INSTITUTO de ENSEÑANZAS a DISTANCIA de ANDALUCÍA

2º de Bachillerato

Matemáticas II

Contenidos

Álgebra lineal: Matrices

1. Introducción a las matrices

¡Hola! Queremos darte la bienvenida a este nuevo curso de matemáticas. Como en el curso pasado queremos invitarte a un recorrido por el apasionante mundo de las matemáticas.

Esperamos que ante la cercanía de tu título de Bachillerato te encuentres con muchas ganas de comenzar. Verás como en este curso vas a aplicar todo lo que aprendiste el año pasado dentro de contextos que resultarán conocidos. Intentaremos que ese camino sea lo más ameno posible y que puedas observar la relación entre las matemáticas y el mundo que nos rodea. Como dijo el gran Galileo Galilei, la naturaleza está escrita en caracteres matemáticos.

Como ya verías el curso pasado, las matemáticas están omnipresentes a nuestro alrededor. A poco que nos fijemos veremos que en multitud de ocasiones estamos utilizando contenidos matemáticos: en nuestras compras, en la organización de un viaje, en el seguimiento de un deporte, en los juegos de azar, en la organización de una biblioteca, en la planificación de una construcción, etc.

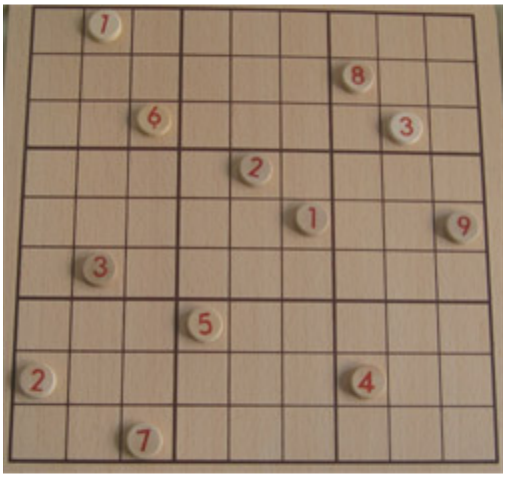
Como dijo el filósofo griego Proclo: "Dondequiera que haya un número está la belleza". Y para comprobarlo vamos a comenzar disfrutando de estas imágenes creadas por ordenador que nos muestran la relación de las matemáticas con elementos de la naturaleza.

Nature by Numbers

Vídeo alojado en Youtube

¿Eres aficionado a los pasatiempos? Quizás tú no, pero al menos alguien cercano a ti seguro que sí: un familiar, una amiga, un compañero de trabajo, tiene la costumbre de resolver pasatiempos: en la playa, en un aeropuerto, en la consulta de un médico, en el metro,..

Un pasatiempo por todos conocidos es el *sudoku*, y probablemente sabes de qué va. Hay que colocar las cifras del 1 al 9 en cada fila, en cada columna y en cada cuadrado de 3x3, de forma que no se repita ningún número ni por filas, ni por columnas ni por cuadrículas 3x3.



Básicamente estamos hablando de números perfectamente situados. Es decir, no es lo mismo que coloques un 3 en la primera fila y en la cuarta columna que lo hagas en la quinta. La posición de cada uno importa.

El tener elementos ordenados en filas y columnas es muy corriente en nuestro alrededor. Veamos un ejemplo.

Seguramente una de las primeras cosas que hagas al llegar al mediodía o por la tarde a casa es mirar el buzón a ver si te ha llegado correo. ¿Pero te has parado a pensar como están distribuidos los buzones?

Lo usual es que cada buzón lleve el nombre del inquilino, pero lo que lo caracteriza son dos valores: la planta en la que está y el número de piso en esa planta, aunque a veces se distingue por una letra. Es decir, todos los buzones están perfectamente determinados por dos valores que lo ubican perfectamente en la distribución del edificio. Algo parecido vamos a ver en este apartado, valores colocados ordenados según dos parámetros.

1.1. Concepto de matriz

No sabemos si te gustará el fútbol, pero reconocerás la tabla adjunta como una clasificación de los equipos en un determinado momento de la liga. Hemos quitado el nombre de los equipos para no crear polémica, pero puedes ver que aparecen los puntos del equipo, los partidos jugados hasta ese momento, cuántos se han ganado, empatado o perdido y, por último, los goles a favor y en contra.

	Pt.	J.	G.	E.	P.	F.	C.
1º	68	27	22	2	3	74	22
2º	68	27	21	5	1	68	18
3º	50	27	14	8	5	44	29
4º	46	27	14	4	9	45	32
5º	44	27	13	5	9	39	31
6º	42	27	12	6	9	36	32
7º	42	27	12	6	9	30	30
8º	37	27	11	4	12	36	34
9º	36	27	10	6	11	38	39
10º	34	27	9	7	11	40	42
11º	33	27	8	9	10	30	37
12º	32	27	8	8	11	29	35
13º	31	27	8	7	12	25	30
14º	31	27	8	7	12	21	36
15º	30	27	7	9	11	33	34
16º	30	27	7	9	11	27	38
17º	26	27	6	8	13	32	52
18º	23	27	4	11	12	30	48
19º	23	27	6	5	16	26	55
20º	18	27	4	6	17	20	49

Esa tabla puede considerarse como un conjunto de números ordenados según la fila donde estén (equivalente al lugar del equipo en la clasificación) y la columna correspondiente (según lo que represente dicha columna).

Así, por ejemplo, el número 25, que solo aparece una vez, corresponde al equipo que ocupa la posición 13 y representa los goles que ha marcado.

Este tipo de distribución definida por la fila y la columna de posición es la que vamos a definir en este apartado.

Importante

Se llama **matriz** a un conjunto de números ordenados por filas y columnas. Diremos que el **orden de la matriz** es nxr si tiene n filas y r columnas.

Como ejemplo de matrices podemos ver las siguientes:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 11 \end{pmatrix}$$

la primera es de orden 2x3, la segunda de orden 3x1 y la última de orden 2x2.

Reflexiona

Escribe una matriz cualquiera con los números que quieras pero que sea:

1. De orden 3x2.
2. De orden 1x5.
3. De orden 4x3.

Mostrar retroalimentación

Los números pueden cambiar, pero la forma tiene que ser como las siguientes:

$$1.-\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix} \quad ; \quad 2.-\begin{pmatrix}5&0&-3&-1&9\end{pmatrix} \quad ; \quad 3.-\begin{pmatrix}1&4&-3\\9&2&5\\0&2&-2\\5&-1&7\end{pmatrix}$$

Las matrices suelen representarse por letras mayúsculas y a los números que la forman se les llama **elementos de la matriz**. Un elemento se suele representar por la letra minúscula equivalente al nombre de la matriz y por dos subíndices, el primero representa la fila y el segundo la columna.

De esa forma, en la matriz $A=\begin{pmatrix}4&-1&-1\\5&10&-3\\6&1&2\\-2&15&0\end{pmatrix}$ el término a_{23} vale -3, el término a_{11} toma el valor 4 y -2 es lo que vale el término a_{41}.

Importante

Se denomina **elemento aij de la matriz A**, al número situado en la fila i y la columna j de A.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} & & \text{Columna 3} & \end{array} \\ A= & \begin{pmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\9&10&11&12\end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \leftarrow \text{Fila 2} \\ \\ \end{array} \end{array} \qquad a_{23}=7$$

Comprueba lo aprendido

En un gran hipermercado, con jornada continua, tienen tres turnos de trabajo. En la siguiente matriz se han recogido la cantidad de personas que trabajan en los cuatro departamentos de la empresa: los encargados de las cajas registradoras, los que atienden al cliente y la información, los reponedores de material y por último los empleados de oficina. A partir de ellas contesta a las siguientes preguntas.

$$\begin{pmatrix}15&5&7&4\\8&3&8&0\\20&6&4&1\end{pmatrix}$$

1) La matriz es de orden ___ x ___ .

2) El término a_{32} es ___ .

3) El término a_{23} es ___ .

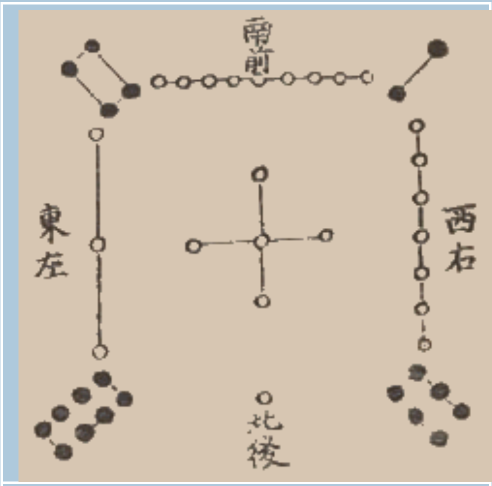
4) 0 ocupa el lugar ___ , ___ .

