

**MT1 - Tema 3.1: Geometría: Trigonometría.  
Razones trigonométricas. Forma polar de un  
número complejo**



**Geometría: Trigonometría. Razones trigonométricas.  
Forma polar de un número complejo**

## **Matemáticas I**

**1º Bachillerato**

**Contenidos**

**Geometría**

**Trigonometría. Razones trigonométricas. Forma polar de un  
número complejo**

# 1. Introducción: Ángulos

---

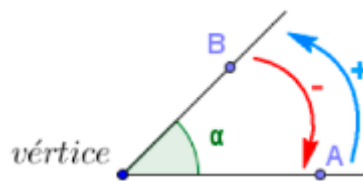
## ¿Qué es un ángulo?

Si una mesa tiene esquinas, los lados de la mesa formarán un ángulo.



Imagen de sferrairo1968 en [Pixabay](#). Licencia [CC](#)

Un ángulo es la región del plano comprendida entre dos semirrectas con origen común. El ángulo es positivo si se desplaza en sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj y negativo en caso contrario.



## ¿Cómo se miden los ángulos?

En el Sistema Internacional la unidad de medida es el radián.



### Importante

---

Un radián es el ángulo que limita un arco de circunferencia cuya longitud es igual al radio de la circunferencia. La siguiente animación te permitirá hacerte una idea intuitiva de qué es un radián.

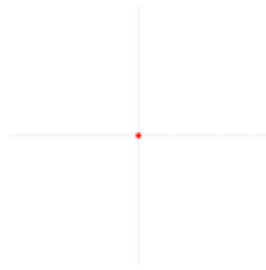


Imagen de Lucas V. Barbosa en [Wikimedia Commons](#). Licencia [CC](#)

El radián es una unidad sumamente útil para medir ángulos, puesto que simplifica los cálculos, ya que los más comunes se expresan mediante sencillos múltiplos o divisores de  $\pi$ .

---

## Otras unidades de medida

Los ángulos, al igual que hacíamos con el tiempo, se pueden medir en el sistema sexagesimal que aunque sus unidades no pertenezcan al SI, sí están autorizadas.

Grado sexagesimal ( $^\circ$ ) es la amplitud del ángulo resultante de dividir la circunferencia en 360 partes iguales. Cada grado se divide en 60 minutos ( $'$ ) y, cada minuto, en 60 segundos ( $''$ ).

- Si queremos pasar de radianes a grados:

$$\text{grados} = \frac{180}{\pi} \text{radianes}$$

- Si queremos pasar de grados a radianes:

$$\text{radianes} = \frac{\pi}{180} \text{grados}$$

En la siguiente lista de reproducción, te ofrecemos 4 vídeos en los que se practica el cambio de grados a radianes y viceversa:

[Enlace a recurso reproducible >> https://www.youtube.com/embed/videoseries?list=PLs4lpFZkmuXVheUIOwOGc29WyQsCj6SS5](https://www.youtube.com/embed/videoseries?list=PLs4lpFZkmuXVheUIOwOGc29WyQsCj6SS5)

Lista de reproducción de vídeos de [lasmaticas.es](#) alojados en [Youtube](#)



## Reflexiona

---

Usando las fórmulas anteriores, averigua un radián cuántos grados son. Expresa el resultado en grados, minutos y segundos.

Un radián son  $57^{\circ} 17' 44''$ . Recuerda que para pasar de forma incompleja a compleja, pasamos de una unidad a la siguiente inferior multiplicando por 60.

---



## Para saber más

---

Todas las calculadoras científicas nos permiten trabajar con grados sexagesimales (modo deg) o con radianes (modo rad). En el siguiente tutorial, viene explicado cómo hacerlo:

[Enlace a recurso reproducible >> https://www.youtube.com/embed/Bno4V6dZy\\_o](https://www.youtube.com/embed/Bno4V6dZy_o)

calculadora en modo radianes



Video de profesor10demates alojado en [Youtube](https://www.youtube.com)

---

## 2. Trigonometría. Conceptos básicos

---

Antes de que lleguen las lluvias y acabe el buen tiempo, tengo que pintar la fachada de casa. Ahora ya no se montan andamios, es más moderno, económico y cómodo utilizar pequeñas grúas elevadoras.

El problema es elegir la más idónea entre la gran variedad de modelos que existe en el mercado. Como es lógico, no me gustaría que se me disparara el presupuesto. Las más baratas son las de un solo brazo articulado, las denominadas **plataformas elevadoras telescópicas**.

El pintor que me va a realizar el trabajo me ha dicho que consultara a varias empresas de alquiler de maquinaria. Ya lo he hecho, y les he informado de las medidas de la fachada de mi casa, un rectángulo de 8 metros de ancho y 10 de alto.

En casi todas ellas me han recomendado la plataforma más básica, además es la más económica. El brazo extendido alcanza una **longitud máxima de 11 metros**, y puede abrirse hasta un **ángulo de 60°** respecto de la horizontal.

Me han asegurado que con esos datos no tendré ningún problema para llegar a cualquier rincón de la fachada de mi casa. El pintor también me lo ha confirmado, es el modelo que más se utiliza.

No sé, tengo que pensar y ver si es cierto lo que me dicen. Esto de los ángulos y las alturas lo tengo un poco olvidado



Imagen de Paco en [Pixabay](#). Licencia [Pixabay](#).

