INSTITUTO de ENSEÑANZAS a DISTANCIA de ANDALUCÍA

PAU

Mayores de 25 años

Contenidos

Matemáticas

Álgebra. El mundo de X: Expresiones Algebraicas

1. Polinomios y factorización: valor numérico de un polinomio. Operaciones con polinomios

El álgebra puede parecer, en ocasiones, algo abstracto y lejano, pero el álgebra tuvo sus inicios en necesidades cotidianas en diversas civilizaciones. La evolución de las matemáticas en general y el álgebra en particular se desarrolla gracias a estas necesidades. En documentos egipcios apreciamos ya problemas que se pueden resolver con lo que conocemos hoy día como ecuaciones. Aquí puedes observar un video, donde se aprecia un caso concreto.

1.1 Valor numérico de un polinomio.

En ocasiones, tenemos tan interiorizados ciertos conceptos que no apreciamos que estamos utilizando herramientas matemáticas. En todos los artículos que compramos, pagamos el impuesto sobre el valor añadido, el IVA, y para calcularlo, tenemos que realizar porcentajes y operaciones. Ten en cuenta, que el IVA a pagar en confección es del 21%, es decir, si queremos calcular el IVA pagado, calculamos dicha cantidad ¿Y si creamos una expresióin para calcular el IVA? Obviamente seria:

$$\text{IVA} = \frac{21 \cdot \text{Precio}}{100}$$

Si una tienda de moda veraniega, quiere vender un bañador a 25 €, el IVA que debe aplicarle es de $\text{IVA} = \frac{21 \cdot 25}{100} = 5{,}25$, por lo que precio final del bañador será de 30,25 €.

Importante

El valor numérico de un polinomio P(x) para el punto x = a, que se representa por P(a), es el resultado de sustituir la variable x por a y efectuar las operaciones.

Ejercicio resuelto

Recuerda que la expresión que relaciona el volumen de una esfera con su radio es

$$V = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3}$$

1. ¿Qué volumen tendría una esfera de radio 1?
2. ¿Y de radio 3?

Recuerda que debemos sustituir el valor deseado en el lugar de la x

Imagen en INTEF bajo CC

Mostrar retroalimentación

Veamos la resolución

1. Tan solo tenemos que sustituir r=1 en la expresión algebraica $V = \frac{4 \cdot \pi \cdot 1^3}{3} = \frac{4 \cdot \pi}{3}$
2. Actuando de manera análoga $V = \frac{4 \cdot \pi \cdot 3^3}{3} = 4 \cdot \pi \cdot 9 = 36 \cdot \pi$

Comprueba lo aprendido

Introduce el valor numérico del polinomio en la siguiente casilla:

El polinomio $P(x)=x^2-3x+8$ para x= 2 tiene un valor numérico de ☐

Enviar

Simplemente debemos sustituir x por el valor 2 y obtendras $P(2)=2^2-3\cdot 2+8=4-6+8=6$

Comprueba lo aprendido

El valor númerico del polinomio $P(x)=-2x^3+2x^2-2$ **para** $x=-2$ **es** -4.

Sugerencia

Verdadero Falso

Falso

El valor númerico es 22.

$$P(-2)=-2\cdot(-2)^3+2\cdot(-2)^2-2=-2\cdot(-8)+2\cdot 4-2=16+8-2=22$$

Comprueba lo aprendido

El valor numérico del polinomio $S(x)=-8x^2-4x+1$ para $x=-1$ es

- -3
- 5
- -5
- 0

¡Perfecto!

Inténtalo de nuevo. Ten cuidado con los signos.

Inténtalo de nuevo.

Inténtalo de nuevo.

Solution

1. Opción correcta
2. Incorrecto
3. Incorrecto
4. Incorrecto

Una vez que ya conoces el valor numérico de un polinomio, veremos las operaciones con polinomios. Al igual que operas con números naturales, enteros o reales, podemos trabajar con polinomios, sumando, restado, multiplicando y dividiendo estos.

Importante

SUMA Y RESTA DE POLINOMIOS

Para sumar o restar polinomios, tan solo debemos operar con los monomios que tengan la misma parte literal, recordando que la parte literal es la variable con su exponente.

Si pretendemos calcular la suma de los polinomios P(x) = x^2-4x+4 y Q(x) = $3x^2$+5x-3, simplemente sumamos los coeficientes de las partes literales P(x)+Q(x) = (1+3)x^2+(-4+5)x+(4-3) = $4x^2$+x+1.