Enviar

Curiosidad

El primero que utilizó el término de matriz fue el matemático J. J. Sylvester en 1848, aunque fue su colega Cayley quien creó la notación matricial diez años más tarde. Sin embargo, las matrices se utilizaban desde siglos antes.

Cuadros de números son conocidos desde muy antiguo ya que se tiene constancia de que los matemáticos chinos manejaban cuadrados mágicos 650 años antes del nacimiento de Cristo. Incluso existen textos datados entre el 300 y el 200 a. C. en los que se utilizan matrices para resolver sistemas de ecuaciones.

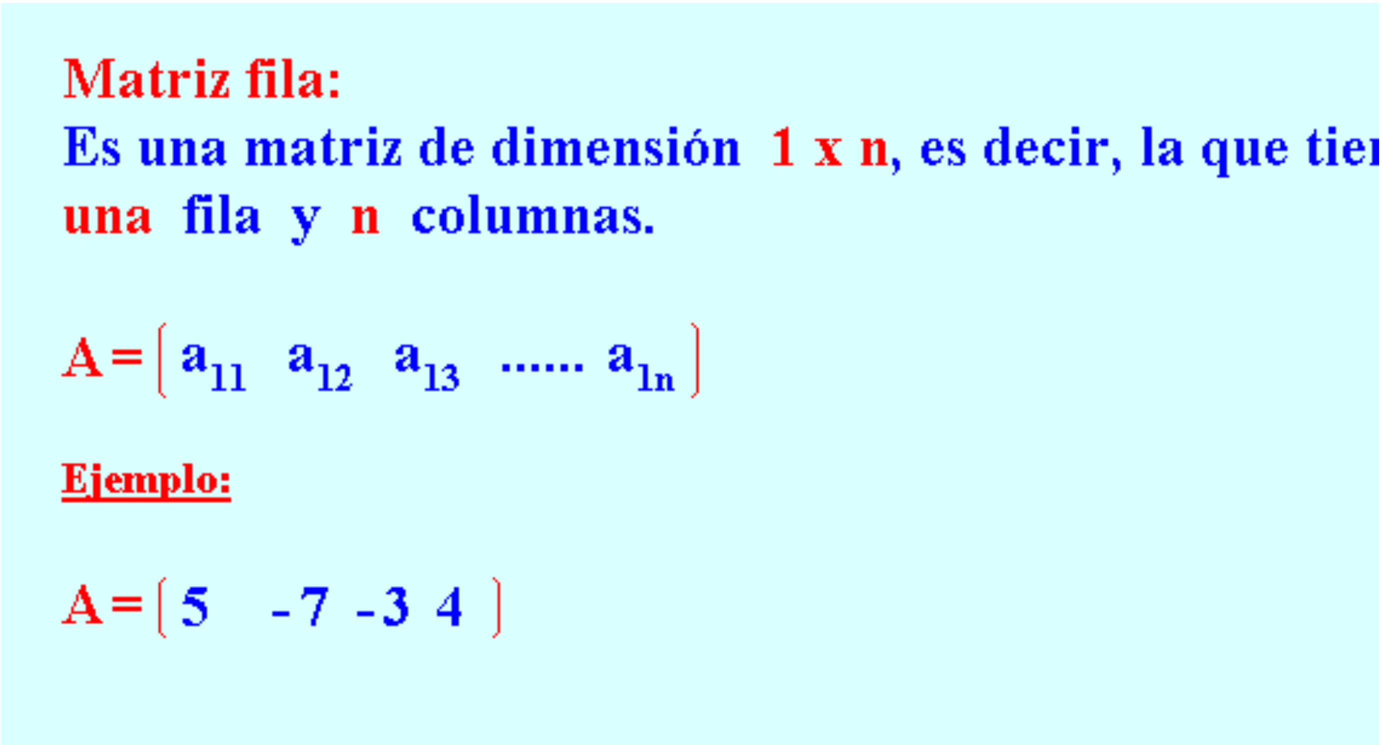


Cuadro mágico chino recopilado por Yunlong en el S. XIII. Imagen de dominio público tomada de Wikimedia Commons.

1.2. Tipos de matrices

Quizás recuerdes que el curso pasado trabajamos con los vectores; en particular con los de dos elementos $\vec{u}=(3,4)$. Si te fijas podemos considerar que ese vector (3 4) es un caso particular de matriz en la que sólo hay una fila. En este apartado vamos a ver distintos tipos de matrices que por alguna característica particular reciben un nombre específico.

En la siguiente presentación puedes ver las definiciones, ilustradas con ejemplos, de diversos tipos de matrices. Si pulsas en la flecha de avance de la parte inferior izquierda podrás ver los tipos que hay.



Presentación alojada en Google Slides

Para comprobar si has entendido todas las definiciones puedes **practicar** en los siguientes enlaces:

- En Crucigrama de matrices con sólo pulsar en cada número te aparecerá una pregunta y la ventana para que escribas la solución. Sólo hay una pregunta cuya solución no hemos visto aún. Corresponde a la pregunta 7 y cuya respuesta es *SARRUS*.
- En Test de matrices repasarás lo que hemos visto hasta el momento a través de una serie de preguntas tipo test. Hay dos preguntas, la 7 y la 10, que corresponden a elementos que veremos en el apartado 2.4.

Comprueba lo aprendido

En muchos mapas de carreteras aparece la información sobre las distancias entre las capitales de provincias o de países. A partir de esa información podemos construir una matriz de distancias como la siguiente, en la que, para no repetir datos, sólo se escribe la distancia de una ciudad a otra, no de la otra a la una, nos explicamos, si escribimos la distancia de Barcelona a Madrid, no se escribe también la de Madrid a Barcelona, sino que se escribe 0.

$$\begin{array}{l} \\ \text{Almería} \\ \text{Granada} \\ \text{Jaén} \\ \text{Málaga} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{Almería} & \text{Granada} & \text{Jaén} & \text{Málaga} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 166 & 0 & 0 & 0 \\ 228 & 99 & 0 & 0 \\ 219 & 129 & 209 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

En la imagen adjunta tienes la matriz de distancias que hemos construido con los kilómetros que hay entre las capitales de Andalucía Oriental. A partir de ellas responde si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones.

1) La matriz anterior es una matriz cuadrada.

○ Verdadero ○ Falso

Verdadero

Sí porque tiene el mismo número de filas que de columnas.

2) Los elementos de la diagonal principal son todos ceros.

○ Verdadero ○ Falso

Verdadero

Es cierto porque todos los elementos a_{ii} son nulos.

3) Es una matriz triangular superior.

○ Verdadero ○ Falso

Falso

No, más bien es triangular inferior.

4) Todos los términos a_{ij} donde $i<j$ son nulos.

○ Verdadero ○ Falso

Verdadero

Es cierto ya que esos términos son precisamente los que están por encima de la diagonal principal.

5) El término a_{24} vale 129.

○ Verdadero ○ Falso

Falso

No, quien vale 129 es el término a_{42}.

Reflexiona

Escribe la matriz traspuesta de la que aparece en la autoevaluación anterior.

Mostrar retroalimentación

Hallar la traspuesta consiste en cambiar filas por columnas, por lo que obtendríamos:

$$\begin{pmatrix} 0 & 166 & 228 & 219 \\ 0 & 0 & 99 & 129 \\ 0 & 0 & 0 & 209 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Reflexiona

Escribe una matriz simétrica sabiendo que su primera fila está formada por los números 1, 2 y 6, su segunda columna tiene los elementos 2, 3, -5 y el término a_{33} es 8.

Mostrar retroalimentación

Esta matriz tiene que ser cuadrada de orden 3x3 (pues tiene 3 elemento en cada fila y columna) e imponiendo la obligación de que sea simétrica nos queda la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & -5 \\ 6 & -5 & 8 \end{pmatrix}$$

1.3. Concepto de submatriz

En el apartado anterior hemos hablado de la tabla de distancias en kilómetros entre capitales que poseen algunos mapas de carreteras.

De ella hemos sacado una matriz en la que se relacionan las distancias entre todas las capitales de provincia de Andalucía:

$$\begin{array}{l} \\ \text{Almería} \\ \text{Cadiz} \\ \text{Córdoba} \\ \text{Granada} \\ \text{Huelva} \\ \text{Jaén} \\ \text{Málaga} \\ \text{Sevilla} \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} \text{Almería} & \text{Cadiz} & \text{Córdoba} & \text{Granada} & \text{Huelva} & \text{Jaén} & \text{Málaga} & \text{Sevilla} \end{array} \\
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 219 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 332 & 263 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 166 & 335 & 166 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 516 & 219 & 232 & 350 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 228 & 367 & 104 & 99 & 336 & 0 & 0 & 0 \\ 219 & 265 & 187 & 129 & 313 & 209 & 0 & 0 \\ 422 & 125 & 138 & 256 & 94 & 242 & 219 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

¿Qué relación existe entre esta matriz y la de la autoevaluación del apartado 1.2 en la que solo se incluían las capitales de Andalucía Oriental? Seguro que no te ha costado mucho darte cuenta que la anterior es una parte de esta matriz con las capitales de Andalucía. Cuando consideramos sólo una parte de una matriz, esta parte recibe un nombre concreto: submatriz.