## 2.1. Razones trigonométrica de un ángulo agudo

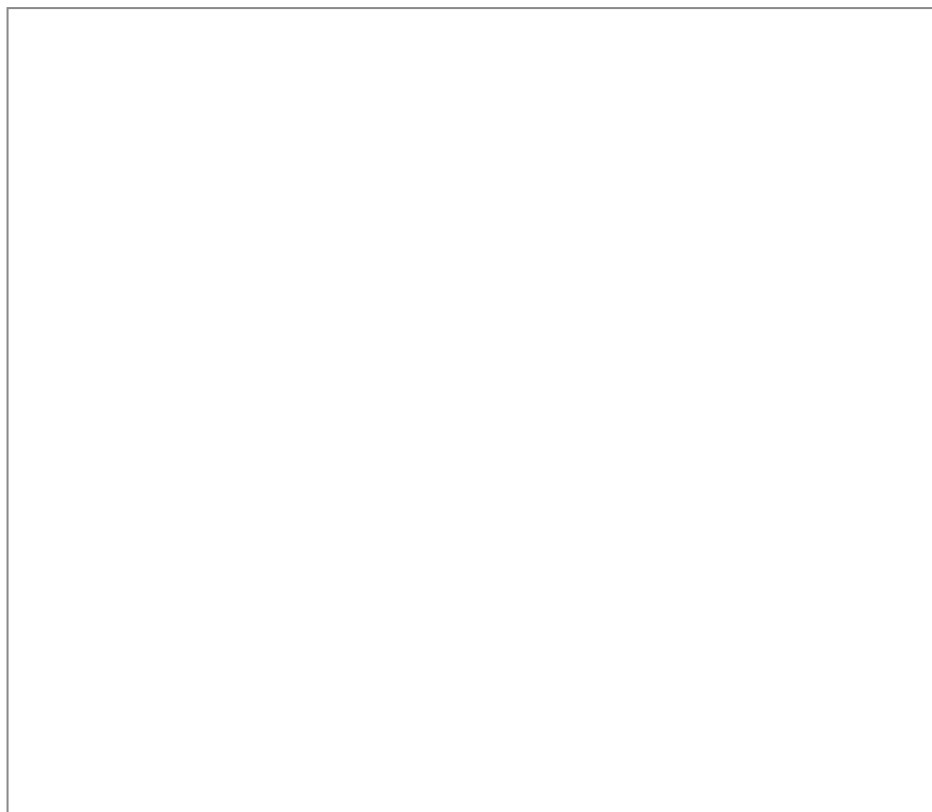
---

Seguimos con el alquiler de la grúa para pintar la fachada.

En la siguiente escena puedes manipular tanto el ángulo del brazo como la longitud. El punto naranja representa la base de la grúa, y el rojo la plataforma. Si marcas la casilla del rótulo "Muestra altura", aparecerá representada la altura que alcanza la plataforma.

No cabe duda de que a más ángulo y mayor longitud del brazo, más altura alcanzará la plataforma. La cuestión es cómo averiguar la altura conociendo el ángulo y la longitud del brazo. Aquí es donde entra en acción la trigonometría.

<https://www.geogebra.org/material/iframe/id/aDFrz4DF/width/467/height/404/border/888888/smb/false/stb/false/stbl>



En esta otra escena aparece representado un [triángulo rectángulo](#) ABC. Puedes modificar la amplitud de uno de los [ángulos no rectos](#) (mueve el ángulo  $\alpha$ ), y la del cateto contiguo a él (para ello, mueve el punto C).

¿Habrà alguna relación entre la longitud de  $\alpha$ , y la de los lados del triángulo rectángulo? Si así fuera, ya podríamos calcular la altura de la plataforma de la grúa.



## Comprueba lo aprendido

En la escena anterior mueve el control del ángulo para que  $\alpha = 30^\circ$ . Mueve el punto C, y completa los espacios que aparecen a continuación.

Escribe todas las longitudes con los decimales que indica la escena.

Longitud del cateto contiguo a $\alpha$ , $\overline{AC}$	Longitud de la hipotenusa $\overline{AB}$	Longitud del cateto opuesto a $\alpha$ , $\overline{BC}$	Cociente entre el cateto opuesto y la hipotenusa $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$
12	13,856	6,928	<input type="text"/>
14	16,166	<input type="text"/>	<input type="text"/>
20	<input type="text"/>	11,547	<input type="text"/>
28	<input type="text"/>	<input type="text"/>	0,5

Podemos afirmar que fijado el ángulo  $\alpha$  en  $30^\circ$ , para cualquier triángulo rectángulo que construyamos sobre él, la relación que existe entre el cateto  y la  es igual a .



## Reflexiona

a) Ahora fija como ángulo  $\alpha = 40^\circ$ . Haz una tabla similar a la anterior. ¿Cuál sería ahora ese valor constante entre el cociente del cateto opuesto a  $40^\circ$  y la hipotenusa?

b) ¿Y si tomáramos  $\alpha = 55^\circ$ ?

a) Para  $40^\circ$ , el valor constante del cociente entre el cateto opuesto y la hipotenusa es 0,6427 aproximadamente. Debes tener en cuenta que las longitudes del cateto y la hipotenusa también son aproximadas, de ahí la pequeña variación que existe.



b) Para  $55^\circ$ , dicho valor constante es 0,8191.

Los tres ángulos con los que hemos trabajado en las autoevaluaciones anteriores,  $30^\circ$ ,  $40^\circ$  y  $55^\circ$ , son menores que el ángulo recto. Es decir, son **ángulos agudos**, pues están comprendidos entre  $0^\circ$  y  $90^\circ$ .

A continuación definiremos las **razones trigonométricas** de un ángulo agudo, es decir, el seno, coseno y tangente.