También podemos colocar en vertical los sumandos y realizar la operación

$$\begin{array}{r} x^2-4x+4 \\ + \quad \\ 3x^2+5x-3 \\ \hline 4x^2+x+1 \end{array}$$

Para restar polinomios, actuamos de forma análoga, podemos restar los coeficientes de las partes literales o simplemente colocarlos de forma vertical y operar.

Si M(x) = x^3-3x+5 y N(x) = $2x^3$-x^2+4x-2 , el resultado de la resta es M(x)-N(x) = (1-2)x^3+(0-(-1))x^2+(-3-4)x+(5-(-2))=-x^3+x^2-7x+7. También podemos operar de forma vertical

$$\begin{array}{r} x^3 \qquad\quad -3x+5 \\ - \quad \\ 2x^3-x^2+4x-2 \\ \hline -x^3+x^2-7x+7 \end{array}$$

Comprueba lo aprendido

Si B(x) = $3x^3$-$3x^2$+4x-1 y A(x) = x^3-$6x^2$+4. Calcula C(x)=B(x) + A(x) y D(x) = B(x)-A(x). Rellena los siguientes huecos.

C(x) = ☐ x^3- ☐ x^2+ ☐ x+ ☐

D(x) = ☐ x^3+ ☐ x^2+ ☐ x- ☐

Enviar

No olvides que debes operar con los coeficientes de la parte literal.

Importante

MULTIPLICACIÓN DE POLINOMIOS

- Al multiplicar un monomio por un polinomio, tan solo debemos aplicar la propiedad distributiva.

$$3x^2\cdot(x^2-2x+5)=3x^4-6x^3+15x^2$$

- Si queremos multiplicar dos polinomios, aplicaremos reiteradamente la propiedad distribuitiva.

$$(3x^2+2x+1)\cdot(x^2-3)=3x^2\cdot(x^2-3)+2x\cdot(x^2-3)+1\cdot(x^2-3)=3x^4-9x^2+2x^3-6x+x^2-$$

Ejercicio resuelto

Calcula el producto de los polinomios

$P(x)=x^3-2x^2+x+1$ y $Q(x)=x^2-4x+2$

Mostrar retroalimentación

$$P(x)\cdot Q(x)=(x^3-2x^2+x+1)\cdot(x^2-4x+2)=$$
$$=x^3\cdot(x^2-4x+2)-2x^2\cdot(x^2-4x+2)+x\cdot(x^2-4x+2)+1\cdot(x^2-4x+2)=$$
$$=x^5-4x^4+2x^3-2x^4+8x^3-4x^2+x^3-4x^2+2x+x^2-4x+2=$$
$$=x^5-6x^4+11x^3-7x^2-2x+2$$

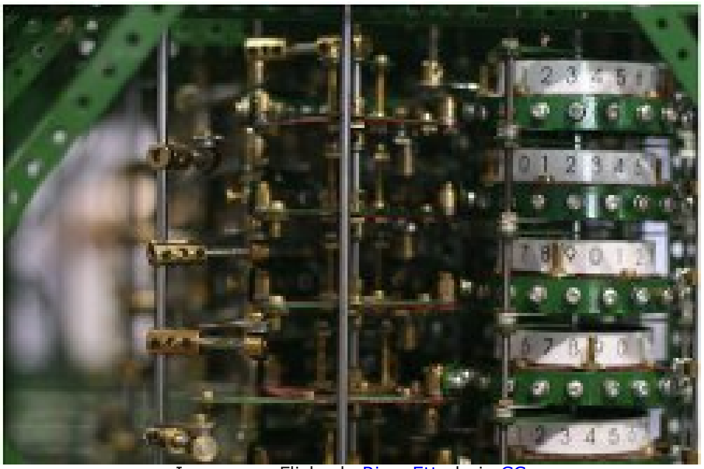

Imagen en Flickr de Ric e Ette bajo CC

Comprueba lo aprendido

El producto de los polinomios $P(x) = x^3 - x^2 + x - 1$ y $Q(x) = 2x^2 - 3$ es:

- $2x^5+2x^4-x^3-3x+3$
- $2x^5-2x^4-x^3+x^2-3x+3$
- $2x^5-2x^4-x^3+x^2-3x-3$
- $2x^5+2x^4-x^3+x^2-3x+3$

Ten cuidado con los signos.