Importante

Dada una matriz cualquiera, llamaremos **submatriz** a otra que se obtiene eligiendo determinadas filas y columnas de la matriz original. La única condición es que los elementos que están en la misma fila o en la misma columna de la submatriz estuvieran también en la misma fila o columna de la matriz original.

De la matriz $\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 5 & 10 & -3 \\ 6 & 1 & 2 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}$ obtenemos la submatriz $\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ eligiendo las filas 2ª, 3ª y 4ª y las columnas 1ª y 3ª.

Reflexiona

Me han encargado ir a un teatro cercano a mi casa a consultar los precios de las localidades de los próximos espectáculos. La zona de butacas está dividida en

cuatro partes: Patio, balcón, terraza y paraíso. Los precios en euros son los que muestra la siguiente matriz.

$$
\begin{array}{l c}
 & \begin{array}{cccc} \text{Patio} & \text{Balcón} & \text{Terraza} & \text{Paraiso} \end{array} \\
\begin{array}{r} \text{Vicente Amigo} \\ \text{English Nacional Ballet} \\ \text{Joan Manuel Serrat} \\ \text{Jennifer Larmora \& Opus Five} \\ \text{Ballet Flamenco} \end{array} & \begin{pmatrix} 33 & 30 & 26 & 21 \\ 45 & 42 & 38 & 26 \\ 60 & 54 & 44 & 36 \\ 31 & 28 & 23 & 19 \\ 25 & 22 & 18 & 13 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Quien me ha pedido la información tiene interés en asistir a un ballet y no le interesan las butacas de Patio, para poder tener una vista más completa del escenario. Escribe la matriz que recoge los precios de las localidades de los dos espectáculos de ballet en las modalidades de balcón, terraza y paraíso.

Mostrar retroalimentación

La matriz resultante de lo pedido es: $\begin{pmatrix} 42 & 38 & 26 \\ 22 & 18 & 13 \end{pmatrix}$

2. Operaciones con matrices

Ahora que ya conoces a las matrices, imagina utilizar una matriz de doble entrada para llevar el control del personal que trabaja en una empresa; consideramos cada fila como cada uno de los departamentos de la empresa (económico, venta, personal...) y a cada columna le asignamos el tipo de puesto de trabajo (directivo, gerente, asesor, administrativo,...).

Mientras mayor sea la empresa, probablemente, mayor será el número de filas y de columnas de esta matriz, que nos proporciona mucha información sobre dicha empresa.

Trabajador en una empresa. Imagen obtenida del banco de imágenes del M

Partido de fútbol y sonido. Recursos obtenidos del banco de imágenes del MEC

La clasificación de fútbol, de las olimpiadas e incluso las notas obtenidas en cada una de las materias en cada trimestre son matrices que utilizamos habitualmente y en las que podemos ver mucha información de un vistazo. Pero las empresas, clasificaciones, etc. están sometidas a continuos cambios que pueden ser traducidos como posibles operaciones matemáticas en las matrices que las representan. Precisamente eso es lo que vamos a ver en este apartado, si podemos efectuar operaciones coherentes con las matrices que emulen aquellas que ya conocemos en los números y que representen cambios en las entidades que representan estas matrices.

00:00 00:14

Comprueba lo aprendido

Raimundo se ha fijado en algunos tipos de carne de los existentes en 5 de los supermercados que debe gestionar. En esos 5 supermercados necesitan que los proveedores les envíen varios kilos de carne. Raimundo como lleva la gestión a través de tablas, ha realizado una tabla con los kilos de carne que queda en cada uno de esos cinco supermercados y otra tabla con el pedido que ha realizado a los proveedores para que lleven a cada uno de ellos. Estas tablas son las siguientes

Carne mezclada. Imagen obtenida del banco de imágenes del MEC

Kilos de carne que queda en cada supermercado	Pedido en kilos que ha realizado Raimundo
$\begin{array}{lccc} & Ternera & Cerdo & Pollo \\ Supermercado1 & 10 & 8 & 5 \\ Supermercado2 & 4 & 7 & 5 \\ Supermercado3 & 3 & 6 & 10 \\ Supermercado4 & 4 & 6 & 2 \\ Supermercado5 & 9 & 4 & 8 \end{array}$	$\begin{array}{lccc} & Ternera & Cerdo & Pollo \\ Supermercado1 & 5 & 7 & 12 \\ Supermercado2 & 10 & 9 & 14 \\ Supermercado3 & 10 & 8 & 5 \\ Supermercado4 & 12 & 14 & 15 \\ Supermercado5 & 7 & 9 & 12 \end{array}$

Así sabemos que después de que llegue el pedido a cada supermercado:

a.- En el Supermercado 3 habrá ___ kilos de pollo

b.- En el supermercado 2 habrá ___ kilos de ternera

c.- En el supermercado 1 habrá ___ kilos de cerdo y ___ de ternera

d.- En el supermercado 5 habrá ___ kilos de pollo y ___ de ternera

Enviar

Importante

Como has podido observar en el ejemplo anterior, vamos a poder sumar las matrices. **Para poder sumar dos matrices**, las dos deben tener el mismo número de filas y el mismo número de columnas, es decir, **las dos deben tener el mismo orden**. El resultado de sumar dos matrices A y B de orden nxm va a ser otra matriz de orden nxm de forma que el

elemento que se encuentra en la posición ij es el resultado de sumar el elemento a_{ij} con el elemento b_{ij}.

En el caso de la Autoevaluación anterior, obtendríamos la siguiente suma:

$$\begin{pmatrix} 10 & 8 & 5 \\ 4 & 7 & 5 \\ 3 & 6 & 10 \\ 4 & 6 & 2 \\ 9 & 4 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 7 & 12 \\ 10 & 9 & 14 \\ 10 & 8 & 5 \\ 12 & 14 & 15 \\ 7 & 9 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10+5 & 8+7 & 5+12 \\ 4+10 & 7+9 & 5+14 \\ 3+10 & 6+8 & 10+5 \\ 4+12 & 6+14 & 2+15 \\ 9+7 & 4+9 & 8+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 15 & 17 \\ 14 & 16 & 19 \\ 13 & 14 & 15 \\ 16 & 20 & 17 \\ 16 & 13 & 20 \end{pmatrix}$$

De la misma forma se puede realizar la resta o diferencia de dos matrices. Imagina que en el caso de los Supermercados, en lugar de tener la tabla de los pedidos que ha realizado Raimundo, tuviéramos la tabla de las ventas que ha realizado cada uno de los supermercados.

Reflexiona

Para que practiques con matrices cualesquiera que tú te inventes y compruebes si el resultado que obtienes es correcto te ofrecemos la siguiente calculadora. Introduce matrices A y B y súmalas o réstalas. Comprueba que el resultado que has obtenido es el correcto pulsando sobre el botón inferior correspondiente a la operación que hayas efectuado.