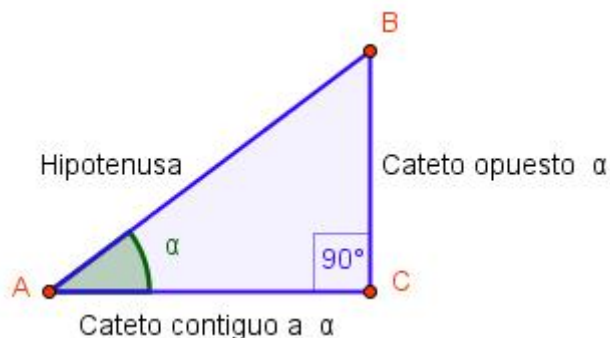


## Importante

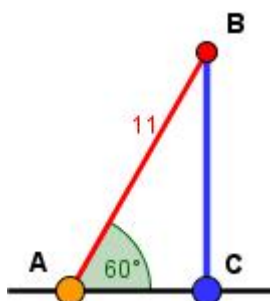
Para un ángulo agudo  $\alpha$  se define el **seno** de  $\alpha$ , se escribe **sen  $\alpha$** , como el **cociente entre el cateto opuesto a  $\alpha$  y la hipotenusa** del triángulo rectángulo ABC construido sobre  $\alpha$ .

$$\text{sen } \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$$

Como hemos podido comprobar, el valor del seno de  $\alpha$  no depende del tamaño del triángulo ABC.



## Reflexiona



Hagamos memoria. La fachada de mi casa medía 8 metros de largo y 10 de alto. La plataforma más económica se podía abrir hasta un máximo de  $60^\circ$  y el brazo alcanzaba un máximo de 11 metros.

¿Puedo pintar la fachada con esa grúa? ¿Alcanza hasta los 10 metros?

Lo que queremos saber es la altura máxima que alcanza la grúa. Es decir, la longitud del segmento  $\overline{BC}$  para un ángulo  $\alpha$  de  $60^\circ$  y una longitud del brazo de

11 metros.

$\text{sen } 60^\circ = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BC}}{11}$ , luego despejando  $\overline{BC} = 11 \cdot \text{sen } 60^\circ = 11 \cdot 0,866 = 9,52$

Por tanto, la altura máxima que alcanza la plataforma es de 9,52 metros.

Sí puedo escoger esa grúa, pues la altura media de una persona son 1,65 metros, lo que permite alcanzar los 10 metros de altura de la facha de mi casa.

Con un proceso muy similar al del seno se construye el **coseno** y la **tangente** de un ángulo agudo.

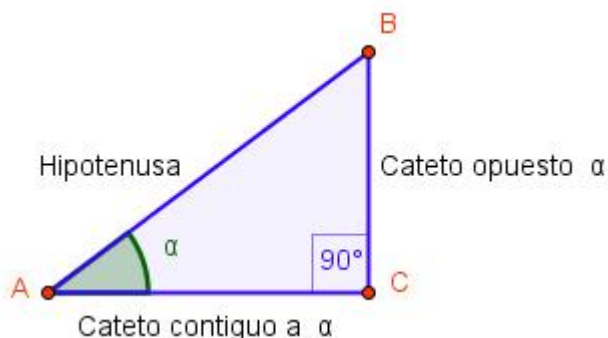
En el caso del **coseno**, una vez construido el triángulo rectángulo sobre el ángulo, realizamos el cociente entre el cateto contiguo y la hipotenusa.

Para la **tangente**, el cociente que se realiza es entre el cateto opuesto y el cateto contiguo

Al igual que ocurría con el seno, el coseno y la tangente de un ángulo **no dependen** del tamaño del triángulo rectángulo que se construya sobre él.



## Importante



Para un ángulo agudo  $\alpha$  se define el **coseno** de  $\alpha$ , se escribe **cos  $\alpha$** , como el **cociente entre el cateto contiguo a  $\alpha$  y la hipotenusa** del triángulo rectángulo ABC construido sobre  $\alpha$ .

$$\cos \alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$$

De manera similar, se define la **tangente** de  $\alpha$ , se escribe **tg  $\alpha$** , como el **cociente entre el cateto opuesto a  $\alpha$  y el cateto contiguo** del triángulo rectángulo ABC construido sobre  $\alpha$ .

$$\text{tg } \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$$



## Curiosidad

---

Muchas de las matemáticas de la antigüedad entraron en Europa a través de las traducciones que se hacían del árabe al latín en las bibliotecas de la ciudad española de Toledo, durante los siglos XI y XII.

Y es precisamente el traductor inglés **Roberto de Chester**, que trabajó en España hacia la mitad del siglo XII, quien utiliza por primera vez la expresión "sinus" para referirse al seno de un ángulo.

En las matemáticas hindú se utilizó el término "jiva" para designar al seno, posteriormente los árabes lo transforman en "jiba". Pero en árabe también existe la palabra "jaib", cuyo significado es bahía o ensenada.

Y es ahí cuando Roberto de Chester confunde ambas palabras, y traduce "jiva" por "sinus", que en latín significa precisamente bahía.

---



## Para saber más

Hasta las décadas de los 70 y 80 del siglo pasado, si una persona quería hallar el seno u otra razón trigonométrica de un ángulo, debía utilizar las tablas trigonométricas. Como su propio nombre indica, eran un larga y abigarrada lista que comprendía ángulos desde  $0^\circ$  a  $45^\circ$ , con su correspondiente seno.


Tecla SHIFT,  
segunda función



Teclas de razones  
trigonométricas

Si el ángulo del que se quería saber el seno estaba incluido en la lista, la respuesta era rápida. Pero, si eso no era así, empezaba un calvario de operaciones y fórmulas hasta llegar al valor buscado.