!Correcto!

Ten cuidado con los signos.

Ten cuidado con los signos.

Solution

1. Incorrecto
2. Opción correcta
3. Incorrecto
4. Incorrecto

Reflexiona

Dados los polinomios A(x) = x^3-3, B(x) =x^2-3x+4 y C(x) = x+4, calcula A·B, A·C y B·C

Mostrar retroalimentación

A(x)·B(x)= $x^5-3x^4+4x^3-3x^2+9x-12$

B(x)·C(x)= $x^3+x^2-8x+16$

A(x)·C(x)= $x^4+4x^3-3x-12$

Importante

DIVISIÓN DE POLINOMIOS

- **División de monomios.**

Dividimos los coeficientes y las partes literales. Ejemplo $3x^5:2x^2=$ $\frac{3}{2}x^3$

- **División de un polinomio entre un monomio.**

Dividimos cada término del polinomio entre el monomio. Ejemplo $(3x^4-2x^3+3x):3x$ = $x^3-\frac{2}{3}x^2+1$

- **División de un polinomio entre un polinomio.**

1. Ordenamos los polinomios según las potencias y de mayor a menor.
2. Se dividen los primeros términos del dividendo y del divisor.
3. El resultado obtenido se multiplica por el divisor y se resta al dividendo.
4. Seguimos este procedimiento hasta que el resto sea de un grado menor que el divisor. Ejemplo:$(3x^4-2x^3+4x^2+2x-2):(x^2-2x-1)$

$$
\begin{array}{rrrrr|rrr}
3x^4 & -2x^3 & +4x^2 & +2x & -3 & x^2 & -2x & -1 \\
\cline{6-8}
-3x^4 & +6x^3 & +3x^2 & & & 3x^2 & +4x & +15 \\
\cline{1-5}
0 & 4x^3 & +7x^2 & +2x & -3 & & & \\
 & -4x^3 & +8x^2 & +4x & & & & \\
\cline{1-5}
 & 0 & 15x^2 & +6x & -3 & & & \\
 & & -15x^2 & +30x & +15 & & & \\
\cline{1-5}
 & & & +36x & +12 & & &
\end{array}
$$

Imagen en Wikipedia bajo Dominio Público

Ejercicio resuelto

Realiza la división de los polinomios x^3+3x^2-3x-6 y x^2-2x+1

Mostrar retroalimentación

En la siguiente imagen te dejamos la división de los polinomios, aunque hemos quitado el cociente.

$$
\begin{array}{l|l}
x^3+3x^2-3x-6 & x^2-2x+1 \\
\cline{2-2}
\end{array}
$$

$$-x^3 + 2x^2 - x$$

$$5x^2 - 4x - 6$$

$$-5x^2 + 10x - 5$$

$$6x - 11$$

Comprueba lo aprendido

Calcula la división de los polinomios x^3-5x+1 y $x+3$

$(3x^3-5x+1):(x+3)$ =

☐ x^2- ☐ x+ ☐

Resto: ☐

Enviar

Imagen en Flickr de hounddiggity bajo CC

2. Cálculo de raices enteras de un polinomio: Teorema del resto. Factorización de polinomios

En matemáticas intentamos crear procedimientos para que las tareas sean menos tediosas y pesadas. La división de polinomios no suele ser una labor rápida. aunque es un procedimiento sencillo.

Si pretendemos tan solo calcular el resto de una división, deberiamos realizar la división para calular el resto, pero descubriremos un teorema para agilizar esta cuestión.

En este video puedes apreciar el esfuerzo necesario para calcular el resto de una división por el método tradicional

Importante

El resto de la divisíon del polinomio P(x) y el binomio (x-a) es el valor numérico del polinomio para x=a.

Para obtener el resto de la división de un polinomio entre un binomio no es necesario realizar la división, ya que podemos utilizar el teorema indicado. Veamos un ejemplo.

Si queremos obtener el resto de la división (x^3-2x^2+4) y x-2, calculamos el valor numérico de (x^3-2x^2+4) para x=2, es decir $(2^3-2\cdot2^2+4) = 8-8+4 = 4$. El resto de la división indicada es 4.