Matriz **A** :	Matriz **B** :	Matriz **C** :
Borrar A	Borrar B	Borrar C

A + B = C

A - B = C

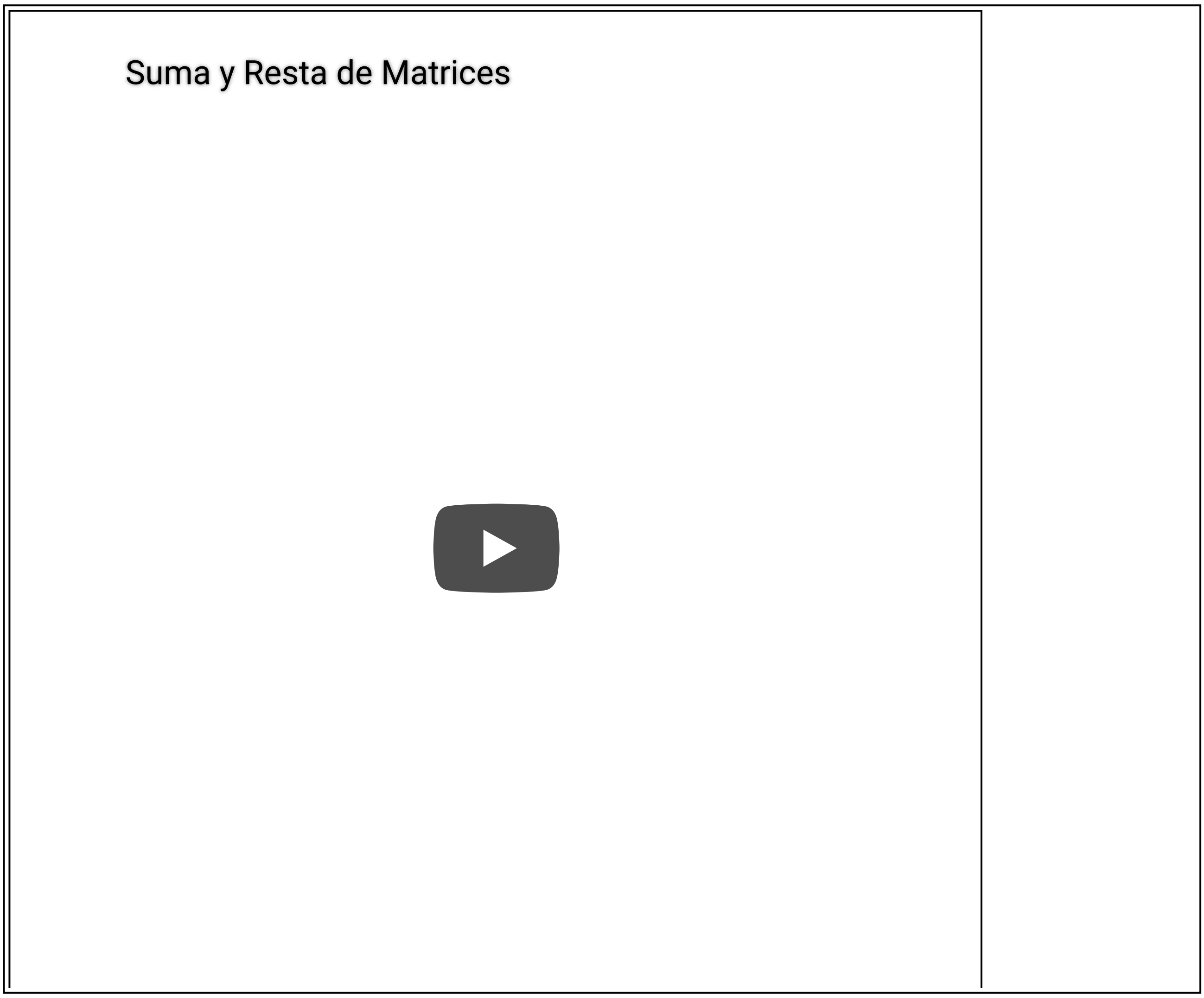
Mostrar retroalimentación

Recuerda que para sumar y restar matrices las dos deben tener el mismo orden. En este caso el orden de las dos es 3x3

Recuerda que la suma de matrices se hace sumando los números que ocupan posiciones iguales.

Recuerda que la resta de matrices se hace restando los números que ocupan posiciones iguales.

En el siguiente vídeo, aprendemos la realización de sumas y restas de matrices. **Practica ahora lo que has aprendido** en el siguiente enlace.



Suma y resta de matrices

Vídeo alojado en Youtube

Comprueba lo aprendido

Nos adentramos ahora en el fascinante mundo de la panadería de cada uno de los supermercados. En este caso, el supermercado2 no tiene el servicio de panadería. Raimundo ha realizado la misma tabla de pedidos durante los 6 días de la semana que permanecen abiertos. Este pedido ha sido:

	barras	*bollos*	*panes*
Supermercado1	24	57	42
Supermercado2	0	0	0
Supermercado3	34	26	32
Supermercado4	49	24	28

Estantería con pan. Imagen obtenida del banco de imágenes del MEC

1.-Para el supermercado3, ha pedido ____ bollos en toda la semana.

2.- Para el supermercado4 ha pedido ____ barras en toda la semana

3.- La matriz de pedidos de toda la semana será

	Barras	Bollos	Panes
Supermercado1			
Supermercado2			
Supermercado3			
Supermercado4			

Enviar

Fíjate en un sólo supermercado y un único tipo de pan. Haz lo mismo para el resto.

Importante

Ahora estamos en disposición de definir el producto de un número por una matriz. Al igual que el producto de 3xt es sumar 3 veces el número t, 3xt = t+t+t, el producto de un número n por una matriz A (nxA) es sumar n veces la matriz A.

La forma más rápida de realizar la operación es multiplicar cada uno de los términos de la matriz por el número n.

Si tenemos la matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \ldots \end{pmatrix}$ obtenemos

$$A=\begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}$$

$$n\times A = n\times\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n\times a_{11} & n\times a_{12} & n\times a_{13} \\ n\times a_{21} & n\times a_{22} & n\times a_{23} \\ n\times a_{31} & n\times a_{32} & n\times a_{33} \\ n\times a_{41} & n\times a_{42} & n\times a_{43} \end{pmatrix}$$

Reflexiona

Applet alojado en GeoGebra. Licencia CC

Mostrar retroalimentación

Recuerda que los elementos de la matriz que resulta de multiplicar un número por una matriz A son el resultado de multiplicar el número por cada uno de los elementos de la matriz A.

Practica ahora lo que has aprendido.

Multiplicación de un número real por una matriz

Vídeo alojado en Youtube

Entra en el siguiente enlace y comprueba la realización del producto de un número por una matriz. Para ello, pulsa el botón autogenerar y te propondrán la realización del producto de un número por una matriz. Responde escribiendo la matriz que resulta de ese producto. Posteriormente pulsa sobre el botón *Comprobar* para verificar la solución que has propuesto.

Entra en el siguiente enlace y responde a las preguntas del test que aparece.

Ejercicio resuelto

Retomamos la tabla de clasificación de los equipos en un determinado momento de la liga, sin los nombres de los equipos, en la que puedes ver que aparecen los puntos del equipo, los partidos jugados hasta ese momento, entre ellos cuántos se han ganado, empatado o perdido y, por último, los goles a favor y en contra.

	Pt.	J.	G.	E.	P.	F.	C.
1º	68	27	22	2	3	74	22
2º	68	27	21	5	1	68	18
3º	50	27	14	8	5	44	29
4º	46	27	14	4	9	45	32
5º	44	27	13	5	9	39	31
6º	42	27	12	6	9	36	32
7º	42	27	12	6	9	30	30
8º	37	27	11	4	12	36	34
9º	36	27	10	6	11	38	39
10º	34	27	9	7	11	40	42
11º	33	27	8	9	10	30	37
12º	32	27	8	8	11	29	35
13º	31	27	8	7	12	25	30
14º	31	27	8	7	12	21	36
15º	30	27	7	9	11	33	34
16º	30	27	7	9	11	27	38
17º	26	27	6	8	13	32	52
18º	23	27	4	11	12	30	48
19º	23	27	6	5	16	26	55
20º	18	27	4	6	17	20	49

Si solamente conociésemos los partidos ganado, perdidos y empatados, podríamos conocer el número de partido jugados. Además, podríamos conocer el número de puntos que tiene el equipo ya que conocemos que obtiene 3 puntos por cada partido ganado, un punto por cada partido empatado y 0 puntos por cada partido perdido.

De la tabla anterior podemos obtener la matriz que contiene el número de partidos ganados, el número de partidos empatados y el número de partidos perdidos de cada equipo:

$$A=\begin{pmatrix}22&2&3\\21&5&1\\14&8&5\\14&4&9\\13&5&9\\12&6&9\\12&6&9\\11&4&12\\10&6&11\\9&7&11\\8&9&10\\8&8&11\\8&7&12\\8&7&12\\7&9&11\\7&9&11\\6&8&13\\4&11&12\\6&5&16\\4&6&17\end{pmatrix}$$

Además, la matriz que nos indica el número de puntos que se le da a un equipo por cada partido ganado, empatado o perdido es la siguiente $B=\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$

Si a partir de estas dos matrices queremos calcular el número de puntos que tiene cada equipo, deberíamos multiplicar $A\times B$. ¿Sabes cómo hacerlo?... En la solución te lo explicamos.

Si ahora consideramos la matriz $C=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ Si multiplicamos $A\times C$ ¿sabes qué obtendríamos?

Y si ahora consideramos la matriz $D=\begin{pmatrix}1&3\\1&1\\1&0\end{pmatrix}$ Si multiplicamos $A\times D$ ¿Sabrías hacerlo? ¿Sabes qué obtendríamos?