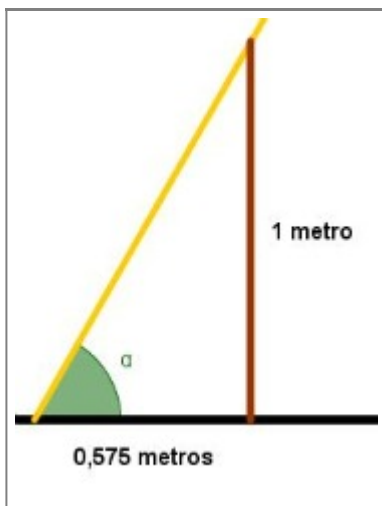
Gracias a la aparición y popularización de las calculadoras científicas, en la actualidad, para hallar la razón trigonométrica de un ángulo sólo tenemos que pulsar dos o tres teclas, y en décimas de segundos, tenemos la respuesta deseada.

Por ejemplo, para calcular el seno del ángulo de  $32^\circ$ , basta con pulsar la tecla  y después 32. En el siguiente apartado veremos esto con más detenimiento.

---



## Reflexiona



En la ciudad andaluza de Osuna, el 9 de abril de 2010 el ángulo declinación solar  $\delta$  era  $7,3166^\circ$ . Halla la latitud de dicha ciudad, si a las doce del mediodía hora solar, se ha efectuado la siguiente observación para conocer  $\alpha$ .

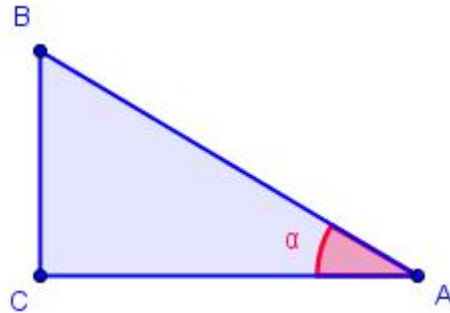
Se ha colocado un palo de longitud 1 metro, verticalmente y se ha medido la sombra que proyectaba sobre el suelo, 0,575 metros.

En primer lugar, calculemos el ángulo  $\alpha$ ,  $\text{tg}\alpha = \frac{1}{0,575}$ . Utilizando la calculadora científica obtenemos que  $\alpha = 60,10^\circ$ . Por tanto  $\Phi = 90^\circ + 7,3166^\circ - 60,10^\circ = 37,21^\circ$ . Que, aproximadamente, es la latitud de Osuna.

## 2.2. Relaciones fundamentales

---

¿Te acuerdas de Sinuhé? El pobre, aún irá camino de Asuán. Su jefe, Erastótenes, no coincidió con Pitágoras pues vivió casi cuatro siglos después que él. Pero seguro que, como hombre sabio y director de la biblioteca de Alejandría, era conocedor de su obra y por tanto del famoso teorema que lleva su nombre, el **teorema de Pitágoras**.



El teorema de Pitágoras dice que en un triángulo rectángulo ABC, hay la siguiente relación entre las longitudes de sus lados:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$$

Es decir, la célebre frase: **el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos**.



### Comprueba lo aprendido

---

Recuerda, en la definición del seno, coseno y tangente no influía el tamaño del triángulo rectángulo que se construía sobre el ángulo no recto  $\alpha$ .

Supongamos que la hipotenusa del triángulo ABC anterior mide 1. Es decir  $\overline{AB} = 1$ .

Completa, donde corresponda, con sen, cos y tg, los siguientes espacios en blanco.

$\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$

$\alpha = \overline{AC}$

$\alpha = \overline{BC}$

Basta con que apliques las definiciones dadas en el apartado anterior. Ten en cuenta que la hipotenusa vale en este caso 1.



## Importante

De la solución de la Autoevaluación anterior podemos deducir las siguientes dos igualdades.

$$1) \operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1$$

$$2) \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha}$$

Las dos igualdades anteriores son dos formas elegantes de relacionar las razones trigonométricas de un ángulo. En la primera se relacionana el seno y el coseno. Es decir, si conocemos una de ellas, podemos conocer la otra.

En la segunda, se relacionan las tres.

En la actualidad, y gracias al ya comentado uso de las calculadoras científicas, el manejo de estas fórmulas ha quedado bastante obsoleto. Cuando aún era necesario el uso de tablas para conocer las razones trigonométricas de un ángulo, el manejo de fórmulas como estas, y otras que veremos más adelante, era una herramienta muy útil.



## Comprueba lo aprendido

[https://proyectodescartes.org/EDAD/materiales\\_didacticos/EDAD\\_4eso\\_trigonometria-JS-LOMCE/relaciones\\_fundamentales.htm](https://proyectodescartes.org/EDAD/materiales_didacticos/EDAD_4eso_trigonometria-JS-LOMCE/relaciones_fundamentales.htm)

¿Has aprendido las relaciones fundamentales? Arrastra las razones trigonométricas y los números inferiores a los recuadros para que resulten las dos relaciones fundamentales.

?

=

+

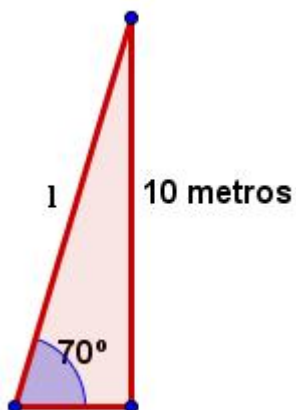
=

sen α
cos α
tg α
2
1

Escena de María José García Cebrian / Consolación Ruiz Gil en [Proyecto Descartes](#). Licencia [CC](#)



## Reflexiona



Volvemos al alquiler de plataformas para pintar fachadas de casas. Ahora nos preguntamos qué longitud mínima ha de tener el brazo telescópico de una grúa que se puede abrir hasta un ángulo de  $70^\circ$ , para poder alcanzar una altura de 10 metros.