Ten cuidado si el binomio por el que se divide es de la forma x+a, ya que el valor numérico lo debes obtener para x = -a

Ejercicio resuelto

Determina el resto de la división $(x^4-3x^3-5x^2-x-1):(x+1)$

Mostrar retroalimentación

Para obtener el resto calculamos el valor númerico de $(x^4-3x^3-5x^2-x-1)$ para x=-1

$P(-1) = (-1)^4-3(-1)^3-5(-1)^2-(-1)-1 = 1+3-5+1-1 = -1$

Ejercicio resuelto

Determina el valor de k para que el resto de la división de los polinomios x^2-kx+4 y x-3 sea 1

Mostrar retroalimentación

En este caso, al proporcionar el enunciado el resto, nos ofrece el valor numérico del polinomio para x = 3

P(3) = 1, entonces $P(3) = 3^2-3·k+4 = 1$; $9-3k+4 = 1$; $-3k = -12$; $k = 4$

Importante

TEOREMA DEL RESTO

El polinomio P(x) es divisible por x-a, si x=a es una raiz de P(x) o solución de P(x) = 0

Ejercicio resuelto

Calcula k para que x^3-2x^2+kx+8 sea divisible por x-2

Mostrar retroalimentación

Para que sea divisible por x-2, 2 debe ser una raiz del polinomio. Por tanto, P(2) es 0

$P(2) = 0$; $2^3-2·2^2+k·2+8 = 0$; $8-8 +2k+8 = 0$; $2k=-8$; $k=-4$

Para saber más

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DEL RESTO

Si dividimos el polinomio P(x) entre el binomio (x-a), obtenemos un cociente C(x) y un resto R. Si utilizamos la propiedad de la división que indica que el dividendo es igual al divisor por el cociente más el resto, obtenemos

$$P(x) = (x-a)·C(x) + R$$

Vamos a utilizar el valor numérico para x=a en esta expresión, obteniendo $P(a) = (a-a)·C(a) + R = 0·C(a)+R = R$, por lo que $P(a) = R$

Importante

Para realizar divisiones entre un polinomio P(x) y un binomio (x-a), podemos utilizar la regla de Ruffini en lugar de utilizar el métido clásico de división de polinomios.

Veamos la división de los polinomios $(x^3-2x^2+4):(x-1)$

1. Si el polinomio a dividir, no es completo, añadimos los términos con coeficientes 0. Pasamos de x^3-2x^2+4 a $x^3-2x^2+0\cdot x+4$
2. Indicamos los coeficientes del polinomio P(x) y en un nivel inferior el opuesto del término independiente del divisor.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & 0 & 4 \\ 1 & & & & \\ \hline & & & & \end{array}$$

3. Bajamos a la zona inferior el primer coeficiente.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & 0 & 4 \\ 1 & & & & \\ \hline & 1 & & & \end{array}$$

4. Multiplicamos el coeficiente bajado por el divisor y lo colocamos bajo el segundo coeficiente.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & 0 & 4 \\ 1 & & 1 & & \\ \hline & 1 & & & \end{array}$$

5. Sumamos los términos de la segunda columna obteniendo.

	1	-2	0	4
1		1		
	1	-1		

6. Repetimos el procedimiento.

	1	-2	0	4
1		1	-1	
	1	-1	-1	

7. Volvemos a aplicar el mismo proceso y llegamos al siguiente esquema.

	1	-2	0	4
1		1	-1	-1
	1	-1	-1	3

El cociente es el polinomio de un grado inferior al dividendo y cuyos coeficientes están en la última fila del esquema mostrado, es decir el cociente es $1 \cdot x^2 - 1 \cdot x - 1$, siendo el último número, el resto de la división.

Ejercicio resuelto

Realiza la división de los polinomios x^2-4x+1 entre $x-3$ utilizando la regla de Ruffini

Mostrar retroalimentación

Aplicaremos la regla de Ruffini, obteniendo el siguiente esquema

	1	-4	1

3		3	-3
	1	-1	-2

Al ser el dividendo de grado 2, el cociente será de grado 1 con coeficientes 1 y -1, es decir C(x) = x-1 con resto igual a -2

Ejercicio resuelto

Utiliza la regla de Ruffini para la siguiente operación $(x^4-3x^3+x^2-2):(x+1)$

Mostrar retroalimentación

	1	-3	1	0	-2
-1		-1	4	-5	5
	1	-4	5	-5	3

El cociente es x^3-4x^2+5x-5 y resto R=3

Comprueba lo aprendido

Determina la siguiente división con el uso de la regla de Ruffini. $(x^4-x+1):(x+2)$

Cociente = x^3- ☐ x^2+ ☐ x- ☐ Resto: ☐

Enviar

Importante

La factorización de un polinomio es la descomposición de un polinomio en polinomios irreducibles, entendiendo irreducible como que no se puede expresar como producto de polinomios de menor grado.