No te preocupes, que ahora te desvelamos todos estos secretos

Mostrar retroalimentación

$\begin{pmatrix}22&2&3\\21&5&1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}22\cdot3+2\cdot1+3\cdot0\\21\cdot3+5\cdot1+1\cdot0\\14\cdot3+8\cdot1+5\cdot0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}68\\68\end{pmatrix}$

Si multiplicamos las matrices $A\times B=\begin{pmatrix} 14 & 8 & 5\\ 14 & 4 & 9\\ 13 & 5 & 9\\ 12 & 6 & 9\\ 12 & 6 & 9\\ 11 & 4 & 12\\ 10 & 6 & 11\\ 9 & 7 & 11\\ 8 & 9 & 10\\ 8 & 8 & 11\\ 8 & 7 & 12\\ 8 & 7 & 12\\ 7 & 9 & 11\\ 7 & 9 & 11\\ 6 & 8 & 13\\ 4 & 11 & 12\\ 6 & 5 & 16\\ 4 & 6 & 17 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 14\cdot3+4\cdot1+9\cdot0\\ 13\cdot3+5\cdot1+9\cdot0\\ 12\cdot3+6\cdot1+9\cdot0\\ 12\cdot3+6\cdot1+9\cdot0\\ 11\cdot3+4\cdot1+12\cdot0\\ 10\cdot3+6\cdot1+11\cdot0\\ 9\cdot3+7\cdot1+11\cdot0\\ 8\cdot3+9\cdot1+10\cdot0\\ 8\cdot3+8\cdot1+11\cdot0\\ 8\cdot3+7\cdot1+12\cdot0\\ 8\cdot3+7\cdot1+12\cdot0\\ 7\cdot3+9\cdot1+11\cdot0\\ 7\cdot3+9\cdot1+11\cdot0\\ 6\cdot3+8\cdot1+13\cdot0\\ 4\cdot3+11\cdot1+12\cdot0\\ 6\cdot3+5\cdot1+16\cdot0\\ 4\cdot3+6\cdot1+17\cdot0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}50\\46\\44\\42\\42\\37\\36\\34\\33\\32\\31\\31\\30\\30\\26\\23\\23\\18\end{pmatrix}$

por lo que obtenemos la cantidad de puntos que tiene cada equipo

Multiplicamos las matrices $A\times C=\begin{pmatrix} 22 & 2 & 3\\ 21 & 5 & 1\\ 14 & 8 & 5\\ 14 & 4 & 9\\ 13 & 5 & 9\\ 12 & 6 & 9\\ 12 & 6 & 9\\ 11 & 4 & 12\\ 10 & 6 & 11\\ 9 & 7 & 11\\ 8 & 9 & 10\\ 8 & 8 & 11\\ 8 & 7 & 12\\ 8 & 7 & 12\\ 7 & 9 & 11\\ 7 & 9 & 11\\ 6 & 8 & 13\\ 4 & 11 & 12\\ 6 & 5 & 16\\ 4 & 6 & 17 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 22\cdot1+2\cdot1+3\cdot1\\ 21\cdot1+5\cdot1+1\cdot1\\ 14\cdot1+8\cdot1+5\cdot1\\ 14\cdot1+4\cdot1+9\cdot1\\ 13\cdot1+5\cdot1+9\cdot1\\ 12\cdot1+6\cdot1+9\cdot1\\ 12\cdot1+6\cdot1+9\cdot1\\ 11\cdot1+4\cdot1+12\cdot1\\ 10\cdot1+6\cdot1+11\cdot1\\ 9\cdot1+7\cdot1+11\cdot1\\ 8\cdot1+9\cdot1+10\cdot1\\ 8\cdot1+8\cdot1+11\cdot1\\ 8\cdot1+7\cdot1+12\cdot1\\ 8\cdot1+7\cdot1+12\cdot1\\ 7\cdot1+9\cdot1+11\cdot1\\ 7\cdot1+9\cdot1+11\cdot1\\ 6\cdot1+8\cdot1+13\cdot1\\ 4\cdot1+11\cdot1+12\cdot1\\ 6\cdot1+5\cdot1+16\cdot1\\ 4\cdot1+6\cdot1+17\cdot1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}27\\27\\27\\27\\27\\27\\27\\27\\27\\27\\27\\27\\27\\27\\27\\27\\27\\27\\27\\27\end{pmatrix}$ por lo que obtenemos la cantidad de partidos que ha jugado cada equipo

$\begin{pmatrix} 22 & 2 & 3\\ 21 & 5 & 1\\ 14 & 8 & 5\\ \dots \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 22\cdot1+2\cdot1+3\cdot1\\ 21\cdot1+5\cdot1+1\cdot1\\ 14\cdot1+8\cdot1+5\cdot1\\ 14\cdot1+4\cdot1+9\cdot1\\ \dots \end{pmatrix}$

Si multiplicamos las matrices $A\times D = \begin{pmatrix} 13 & 5 & 9 \\ 12 & 6 & 9 \\ 12 & 6 & 9 \\ 11 & 4 & 12 \\ 10 & 6 & 11 \\ 9 & 7 & 11 \\ 8 & 9 & 10 \\ 8 & 8 & 11 \\ 8 & 7 & 12 \\ 8 & 7 & 12 \\ 7 & 9 & 11 \\ 7 & 9 & 11 \\ 6 & 8 & 13 \\ 4 & 11 & 12 \\ 6 & 5 & 16 \\ 4 & 6 & 17 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13\cdot1+5\cdot1+9\cdot1 \\ 12\cdot1+6\cdot1+9\cdot1 \\ 12\cdot1+6\cdot1+9\cdot1 \\ 11\cdot1+4\cdot1+12\cdot1 \\ 10\cdot1+6\cdot1+11\cdot1 \\ 9\cdot1+7\cdot1+11\cdot1 \\ 8\cdot1+9\cdot1+10\cdot1 \\ 8\cdot1+8\cdot1+11\cdot1 \\ 8\cdot1+7\cdot1+12\cdot1 \\ 8\cdot1+7\cdot1+12\cdot1 \\ 7\cdot1+9\cdot1+11\cdot1 \\ 7\cdot1+9\cdot1+11\cdot1 \\ 6\cdot1+8\cdot1+13\cdot1 \\ 4\cdot1+11\cdot1+12\cdot1 \\ 6\cdot1+5\cdot1+16\cdot1 \\ 4\cdot1+6\cdot1+17\cdot1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 22\cdot3+2\cdot1+3\cdot0 \\ 21\cdot3+5\cdot1+1\cdot0 \\ 14\cdot3+8\cdot1+5\cdot0 \\ 14\cdot3+4\cdot1+9\cdot0 \\ 13\cdot3+5\cdot1+9\cdot0 \\ 12\cdot3+6\cdot1+9\cdot0 \\ 12\cdot3+6\cdot1+9\cdot0 \\ 11\cdot3+4\cdot1+12\cdot0 \\ 10\cdot3+6\cdot1+11\cdot0 \\ 9\cdot3+7\cdot1+11\cdot0 \\ 8\cdot3+9\cdot1+10\cdot0 \\ 8\cdot3+8\cdot1+11\cdot0 \\ 8\cdot3+7\cdot1+12\cdot0 \\ 8\cdot3+7\cdot1+12\cdot0 \\ 7\cdot3+9\cdot1+11\cdot0 \\ 7\cdot3+9\cdot1+11\cdot0 \\ 6\cdot3+8\cdot1+13\cdot0 \\ 4\cdot3+11\cdot1+12\cdot0 \\ 6\cdot3+5\cdot1+16\cdot0 \\ 4\cdot3+6\cdot1+17\cdot0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 68 \\ 27 & 68 \\ 27 & 50 \\ 27 & 46 \\ 27 & 44 \\ 27 & 42 \\ 27 & 42 \\ 27 & 37 \\ 27 & 36 \\ 27 & 34 \\ 27 & 33 \\ 27 & 32 \\ 27 & 31 \\ 27 & 31 \\ 27 & 30 \\ 27 & 30 \\ 27 & 26 \\ 27 & 23 \\ 27 & 23 \\ 27 & 18 \end{pmatrix}$$

por lo que obtenemos una matriz cuya primera columna recoge el número de partidos jugado por cada equipo y la segunda la cantidad de puntos que tiene cada equipo

Fijémonos en el producto $A\times B$. Lo que hemos hecho es multiplicar cada elemento de la primera fila de la matriz A por el elemento correspondiente de la primera columna de la matriz B. Para poder hacer lo anterior, el número de elementos que la matriz A tiene en esa fila (3 elementos en nuestro caso) es el mismo número de elementos que tiene B en su columna, en nuestro caso 3 también.

En el ejemplo anterior, la matriz A tiene 20 filas y 3 columnas y la matriz B tiene 3 filas y 1 columna. Cuando realizamos el producto $A\times B$ nos resulta una matriz que tiene 20 filas y 1 columna. En resumen.

A	B	$A\times B$
20x3	3x1	20x1

Observa qué ocurre en los casos de los productos $A\times C$ y $A\times D$.

Piensa si se podría hacer el producto $D\times C$.

Importante

Si tenemos dos matrices A de orden $n\times m$ y B de orden $p\times q$, el producto $A\times B$ es otra matriz cuyos elementos se obtienen multiplicando de forma ordenada cada fila de la matriz A por todas las columnas de la matriz B. Así, el elemento que ocupa la posición 3,7 en la matriz resultante es el resultado de multiplicar la fila 3 de la matriz A por la columna 7 de la matriz B, es decir, cada elemento de la fila 3 de la matriz A se multiplica por el elemento correspondiente de la columna 7 de la matriz B y se suman los resultados.