Seguro que te ayudará a encontrar la solución de este problema realizar un dibujo esquemático de la situación planteada.

Para hallar la longitud mínima del brazo,  $l$ , basta con utilizar la tangente de  $70^\circ$ .  $\text{sen } 70^\circ = \frac{10}{l}$ , por tanto,  $l = \frac{10}{\text{sen } 70^\circ}$ . Hallamos la  $\text{sen } 70^\circ$  con la calculadora, operamos y obtenemos  $l = 10,64$  metros, aproximadamente.



## Importante

A la inversa del seno de un ángulo  $\alpha$ , se le llama la **cosecante** del ángulo, y se escribe **cosec  $\alpha$** .

$$\text{cosec } \alpha = \frac{1}{\text{sen } \alpha}$$

De manera similar se definen la **secante** y **cotangente**, como la inversa del coseno y de la tangente respectivamente.

$$\text{sec } \alpha = \frac{1}{\text{cos } \alpha}, \text{ y } \text{cotg } \alpha = \frac{1}{\text{tg } \alpha}$$



## Para saber más

---

En varias ocasiones, hemos tenido que buscar un ángulo conocida su razón trigonométrica, es decir, hemos tenido que utilizar la tecla SHIFT de la calculadora científica.

A estos procesos se les llama **arcos**.

Por ejemplo, saber qué ángulo agudo tiene por seno 0,42, se le llama el **arco seno** de 0,42, y se escribe **arcsen 0,42 = 24,83°**.

De foma parecida se definen el **arco coseno**, y se escribe **arccos  $\alpha$** , y la **arco tangente**, que escribiremos **arctg  $\alpha$** .

Veamos un vídeo de cómo hacer estos cálculos:

[Enlace a recurso reproducible >> https://www.youtube.com/embed/EisNLrOddAw](https://www.youtube.com/embed/EisNLrOddAw)

Vídeo de Matemáticas Reales alojado en [Youtube](#)

---



### 3. Razones trigonométricas de cualquier ángulo

---

Hasta ahora, todos los ángulos que hemos visto han sido agudos, menores de  $90^\circ$ . Pero claro, con esto no basta. Ha llegado el momento de ampliar el abanico de ángulos, de hacer giros más amplios. Incluso de dar vueltas y más vueltas.



Imagen de Free-Photos en [Pixabay](#). Licencia [Pixabay](#).

Estos ángulos mayores que un ángulo recto también tienen sus razones trigonométricas.

## 3.1. Circunferencia goniométrica

---

Los ángulos se pueden clasificar por **cuadrantes**. Los del **primer cuadrante** son los ya conocidos por nosotros ángulos **agudos**. Los del **segundo cuadrante**, los que miden entre el ángulo recto ( $90^\circ$ ) y el llano ( $180^\circ$ ), son los llamados ángulos **obtusos**. Por último, están los del tercer y cuarto cuadrante.



Imagen de StockSnap en [Pixabay](#). Licencia [Pixabay](#).

Cualquier ángulo, pertenezca al cuadrante que sea, tiene asociadas unas razones trigonométricas, ya sabes, el seno, coseno y tangente. Si quieres comprobar que es verdad, basta con que utilices tu calculadora científica. Por ejemplo, puedes ver que el  $\cos 150^\circ = -0,866...$  o el  $\sin 200^\circ = -0,3420...$

Para definir las razones trigonométricas de ángulos que no son agudos, utilizaremos la circunferencia goniométrica, es decir, una circunferencia de radio 1.

La escena que aparece a continuación permite conocer las razones trigonométricas de cualquier ángulo. Los tres puntos naranjas se utilizan para variar el ángulo, mover el vértice hasta el centro de la circunferencia y colocar el primer lado en posición horizontal, respectivamente. El punto gris se utiliza para obtener en la circunferencia el ángulo fijado con los puntos naranjas.

La longitud del segmento rojo representa el coseno del ángulo, la del azul el seno y la del verde, la tangente.

<https://www.geogebra.org/material/iframe/id/2615885/width/505/height/270/border/888888/rc/false/ai/false/sdz/false>



**Comprueba lo aprendido**

Utiliza la escena anterior para completar los siguientes espacios en blanco.

- a) El coseno de un ángulo del segundo cuadrante tiene signo .
  - b) La tangente de un ángulo del tercer cuadrante tiene signo .
  - c) El seno de un ángulo del cuarto cuadrante tiene signo .
  - d) Un ángulo con seno y coseno negativo, pertenece al  cuadrante.
- 

En ocasiones, la respuesta que nos devuelven las calculadoras científicas cuando sabemos qué ángulo tiene una razón trigonométrica conocida, no es del todo correcta.

Por ejemplo, si nos preguntamos por qué ángulo del tercer cuadrante tiene como coseno  $-0,34202$ , qué resultado obtenemos? En la **fx-82ES**, si hacemos **SHIFT COS  $-0,34202$**  obtenemos  $110^\circ$ . ¿Es del tercer cuadrante? Claramente no, es del segundo. ¿Qué hacemos entonces?

Antes de dar la respuesta, veamos la siguiente escena. En ella se explica cómo relacionar las razones trigonométricas del segundo, tercer y cuarto cuadrante con las del primero.

Gira el punto y verás cómo a cada ángulo de esos tres últimos cuadrantes se le asocia uno del primero. También irán apareciendo cómo se relacionan las razones trigonométricas de esos dos ángulos.

<https://www.geogebra.org/material/iframe/id/2615893/width/705/height/270/border/888888/rc/false/ai/false/sdz/false>



## Caso práctico

Determina el ángulo del tercer cuadrante que tiene como coseno  $-0,34202$ .

