 \end{cases}$$

Vamos a suponer que k es distinto de cero, entonces podemos dividir por él y el sistema tendría que cumplir en las dos primeras ecuaciones: $y = \frac{-2}{k}$; $x = 1 - y = 1 + \frac{2}{k} = \frac{k+2}{k}$.

Para que eso cumpla, la tercera ecuación debe cumplir $\frac{k+2}{k} + \frac{-2 \cdot (k+1)}{k} = -k+1 \rightarrow k+2-2 \cdot (k+1) = k \cdot (-k+1) \rightarrow$
 $\rightarrow k+2-2k-2 = -k^2+k$

de donde, reordenando, nos queda la ecuación $k^2-2k=0$ que se cumple para $k=0$ (imposible pues no tendría sentido el haber dividido por k) y para $k=2$. Por lo tanto la solución del sistema sería, tomando $k=2$: $x=2$; $y=-1$; $z=2$.

Nos falta ver que ocurre si $k=0$. Pero en ese caso el sistema queda reducido a $\begin{cases} x+y=1 \\ 0=-2 \\ x+y=1 \end{cases}$ y vemos que la segunda ecuación no tiene sentido.