Por tanto, el número de elementos que tiene la matriz A en cada fila (número de columnas de A) tiene que coincidir con el número de elementos que tenga la matriz B en cada columna (número de filas de B). En nuestro caso, para que se puedan multiplicar en cada columna (número de filas de B). En nuestro caso, para que se puedan multiplicar A y B debe cumplirse que $m = p$.

Dicen que una imagen vale más que mil palabras. Te proponemos el siguiente ejercicio resuelto para que compruebes si has captado como se realiza esta operación con matrices...

Ejercicio resuelto

Si tenemos dos matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 7 & 2 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$

Piensa qué producto podemos hacer **AxB** ó **BxA**. Cuando lo sepas, calcula el que se pueda hacer o los que se puedan hacer.

Recuerda que en un producto de matrices, el número de columnas de la primera debe ser igual que el número de filas de la segunda.

Mostrar retroalimentación

Dado que el orden de la matriz **A** es 2x3 y el orden de la matriz **B** es 3x2 el único producto que podemos hacer es **AxB**. En el siguiente vídeo lo hacemos paso a paso. Observa atentamente cómo se calcula cada elemento de la matriz que resulta de multiplicar las dos anteriores...

Multiplicación de matrices

Vídeo alojado en Youtube

Comprueba ahora tus conocmientos.

Entra en el siguiente enlace y responde a las preguntas del test que aparece para saber lo que has aprendido hasta ahora.

Entra en el siguiente enlace y realiza productos de matrices para comprobar tus destrezas. Cada vez que pulses el botón "Autogenerar" aparecerán dos matrices nuevas. Cuando hayas realizado el producto, pulsa sobre el botón "Comprobar" para comprobar el resultado.

Comprueba lo aprendido

Ahora te proporcionamos una pantalla para que realices productos de matrices de orden 3X3 y después respondas a las cuestiones que te planteamos.

Practica con matrices que inventes. Solamente debes escribir los números en las casillas de las matrices **A** y **B** y los resultados aparecerán en la matriz **C.** Es decir, escribe dos matrices cualesquiera y halla su producto, después puedes comprobar el resultado en la matriz C. Debajo tienes botones que te permiten cambiar las matrices de lugar y calcular A*B ó B*A.

Matriz **A** :

Borrar A

Matriz **B** :

Borrar B

Matriz **C** :

Borrar C

Cambios:

C --> A

C --> B

A --> B

B --> A

A --> C

Operaciones:

A * B = C

B * A = C

Selecciona ahora la opción o las opciones que consideres correctas después de practicar

- [ ] Siempre podemos hacer el producto **A**x**A**
- [ ] Si podemos hacer los productos **A**x**B** y **A**x**C**, entonces se cumple que **A**x(**B**+**C**)=**A**x**B** + **A**x**C**
- [ ] **A**x**B** es lo mismo que **B**x**A**

Mostrar retroalimentación

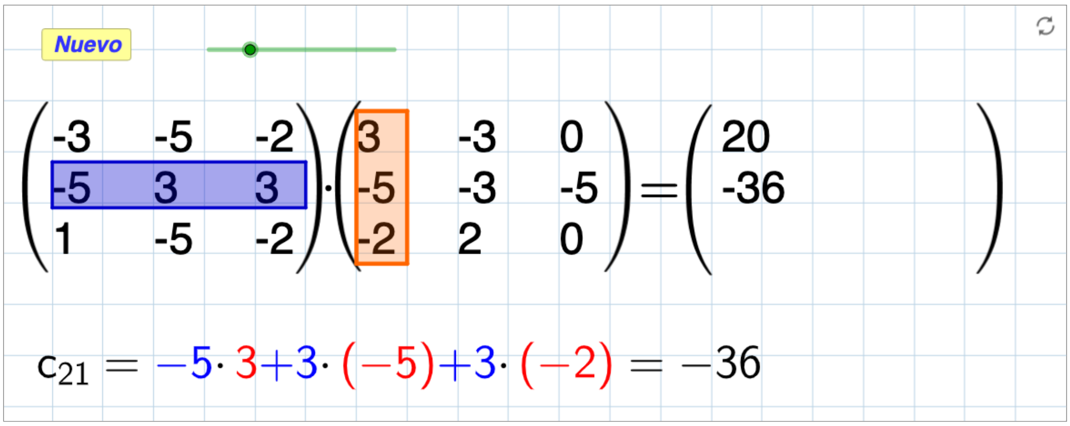
Solución

1. Incorrecto
2. Correcto
3. Incorrecto

Reflexiona

Bueno, ahora ya conoces bastante sobre las matrices y conoces cómo deben ser dos matrices para poder multiplicarlas. Echa un vistazo a esta aplicación de GeoGebra para saber cómo multiplicar matrices.

Mostrar retroalimentación



Applet alojado en GeoGebra. Licencia CC

Importante

Igual que si multiplicas cualquier número por 1 obtienes el mismo número, hay una matriz que tiene el mismo efecto. La matriz identidad I, que viste en el punto 1.2, cumple que si la multiplicas por cualquier otra matriz, al final nos queda esa segunda matriz.

Recuerda que la matriz identidad está formada por 1 en la diagonal y 0 en el resto de elementos. Por ejemplo, la matriz identidad de orden 2 es:

$$\mathrm{Id} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Compruébalo escribiendo cualquier matriz y multiplicándola por la matriz identidad del orden conveniente para poder hacer el producto. Verás que obtienes la matriz del principio.

Ejercicio resuelto

Televisor. Imagen obtenida del banco de imágenes del MEC

La empresa de electrodomésticos *ElectroYA* tiene un almacén en algunas capitales de provincia de España. Cada almacén está especializado en almacenar unos pocos tipos de electrodomésticos pero no todos. Esto hace que los almacenes tengan que estar continuamente conectados intercambiando aquellos que ha vendido la empresa en una provincia determinada pero que se encuentran almacenados en otra provincia. Para este intercambio, la empresa ha contratado a la empresa de transportes *Telollevosa* a la que le pagará 0,22€ por cada kilómetro que realice entre las provincias y no le pagará nada por aquellos transportes que realice dentro de la misma provincia. Estos transportes que realiza dentro de la misma provincia son para llevar los electrodomésticos a las tiendas que la empresa *ElectroYA* tiene en esa provincia y que son las que realizan la venta de electrodomésticos a los clientes finales.

En la parte sur, tres de los almacenes que tienen que intercambiar continuamente electrodomésticos son los de Sevilla, Badajoz y Córdoba. Logísticamente la empresa *Telollevosa* tiene diseñado un plan de forma que desde cada uno de estos almacenes debe salir cada día de la semana el número de camiones que se indican que van al almacén de la provincia que aparece en la tabla.

	Camiones a SEVILLA	camiones a BADAJOZ	Camiones a CORDOBA
LUNES	1	2	2
MARTES	3	4	1
MIERCOLES	0	2	1
JUEVES	1	1	1
VIERNES	0	0	1

Camión. Imagen obtenida del banco de imágenes del MEC

Así, desde Sevilla salen, todos los lunes, 1 camión para Sevilla (Transporte a tiendas), 2 para Badajoz y 2 para Córdoba.

Desde Badajoz salen, todos los lunes, 1 camión para Sevilla, 2 para Badajoz (Transporte a tiendas) y 2 para Córdoba.

Desde Córdoba salen, todos los lunes, 1 camión para Sevilla, 2 para Badajoz y 2 para Córdoba (Transporte a tiendas).

Así sucesivamente cada día de la semana tal y como aparece en la tabla.

1.- Calcula el número de kilómetros que cada día se hacen desde cada una de las sedes por los que cobrará la empresa *Telollevosa* si los camiones solamente hacen el camino de ida. Para ello te proporcionamos la tabla de kilómetros que maneja la empresa.