Juega un poco con la escena anterior y mira cómo se relacionan las razones trigonométricas del tercer y primer cuadrante.

Según las igualdades que van apareciendo en la escena, el coseno de un ángulo del tercer cuadrante es igual a menos el coseno de uno del primero. Veamos qué ángulo del primer cuadrante tiene por coseno  $0,34202$ . Hacemos **SHIFT COS  $0,34202$** , y nos sale  $70^\circ$ .

Movemos el punto en la escena y vemos que  $\cos 250^\circ = -\cos(250^\circ - 180^\circ) = -\cos 70^\circ = -0,34202$ . Luego  $250^\circ$  es el ángulo que buscamos.



## Comprueba lo aprendido

---

Con la ayuda de la escena anterior y de la calculadora seguro que no te será difícil completar los siguientes espacios en blanco.

a)  $\sin \boxed{\phantom{000}}^\circ = -0,5$  siendo un ángulo del tercer cuadrante.

b)  $\tan \boxed{\phantom{000}}^\circ = 0,2679491$  y es un ángulo del segundo cuadrante.

c)  $\cos \boxed{\phantom{000}}^\circ = 0,7660444$  y pertenece al cuarto cuadrante.

Como pistas te vamos a dar las siguientes, el primer ángulo está relacionado con  $30^\circ$ , el segundo con  $15^\circ$  y el último con  $40^\circ$ .

---

## 3.2. Razones trigonométricas: operaciones con ángulos

---

*"Esta es mi décima travesía de Cádiz a la Habana, pero la primera como segundo oficial del cargero. Por fin estoy preparado y autorizado para utilizar el [sextante](#) e indicar el rumbo de la nave. Cinco años de preparación y duro aprendizaje.*

*Hallar el ángulo que determinan el Sol o la Osa Mayor con respecto al horizonte, consultar las tablas trigonométricas, realizar los cálculos aplicando las enrevesadas fórmulas, averiguar la [latitud](#) o la más complicada [longitud](#), fijar el rumbo, determinar las millas que llevamos navegadas o las que nos faltan para llegar a Cuba. Todo lo anterior corresponde a mis atribuciones de capitán de fragata. Claro, siempre es necesario contar con el visto bueno del Comandante, pero tengo comprobado que confía en mí."*

De esta forma razonaba un joven Capitán de fragata de la flota española que realizaba la travesía atlántica de la península a América, a mediados del siglo XIX.



Imagen de 851878 en [Pixabay](#). Licencia [Pixabay](#)

Y toda esa preparación y cálculos fueron necesarios hasta bien entrado el siglo XX. Pero gracias a la aparición de aparatos electrónicos, radares, calculadoras, ordenadores, satélites artificiales, comunicaciones digitales, GPS ... esos conocimientos han quedado para el recuerdo.

Ya hemos visto que la calculadora científica nos facilita y agiliza el trabajo con las razones trigonométricas de un ángulo. En este apartado veremos algunas de las fórmulas que nuestro joven marino seguro que utilizó para conocer el seno o la tangente de esos ángulos de inclinación que el Sol o las estrellas, determinaban con el horizonte.



**Importante**

---

Razones trigonométricas de la **suma de dos ángulos**  $\alpha$  y  $\beta$

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$$



## Reflexiona

Nuestro joven oficial le toca guardia en la estrellada noche altántica. Coge el sextante y para saber a qué latitud navegan, mide el ángulo de elevación de la Estrella Polar. Sus cálculos le indican que están a  $55^\circ$  grados norte.

Para saber los grados que se han desviado de su ruta, necesita conocer el seno de esa latitud. Mira en las tablas y comprueba que en ellas sólo aparecen los senos hasta  $45^\circ$ .

¿Podríamos ayudarles aplicando alguna de las fórmulas anteriores? Por ejemplo, si escribimos  $55^\circ$  como  $30^\circ+25^\circ$ .

Halla el  $\operatorname{sen} 55^\circ$  aplicando la primera fórmula anterior. Utiliza la calculadora para las razones trigonométricas de  $30^\circ$  y  $25^\circ$ . Para terminar, halla el  $\operatorname{sen} 55^\circ$  con la calculadora, y comprueba si coinciden los resultados.

$\operatorname{sen} 55^\circ = \operatorname{sen} (30^\circ+25^\circ) = \operatorname{sen} 30^\circ\cdot\cos 25^\circ + \cos 30^\circ\cdot\operatorname{sen} 25^\circ = 0,5\cdot 0,9063 + 0,8660\cdot 0,4226 = 0,8191216$ . Así tendría que calcular el seno el marino, apoyándose en  $30^\circ$  y  $25^\circ$ , o cualquier otra descomposición de  $55^\circ$ .

Usando la calculadora  $\operatorname{sen} 55^\circ = 0,8191520$ . Es igual en las cuatro primera cifras decimales. El error cometido es del orden de  $10^{-5}$ .



## Importante

Veamos ahora las fórmulas análogas a las anteriores para la **diferencia de dos ángulos**.

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$$



## Comprueba lo aprendido

Vamos a comprobar que  $\operatorname{sen} 45^\circ = \cos 45^\circ$ , utilizando la primera fórmula anterior.

Completa los espacios blancos.

$$\operatorname{sen} 45^\circ = \operatorname{sen}(\boxed{\phantom{00}}^\circ - 45^\circ) = \operatorname{sen} \boxed{\phantom{00}}^\circ \cdot \boxed{\phantom{00}} 45^\circ - \boxed{\phantom{00}} 90^\circ \cdot \operatorname{sen} \boxed{\phantom{00}}^\circ = \boxed{\phantom{00}} \cdot \cos 45^\circ - \boxed{\phantom{00}} \cdot \operatorname{sen} 45^\circ = \cos 45^\circ$$

Sólo tienes que aplicar la fórmula.