Debemos calcular en primer lugar una raiz entera del polinomio para convertir el polinomio P(x) en Q(x)·(x-b). Realizando el mismo procedimiento con Q(x) y reiterando el procedimiento, llegaremos a una expresión del tipo P(x) = a(x-b)(x-c)···(x-d).

Para buscar soluciones enteras debemos buscar en los divisores del termino independiente entre el coeficiente líder.

Factoricemos el polinomio P(x) = x^3-7x+6. En primer lugar buscamos los divisores del término independiente, en este caso $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$. Buscamos con la regla de Ruffini, algunas soluciones del polinomio.

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -7 & 6 \\ 1 & & 1 & 1 & -6 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & 0 \end{array}$$

Así P(x) = x^3-7x+6 = (x-1)·(x^2+x-6)

Actuamos ahora de modo análogo con el polinomio (x^2+x-6)

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 1 & -6 \\ 2 & & 2 & 6 \\ \hline & 1 & 3 & 0 \end{array}$$

Así (x^2+x-6) = (x-2)·(x+3), por lo que P(x) = (x-1)·(x-2)·(x+3)

Reseñar que si buscamos una raiz mediante Ruffini y el resto no es cero, probaremos con otro.

Ejercicio resuelto

Factoriza el polinomio x^3+x^2-4x-4

Mostrar retroalimentación

Determinamos las posibles raices del polinomio $\pm1, \pm2, \pm4$

Probamos con x=1

	1	1	-4	– 4
1		1	2	-2
	1	2	-2	-6

Al no ser el resto cero, probamos con otra posible solución x = -1

	1	1	-4	– 4
-1		-1	0	4
	1	0	-4	0

Así x= 1 es solución. $x^3+x^2-4x-4 = (x+1)\cdot(x^2-4)$

Si factorizamos (x^2-4), se obtiene $(x^2-4)=(x-2)\cdot(x+2)$, por lo que $x^3+x^2-4x-4 = (x+1)\cdot(x-2)\cdot(x+2)$

Comprueba lo aprendido

Marca la factorización correcta de x^3+3x^2-x-3

- $(x+1)^2\cdot(x+3)$
- $(x+1)\cdot(x-1)\cdot(x+3)$
- $(x+1)\cdot(x-3)\cdot(x+3)$

Incorrecto

Opción correcta

Incorrecto

Solution

1. Incorrecto
2. Opción correcta
3. Incorrecto

Comprueba lo aprendido

La factorización de $x^4-x^3-7x^2+x+6$ **es** $(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x-3)$

Verdadero Falso

Verdadero

3. Binomio de Newton

En matemáticas, tal y como ya hemos indicado en alguna ocasión, buscamos herramientas para simplificar nuestro trabajo. Si queremos calcular la potencia de un binomio, nos podemos encontrar que el trabajo puede ser costoso, ya que debemos multiplicar varios polinomios.

Por ejemplo, si queremos calcular $(2x+1)^3$ tendremos que multiplicar $(2x+1)\cdot(2x+1)\cdot(2x+1)$, multiplicando los dos primero y el resultado por el tercero. Sin embargo, utilizando el teorema conocido como binomio de Newton, este trabajo puede ser muy fácil y cómodo.

Importante

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} x y^{n-1} + \binom{n}{n} y^n$$

Imagen en Wikipedia bajo Dominio Público

Si queremos desarrollar la expresión $(x+2)^4$ podemos utilizar el binomio de Newton del siguiente modo

$$(x+2)^4 = \binom{4}{0} x^4 \cdot 2^0 + \binom{4}{1} x^3 \cdot 2^1 + \binom{4}{2} x^2 \cdot 2^2 + \binom{4}{3} x^1 \cdot 2^3 + \binom{4}{4} x^0 \cdot 2^4 = x^4 + 4x^3 \cdot 2 + 6x^2 \cdot 4 + 4x \cdot 8 + 16 =$$
$$x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16$$