2.- Calcula el número de kilómetros por los que cada día cobrará la empresa *Telollevosa.*

3.- Calcula el número de kilómetros por los que cobrará cada semana la empresa *Telollevosa.*

TABLA DE DISTANCIAS KILOMÉTRICAS ENTRE LAS CAPITALES DE PROVINCIA / BOARD OF DISTANCES IN KM BETWEEN MAI	
Avila	
318	Badajoz

318	**Badajoz**																								
717	1022	**Barcelona**																							
401	694	620	**Bilbao**																						
243	536	583	158	**Burgos**																					
229	89	918	605	447	**Cáceres**																				
618	342	1284	1058	900	369	**Cádiz**																			
532	805	284	607	524	701	873	**Castellón**																		
256	318	811	585	427	324	464	463	**Ciudad Real**																	
457	272	908	795	637	319	263	610	201	**Córdoba**																
538	772	1118	644	535	683	1072	1026	799	995	**A Coruña**															
282	555	562	562	404	451	708	305	244	445	776	**Cuenca**														
817	1122	100	720	683	1018	1384	384	911	1008	1218	662	**Gerona**													
534	438	868	829	671	485	335	584	278	166	1043	479	968	**Granada**												
358	676	468	152	115	595	999	455	526	736	650	464	568	770	**Logroño**											
440	674	1020	546	437	585	974	928	696	897	98	678	1120	945	352	**Lugo**										
115	401	621	395	237	297	663	417	190	400	609	167	721	434	336	511	**Madrid**									
644	436	997	939	781	506	265	713	388	187	1153	615	1097	129	880	1055	544	**Málaga**								
516	675	590	796	638	654	613	306	357	444	1010	292	690	278	694	912	401	407	**Murcia**							
443	645	1027	605	447	556	945	938	699	921	175	689	1127	955	562	95	521	1065	922	**Orense**						
373	614	902	304	322	525	914	868	641	851	340	618	1002	885	391	242	451	995	852	337	**Oviedo**					
168	461	669	244	86	372	761	596	424	640	450	407	769	674	201	352	240	784	641	361	248	**Palencia**				
437	755	437	159	203	650	1070	458	597	807	738	535	537	841	88	640	407	951	714	650	463	289	**Pamplona**			
545	747	1129	707	549	658	1047	1040	701	977	121	791	1229	1058	664	148	623	1153	1024	102	390	463	752	**Pontevedra**		
97	299	778	395	237	210	599	629	353	529	473	379	878	631	352	375	212	756	613	346	315	162	440	448	**Salamanc**	
475	768	529	119	232	679	1132	551	659	869	763	636	629	903	169	665	469	1013	807	679	423	318	92	781	469	**S. Se**
369	662	693	108	156	573	1056	680	583	793	547	560	793	827	225	449	393	937	794	544	207	201	267	666	363	227
67	385	650	355	197	296	750	504	277	497	560	254	750	521	299	462	87	631	488	467	363	158	370	569	164	429
493	217	1046	993	775	264	125	762	339	138	947	583	1146	256	874	849	538	219	534	820	789	636	945	922	474	1007

Mostrar retroalimentación

1.- Tenemos que la tabla de kilómetros es:

	SEVILLA	BADAJOZ	CORDOBA
SEVILLA	0	217	138
BADAJOZ	217	0	272
CORDOBA	138	272	0

Por lo que para calcular el número de kilómetros que se hace desde cada almacén debemos multiplicar:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 217 & 138 \\ 217 & 0 & 272 \\ 138 & 272 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 710 & 761 & 682 \\ 1006 & 923 & 1502 \\ 572 & 272 & 544 \\ 355 & 489 & 410 \\ 138 & 272 & 0 \end{pmatrix} = C$$

Por tanto el número de kilómetros realizado cada día de la semana por los camiones que salen desde cada una de las provincias es el que aparece en la tabla siguiente.

	Kilometros desde SEVILLA	Kilometros desde BADAJOZ	Kilometros desde CORDOBA
LUNES	710	761	682
MARTES	1006	923	1502

MIERCOLES	572	272	544
JUEVES	355	489	410
VIERNES	138	272	0

2.- Para calcular el número de kilómetros por los que cada día cobrará la empresa *Telollevosa* bastará con que sumemos por filas los elementos que aparecen en la tabla anterior, es decir, los elementos que aparecen en la matriz C . Algo parecido hemos hecho ya en el primer ejercicio resuelto de la página anterior. Lo único que debemos hacer es considerar la matriz

$M=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ Realizando el producto $C\times M$ ya lo tendríamos.

$$C\times M=\begin{pmatrix}710 & 761 & 682\\1006 & 923 & 1502\\572 & 272 & 544\\355 & 489 & 410\\138 & 272 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2153\\3431\\1388\\1254\\410\end{pmatrix}=H$$

El lunes cobrará por 2153 kilómetros, el martes por 3431, el miércoles por 1388, el jueves por 1254 y el viernes por 410.

3.- Para calcular el número de kilómetros por los que cobrará cada semana la empresa *Telollevosa* debemos sumar todos los elementos de la matriz H . Para ello consideremos la matriz

$P=(1\ 1\ 1\ 1\ 1)$ Realizando el producto $P\times H$ ya lo tendríamos.

$$P\times H=(1\ 1\ 1\ 1\ 1)\begin{pmatrix}2153\\3431\\1388\\1254\\410\end{pmatrix}=8636$$

Por lo que la empresa cobrará cada semana en esa zona por la realización de 8636 kilómetros, es decir, 8636·0,22 = 1899,92€

Comprueba lo aprendido

En el ejercicio anterior, consideramos ahora otra zona en la que se encuentran implicadas 4 capitales de provincia: Barcelona, Cuenca, Madrid y Lugo. Estos almacenes tienen que intercambiar continuamente electrodomésticos. Logísticamente la empresa *Telollevosa* tiene diseñado otro plan de forma que desde cada uno de estos almacenes debe salir cada día de la semana el número de camiones que se indican que van al almacén de la provincia que aparece en la tabla.

Catedral de Lugo. Imagen obtenida del banco de imágenes del MEC

	Camiones a BARCELONA	camiones a CUENCA	Camiones a MADRID	Camiones a LUGO

LUNES	1	2	2	1
MARTES	3	2	1	0
MIERCOLES	2	1	1	1
JUEVES	3	2	2	0
VIERNES	1	1	1	1

Así, desde Barcelona salen, todos los lunes, 1 camión para Barcelona (Transporte a tiendas), 2 para Cuenca, 2 para Madrid y 1 para Lugo.

Desde Cuenca salen, todos los lunes, 1 camión para Barcelona, 2 para Cuenca (Transporte a tiendas), 2 para Madrid y 1 para Lugo.

Desde Madrid salen, todos los lunes, 1 camión para Barcelona, 2 para Cuenca, 2 para Madrid (Transporte a tiendas) y 1 para Lugo.

Desde Lugo salen, todos los lunes, 1 camión para Barcelona, 2 para Cuenca, 2 para Madrid y 1 para Lugo (Transporte a tiendas).

Así sucesivamente cada día de la semana tal y como aparece en la tabla.

1.- Calcula el número de kilómetros que cada día se hacen desde cada una de las sedes por los que cobrará la empresa *Telollevosa* si los camiones solamente hacen el camino de ida. Para ello te proporcionamos la tabla de kilómetros que maneja la empresa.

2.- Calcula el número de kilómetros por los que cada día cobrará la empresa *Telollevosa.*

3.- Calcula el número de kilómetros por los que cobrará cada semana la empresa *Telollevosa.*

1.- El número de kilómetros que cada día se hacen desde cada una de las sedes, por los que cobrará la empresa *Telollevosa*, viene recogido en la siguiente tabla:

	Kilómetros desde Barcelona	Kilómetros desde Cuenca	Kilómetros desde Madrid	Kilómetros desde Lugo
Lunes				
Martes				
Miércoles				
Jueves				
Viernes				

2.- El número de kilómetros por los que cada día cobrará la empresa *Telollevosa* viene recogido en la siguiente tabla:

Día	Kilómetros
Lunes	
Martes	
Miércoles	
Jueves	
Viernes	

3.- El número de kilómetros por los que cobrará cada semana la empresa *Telollevosa.* es

Enviar

Practica ahora lo que has aprendido.

Entra en el siguiente enlace y comprueba la realización del producto de matrices. Para ello, debes indicar primero el orden de las matrices. Después pulsa el botón autogenerar y te propondrán la realización del producto de las dos matrices. Realiza los cálculos en una hoja. Posteriormente pulsa sobre el botón "Producto A·B" para verificar la solución que has propuesto.

Multiplicación de matrices

Vídeo alojado en [Youtube]

Bueno has llegado al final del tema, ¿y qué te encuentras aquí? Pues esta sección va a ser como un **Para saber más** temático. Al acabar los estudios de Bachillerato, hay personas que desean realizar la prueba de acceso a la Universidad, ¿es tu caso?

Aunque no lo sea, esta sección puede interesarte porque encontrarás problemas resueltos y direcciones de Internet donde practicas, siempre en relación con pruebas que han aparecido en años anteriores en exámenes de selectividad o PAU. Debes tener claro que este tipo de problemas no aparecerán en las tareas que tú tendrás que realizar, por lo que no tienes que aprender los procedimientos que vamos a desarrollar aquí. Pero es indudable que las operaciones que realicemos si serán del mismo tipo que las que tendrás que realizar en las actividades que te propongamos, por eso, si tienes tiempo, nunca estará de más que intentes algunos de los ejercicios que encontrarás en esta última parte.