## Importante

Por último:

Las razones trigonométricas del **ángulo doble**.

$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \cdot \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$$

Las razones trigonométricas del **ángulo mitad**:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}}$$



## Reflexiona

El seno de  $180^\circ$  vale 2, está claro.  $\operatorname{sen} 180^\circ = \operatorname{sen} (2 \cdot 90^\circ) = 2 \cdot \operatorname{sen} 90^\circ = 2 \cdot 1 = 2$ .

Pero si lo hago con la calculadora me sale que es cero. ¿En qué me he equivocado?

Evidentemente, en la fórmula,  $\sin 180^\circ = \sin (2 \cdot 90^\circ) = 2 \cdot \sin 90^\circ \cdot \cos 90^\circ = 2 \cdot 1 \cdot 0 = 0$ . Ahora sí.

---

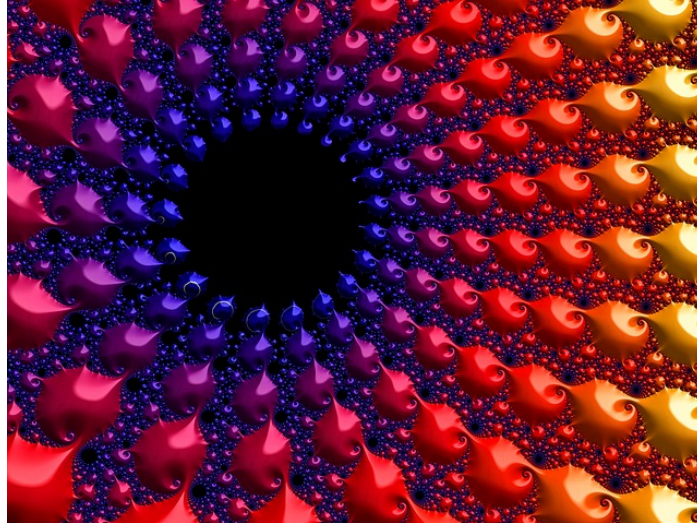


## 4. Forma polar de un número complejo.

### Representación gráfica

---

La trigonometría tiene muchas aplicaciones a distintos campos, como por ejemplo a la aritmética. En la primera unidad del curso estudiamos los números complejos en su forma binómica, veamos ahora otra forma de expresión: la forma polar.



Fotografía de 3093594 en [Pixabay](#), Licencia, [CC0](#)

Para sumar y restar complejos es más cómodo utilizar la forma binómica, mientras que para multiplicar, dividir o calcular potencias es mucho más conveniente utilizar la forma polar. Por eso en este apartado solo hablaremos de estas operaciones, pero antes veamos en qué consiste.

La siguiente escena de Geogebra te muestra la representación gráfica del número complejo  $z = 5^{36,87^\circ}$  (en azul). Si mueves el punto azul a lo largo del plano podrás ver la representación gráfica de otros números complejos (recuerda que cada punto del plano representa uno). En la parte inferior puedes ver los cálculos que tienes que realizar para hallar los valores necesarios para representar  $z$ , así como su forma binómica.

<https://www.geogebra.org/material/iframe/id/TRJXSSMg/width/662/height/444/border/888888>



### Importante

---

Un número complejo  $z = a + bi$  puede expresarse en función de su módulo  $|z|$ , que designaremos por  $r$ , y del ángulo  $\alpha$  que forma el vector  $(a, b)$  con el semieje positivo del plano complejo, de la **forma polar**:

$$z = r_{\alpha}$$

Donde:

$$r = \text{módulo de } z = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$\alpha$  se conoce también como el argumento de  $z$  ( $\arg(z)$ ) y se halla con la calculadora científica de la siguiente forma  $\alpha = \arctg\left(\frac{b}{a}\right)$ . Siendo  $\alpha \in [0^\circ, 360^\circ)$ .



## Ejercicio Resuelto

Escríbase el número complejo  $z = -1 + \sqrt{3}i$  en forma polar.

$$z = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$\alpha = \arctg\left(\frac{\sqrt{3}}{-1}\right) = 120^\circ$$

Podemos escribir  $z$  como:  

$$z = 2_{120^\circ}$$



## Importante

Si tenemos dos números complejos  $z = r_{\alpha}$  y  $w = s_{\beta}$  el producto  $z \cdot w$  es:

$$z \cdot w = r \cdot s_{\alpha + \beta}$$

Al efectuar el producto el argumento resultante ( $\alpha + \beta$ ) puede ser mayor que  $360^\circ$ , en ese caso hay que restarle el correspondiente múltiplo de  $360^\circ$  para que el argumento esté en el intervalo de definición  $[0^\circ, 360^\circ)$ .



## Ejercicio Resuelto

Multiplicar  $z = 2_{20^\circ}$  y  $w = 3_{15^\circ}$ .

$$z \cdot w = 2_{20^\circ} \cdot 3_{15^\circ} = (2 \cdot 3)_{20^\circ + 15^\circ} = 6_{35^\circ}$$



## Importante

Si tenemos dos números complejos  $z = r_{\alpha}$  y  $w = s_{\beta}$  el cociente  $\frac{z}{w}$  es:

$$\frac{z}{w} = \frac{r}{s}_{\alpha - \beta}$$

Al efectuar el cociente, el argumento resultante puede ser menor que  $0^\circ$ . En ese caso hay que sumarle el correspondiente múltiplo de  $360^\circ$  para que el argumento esté en el intervalo de definición  $[0^\circ, 360^\circ)$ .