Ejercicio resuelto

Calcula $(x-1)^3$

Mostrar retroalimentación

$$(x-1)^3 = \binom{3}{0} x^3 \cdot (-1)^0 + \binom{3}{1} x^2 \cdot (-1)^1 + \binom{3}{2} x^1 \cdot (-1)^2 + \binom{3}{3} x^0 \cdot (-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

Ejercicio resuelto

Determina el desarrollo de la expresión $(2x-1)^3$

Mostrar retroalimentación

$$(2x-1)^3=\binom{3}{0}(2x)^3\cdot(-1)^0+\binom{3}{1}(2x)^2\cdot(-1)^1+\binom{3}{2}(2x)^1\cdot(-1)^2+\binom{3}{3}(2x)^0\cdot(-1)^3=$$
$$8x^3-12x^2+6x-1$$

Comprueba lo aprendido

Completa las casillas para determinar el desarrollo de $(x-1)^3$

El resultado es x^3- ☐ x^2+ ☐ x- ☐

Enviar

Importante

Una fracción algebraica está formada por el cociente de dos polinomios $\frac{B(x)}{A(x)}$

Dos ejemplos de fracciones algebraicas son

$$\frac{x+1}{x^2-3x-5} \qquad \frac{x^2+3x}{6x-1}$$

La elegancia es fundamental dentro del mundo matemático, y las fracciones algebraicas se presentan simplificadas. Para ello, descomponemos el numerador y el denominador en factores irreducibles, eliminando los factores que coinciden.

Veamos un ejemplo, en el que simplificamos la expresión

$$\frac{x^3+2x^2-5x-6}{x^3-4x^2+x+6}$$

Factorizamos $x^3+2x^2-5x-6=(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x+3)$ y $x^3-4x^2+x+6=(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)$ para obtener

$$\frac{(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x+3)}{(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)}=\frac{x+3}{x-3}$$

Ejercicio resuelto

Simplifica la expresión algebraica $\frac{x^3-3x^2+2x}{x^3+2x^2-3x}$

Mostrar retroalimentación

Factorizamos el numerador $(x^3-3x^2+2x)=x\cdot(x^2-3x+2)=x\cdot(x-1)\cdot(x-2)$ y el denominador $(x^3+2x^2-3x)=x\cdot(x^2+2x-3)=x\cdot(x-1)\cdot(x+3)$. Por lo que obtenemos la expresión:

$$\frac{x^3-3x^2+2x}{x^3+2x^2-3x}=\frac{x\cdot(x-1)\cdot(x-2)}{x\cdot(x-1)\cdot(x+3)}=\frac{x-2}{x+3}$$

Ejercicio resuelto

Simplifica $\frac{x-1}{x^2-1}$

Mostrar retroalimentación

El resultado es $\frac{1}{x+1}$

Importante

SUMA Y RESTA DE FRACCIONES ALGEBRÁICAS

- El resultado de sumar o restar fracciones con idéntico denominador, será una nueva fracción cuyo numerador será la suma o resta de los numeradores y cuyo denominador será el mismo que tengan las fracciones algebraicas inmersas en la operación, es decir

$$\boxed{\frac{P(x)}{R(x)} \pm \frac{Q(x)}{R(x)} = \frac{P(x) \pm Q(x)}{R(x)}}$$

- Si las fracciones algebraicas tienen diferente denominador, construiremos nuevas fracciones equivalentes con identicos denominadores, siendo este el m.c.m. de los denominadores y los numeradores correspondientes los resultado de dividir el m.c.m por el denominador, multiplicado por el numerador previo.

$$\boxed{\frac{P(x)}{R(x)} + \frac{Q(x)}{S(x)} \text{ y sea } \mathrm{M(x)} \text{ el m.c.m de } \mathrm{R(x)} \text{ y } \mathrm{S(x)}}$$

El resultado obtenido es

$$\boxed{\frac{\frac{M(x)\cdot P(x)}{R(x)} + \frac{M(x)\cdot Q(x)}{S(x)}}{M(x)}}$$

Análogamente se opera con la resta.