## Ejercicio Resuelto

Dividir  $z = 6_{80^\circ}$  y  $w = 2_{30^\circ}$ .

$$\frac{z}{w} = \left(\frac{6}{2}\right)_{80-30^\circ} = 3_{50^\circ}$$



## Importante

Si tenemos el número complejo  $z = r_{\alpha}$  la potencia  $z^n$  es:

$$z^n = r^n_{n\alpha}$$

Al efectuar la potencia el argumento resultante ( $n\alpha$ ) puede ser mayor que  $360^\circ$ , en ese caso hay que restarle el correspondiente múltiplo de  $360^\circ$  para que esté en el intervalo de definición  $[0^\circ, 360^\circ)$ .



## Ejercicio Resuelto

Hallar la potencia cuarta de  $z = 2_{25^\circ}$ .

$$z^4 = 2^4_{4 \cdot 25} = 16_{100^\circ}$$



## Para saber más

Existen otras formas de expresar un número complejo. Un número complejo  $z=a+bi$  puede expresarse en función de su módulo  $|z|$ , que designaremos por  $r$ , y del ángulo  $\alpha$  que forma el vector  $(a,b)$  con el semieje positivo del plano complejo, de la **forma trigonométrica**:

$$z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

Donde:

$$r=\text{módulo de } z=|z|=\sqrt{a^2+b^2}$$

$\alpha$  se conoce también como el argumento de  $z$  ( $\arg(z)$ ) y se halla con la calculadora científica de la siguiente forma:  $\alpha = \arctg\left(\frac{b}{a}\right)$ . Siendo  $\alpha \in [0, 360^\circ)$ .

## Resumen

---

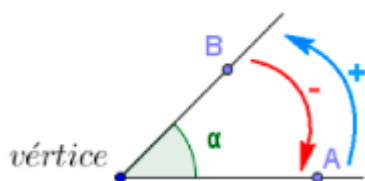


### Importante

---

#### Ángulo plano

Un ángulo es la región del plano comprendida entre dos semirrectas con origen común. El ángulo es positivo si se desplaza en sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj y negativo en caso contrario.



Para medir ángulos empleamos grados o radianes. Un radián es el ángulo cuyo recorrido es igual al radio con que ha sido trazado

1 grado

=

$\frac{\pi}{180}$  radianes

1 radián

=

$\frac{180}{\pi}$  grados



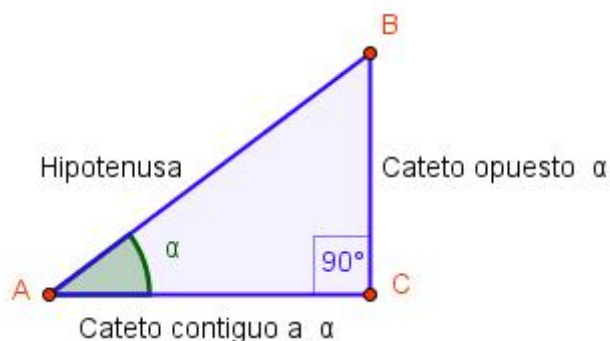
### Importante

---

Para un ángulo agudo  $\alpha$  se define el **seno** de  $\alpha$ , se escribe **sen  $\alpha$** , como el **cociente entre el cateto opuesto a  $\alpha$  y la hipotenusa** del triángulo rectángulo ABC construido sobre  $\alpha$ .

$$\text{sen } \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$$

Para un ángulo agudo  $\alpha$  se define el **coseno** de  $\alpha$ , se escribe **cos  $\alpha$** , como el **cociente entre el cateto contiguo a  $\alpha$  y la hipotenusa** del triángulo rectángulo ABC construido sobre  $\alpha$ .



$$\cos \alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$$

De manera similar, se define la **tangente** de  $\alpha$ , se escribe **tg  $\alpha$** , como **el cociente entre el cateto opuesto a  $\alpha$  y el cateto contiguo** del triángulo rectángulo ABC construido sobre  $\alpha$ .

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$$

Como hemos podido comprobar, el valor del seno, coseno y tangente de  $\alpha$  no depende del tamaño del triángulo ABC.



## Importante

Relaciones fundamentales de la trigonometría.

$$1) \operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$2) \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}$$



## Importante

Razones trigonométricas de la **suma de dos ángulos  $\alpha$  y  $\beta$**

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$

Veamos ahora las fórmulas análogas a las anteriores para la **diferencia de dos ángulos**.

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$



## Importante

---

Las razones trigonométricas del **ángulo doble**.

$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \cdot \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$$

Las razones trigonométricas del **ángulo mitad**:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}}$$

---



## Importante

---

Un número complejo  $z = a + bi$  puede expresarse en función de su módulo  $|z|$ , que designaremos por  $r$ , y del ángulo  $\alpha$  que forma el vector  $(a, b)$  con el semieje positivo del plano complejo, de la **forma polar**:

$$z = r_{\alpha}$$

Donde:

$$r = \text{módulo de } z = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$\alpha$  se conoce también como el argumento de  $z$  ( $\arg(z)$ ) y se halla con la calculadora científica de la siguiente forma  $\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)$ . Siendo  $\alpha \in [0^\circ, 360^\circ)$ .

---

## Imprimible

---

Descarga aquí la versión imprimible de este tema.



---

Si quieres escuchar el contenido de este archivo, puedes instalar en tu ordenador el lector de pantalla libre y gratuito [NDVA](#).

---



# Aviso legal

---

Las páginas externas no se muestran en la versión imprimible

<http://www.juntadeandalucia.es/educacion/permanente/materiales/index.php?aviso#space>