Veamos un caso concreto

$$\frac{1}{x+1} + \frac{x-2}{x-1}$$

El m.c.m de (x+1) y (x-1) es (x+1)·(x-1) = x^2-1. Operando obtenemos

$$\frac{x-1}{x^2-1} + \frac{(x-2)\cdot(x+1)}{x^2-1} = \frac{x^2-3}{x^2-1}$$

Ejercicio resuelto

Calcula

$$\frac{x^2-2}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{x-1}{x+1}$$

Mostrar retroalimentación

Determinamos el m.c.m de x, x^2 y (x+1) obteniendo x^3+x^2

$$\frac{(x^2-2)\cdot(x^2+x)}{x^3+x^2}+\frac{x+1}{x^3+x^2}+\frac{x^3-x^2}{x^3+x^2}=\frac{x^4+x^3-2x^2-2x+x+1+x^3-x^2}{x^3+x^2}=\frac{x^4+2x^3-3x^2-x+1}{x^3+x^2}$$

Ejercicio resuelto

Determina

$$\frac{x^2-1}{x}-\frac{1}{x-2}$$

Mostrar retroalimentación

Calculamos el m.c.m de x y (x-2) obteniendo x^2-2x

$$\frac{(x-2)\cdot(x^2-1)}{x^2-2x}-\frac{x}{x^2-2x}=\frac{x^3-x-2x^2+2-x}{x^2-2x}=\frac{x^3-2x^2-2x+2}{x^2-2x}$$

Importante

- Multiplicación de fracciones algebraicas

Al multiplicar dos fracciones algebraicas, obtenemos una nueva fracción algebraica cuyo numerador es el producto de los dos numeradores y el denominador el producto de los denominadores.

$$\boxed{\frac{P(x)}{R(x)}\cdot\frac{Q(x)}{S(x)}=\frac{P(x)\cdot Q(x)}{R(x)\cdot S(x)}}$$

Visualicemos un ejemplo de la multiplicación de fracciones algebraicas

$$\left(\frac{x+1}{x}\right)\cdot\left(\frac{x-1}{x-3}\right)=\frac{(x-1)\cdot(x+1)}{x\cdot(x-3)}=\frac{x^2-1}{x^2-3x}$$

Comprueba lo aprendido

Indica la veracidad o falsedad de la siguiente igualdad

$$\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\cdot\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x-1}{x^2+x}$$

○ Verdadero ○ Falso

Verdadero

Importante

Para dividir dos fracciones algebraicas, multiplicamos la primera fracción algebraica por la inversa de la segunda.

$$\boxed{\frac{P(x)}{R(x)}:\frac{Q(x)}{S(x)}=\frac{P(x)}{R(x)}\cdot\frac{S(x)}{Q(x)}}$$

Ejercicio resuelto

Calcula la siguiente operación

$$\left(\frac{x+1}{x-2}\right):\left(\frac{x}{x-3}\right)$$

Mostrar retroalimentación

$$\left(\frac{x+1}{x-2}\right):\left(\frac{x}{x-3}\right)=\left(\frac{x+1}{x-2}\right)\cdot\left(\frac{x-3}{x}\right)=\frac{x^2-2x-3}{x^2-2x}$$

Ejercicio resuelto

Calcula

$$\left(\frac{1}{x^2}\right):\left(\frac{x}{x^2-3}\right)$$

Mostrar retroalimentación

Ejecutamos la operación

$$\left(\frac{1}{x^2}\right):\left(\frac{x}{x^2-3}\right)=\left(\frac{1}{x^2}\right)\cdot\left(\frac{x^2-3}{x}\right)=\frac{x^2-3}{x^3}$$

5. Ejercicios resueltos de pruebas de acceso anteriores

Para finalizar este tema, vamos a resolver los ejercicios que se han preguntado sobre el mismo en exámenes de la PAU en cursos anteriores.

Es recomendable que antes de mirar la solución, los intentes previamente, por si no hubieran salido del todo correctos, aprender del error y coger práctica.

Ejercicio resuelto

Prueba de Acceso a Grados para Mayores de 25 años - Año 2008

Halle las raíces del polinomio $2x^3 - 5x^2 - 11x - 4$ y factorícelo.

Nota: En este ejercicio se utilizarán conocimientos básicos relacionados con polinomios vistos en este tema.

Mostrar retroalimentación

Para hacer la factorización del polinomio aplicamos la división de Ruffini, probando con aquellos divisores del término independiente (4).

	2	-5	-11	-4
-1		-2	7	4
	2	-7	-4	0
4		8	4	
	2	1	0	

$$2x^3 - 5x^2 - 11x - 4 = (2x+1)(x-4)(x+1)$$

none