Vamos a seleccionar problemas aparecidos los últimos años en los exámenes de Selectividad. Suele ser corriente que alguno de esos problemas tenga varios apartados y alguno de ellos son de distinto tema del que estemos tratando, en ese caso seleccionaremos sólo la parte correspondiente, si aún no hemos visto el resto, o si es de algún tema anterior la incluiremos aunque pasaremos más de pasada por ese apartado.

Ejercicio resuelto

Considera $A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$, siendo a un número real.

Calcula el valor de a para que $A^2-A=\begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$

Mostrar retroalimentación

Lo primero es calcular el cuadrado de A, para ello debemos multiplicar la matriz por si misma.

$$A^2=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+0 & a-a \\ 0+0 & 0+a^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

a continuación le restamos a esa matriz la matriz A e igualamos a la matriz que queremos como solución.

$$A^2-A=\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2-a & -1 \\ 0 & a^2+a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$$

De igualar las dos matrices obtenemos que se debe verificar el sistema $\left\{\begin{matrix} a^2-a=12 \\ a^2+a=20 \end{matrix}\right\}$.

Si cambiamos de signo la primera ecuación y se la sumamos a la segunda obtenemos 2a=8 por lo que el valor que nos pide el problema es a=4.

Ejercicio resuelto

Sea I la matriz identidad de orden 2 y $A=\begin{pmatrix}1 & m\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

Encuentra los valores de m para los cuales se cumple que $(A-I)^2=O$, donde O es la matriz nula de orden 2.

Mostrar retroalimentación

Lo primero es hallar la diferencia $A-I=\begin{pmatrix}1 & m\\ 1 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & m\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ y a continuación se eleva al cuadrado. $(A-I)^2=\begin{pmatrix}0 & m\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & m\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}m & 0\\ 0 & m\end{pmatrix}$.

Podemos observar fácilmente que el único valor que hace nula esta última matriz es m=0.

Ejercicio resuelto

Sea I la matriz identidad de orden 3 y sea $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & b\end{pmatrix}$

Determina el valor de b para que se verifique $A^2-2A+I=0$

Mostrar retroalimentación

Hallamos el cuadrado de A $A^2=\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & b\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & -b\\ -2 & 1 & -b\\ b & 0 & -1+b^2\end{pmatrix}$

Ahora calculamos la expresión matricial

$$A^2-2A+I=\begin{pmatrix}-1 & 0 & -b\\ -2 & 1 & -b\\ b & 0 & -1+b^2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0 & 2\\ 2 & -2 & 2\\ -2 & 0 & -2b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & -b+2\\ 0 & 0 & -b+2\\ b-2 & 0 & b^2-2b\end{pmatrix}$$

Si igualamos a 0 esa última matriz nos salen las ecuaciones b-2=0 y $b^2-2b=0$.

La segunda tiene dos soluciones, ya que de igualar $b^2-2b=b(b-2)=0$ nos salen los valores b=0 y b-2=0, es decir, b=2. Pero para que se cumplan todas las ecuaciones es necesario que b=2. Esa es la solución pedida.

Ejercicio resuelto

Representamos por M^t la matriz traspuesta de M.

Considera las matrices $A=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & 4 & 3\end{pmatrix}$

Calcula $(AB)^t$ y $(BA)^t$

Calcula $(AB)^t$ y $(BA)^t$

Mostrar retroalimentación

Lo primero es hallar los productos de ambas matrices.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 8 & 6 \\ -1 & -4 & -3 \end{pmatrix} \qquad B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = (6)$$

Por lo tanto las traspuestas son $(A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 8 & -4 \\ 3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$ y $(B \cdot A)^t = (6)$

Para saber más

DIRECCIONES DE INTERÉS

Internet está lleno de páginas en donde se pueden encontrar los enunciados de Selectividad de convocatorias anteriores. En muchas de ellas puedes encontrar además ejercicios resueltos.

En la página de "Distrito único andaluz" puedes encontrar los enunciados de todas las materias desde la convocatoria de 2004.

Exámenes de Selectividad

Si quieres encontrar ejercicios resueltos te damos la siguiente dirección donde puedes encontrar bastantes ejemplos.

Ejercicios resueltos 1

Debes tener en cuenta que estas páginas tienen ejercicios de todas las unidades, es decir, no solamente de matrices, por lo que te servirán en cualquier parte en la que te encuentres.

Importante

Se llama **matriz** a un conjunto de números ordenados por filas y columnas. Diremos que el **orden de la matriz** es nxr si tiene n filas y r columnas.

Como ejemplo de matrices podemos ver las siguientes:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 11 \end{pmatrix}$$

la primera es de orden 2x3, la segunda de orden 3x1 y la última de orden 2x2.

Importante

Dada una matriz cualquiera, llamaremos **submatriz** a otra que se obtiene eligiendo determinadas filas y columnas de la matriz original. La única condición es que los elementos que están en la misma fila o en la misma columna de la submatriz estuvieran también en la misma fila o columna de la matriz original.

De la matriz $\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 5 & 10 & -3 \\ 6 & 1 & 2 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}$ obtenemos la submatriz $\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ eligiendo las filas 2ª, 3ª y 4ª y las columnas 1ª y 3ª.

Importante

Como has podido observar en el ejemplo anterior, vamos a poder sumar las matrices. **Para poder sumar dos matrices**, las dos deben tener el mismo número de filas y el mismo número de columnas, es decir, **las dos deben tener el mismo orden**. El resultado de sumar dos matrices A y B de orden nxm va a ser otra matriz de orden nxm de forma que el elemento que se encuentra en la posición ij es el resultado de sumar el elemento a_{ij} con el elemento b_{ij}.

En el caso de la Autoevaluación anterior, obtendríamos la siguiente suma:

$$\begin{pmatrix} 10 & 8 & 5 \\ 4 & 7 & 5 \\ 3 & 6 & 10 \\ 4 & 6 & 2 \\ 9 & 4 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 7 & 12 \\ 10 & 9 & 14 \\ 10 & 8 & 5 \\ 12 & 14 & 15 \\ 7 & 9 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10+5 & 8+7 & 5+12 \\ 4+10 & 7+9 & 5+14 \\ 3+10 & 6+8 & 10+5 \\ 4+12 & 6+14 & 2+15 \\ 9+7 & 4+9 & 8+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 15 & 17 \\ 14 & 16 & 19 \\ 13 & 14 & 15 \\ 16 & 20 & 17 \\ 16 & 13 & 20 \end{pmatrix}$$

De la misma forma se puede realizar la resta o diferencia de dos matrices. Imagina que en el caso de los Supermercados, en lugar de tener la tabla de los pedidos que ha realizado Raimundo, tuviéramos la tabla de las ventas que ha realizado cada uno de los

Raimundo, tuviéramos la tabla de las ventas que ha realizado cada uno de los supermercados.

Importante

Ahora estamos en disposición de definir el producto de un número por una matriz. Al igual que el producto de 3xt es sumar 3 veces el número t, 3xt = t+t+t, el producto de un número n por una matriz A (nxA) es sumar n veces la matriz A.

La forma más rápida de realizar la operación es multiplicar cada uno de los términos de la matriz por el número n.

Si tenemos la matriz $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}$ obtenemos

$$n\times A = n\times\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n\times a_{11} & n\times a_{12} & n\times a_{13} \\ n\times a_{21} & n\times a_{22} & n\times a_{23} \\ n\times a_{31} & n\times a_{32} & n\times a_{33} \\ n\times a_{41} & n\times a_{42} & n\times a_{43} \end{pmatrix}$$

Importante

Si tenemos dos matrices A de orden $n\times m$ y B de orden $p\times q$, el producto $A\times B$ es otra matriz cuyos elementos se obtienen multiplicando de forma ordenada cada fila de la matriz A por todas las columnas de la matriz B. Así, el elemento que ocupa la posición 3,7 en la matriz resultante es el resultado de multiplicar la fila 3 de la matriz A por la columna 7 de la matriz B, es decir, cada elemento de la fila 3 de la matriz A se multiplica por el elemento correspondiente de la columna 7 de la matriz B y se suman los resultados.

Por tanto, el número de elementos que tiene la matriz A en cada fila (número de columnas de A) tiene que coincidir con el número de elementos que tenga la matriz B en cada columna (número de filas de B). En nuestro caso, para que se puedan multiplicar A y B debe cumplirse que $m=p$.

Dicen que una imagen vale más que mil palabras. Te proponemos el siguiente ejercicio resuelto para que compruebes si has captado como se realiza esta operación con matrices...

Importante

Igual que si multiplicas cualquier número por 1 obtienes el mismo número, hay una matriz que tiene el mismo efecto. La matriz identidad I, que viste en el punto 1.2, cumple que si la multiplicas por cualquier otra matriz, al final nos queda esa segunda matriz.

Recuerda que la matriz identidad está formada por 1 en la diagonal y 0 en el resto de elementos. Por ejemplo, la matriz identidad de orden 2 es:

$$\mathrm{Id} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Compruébalo escribiendo cualquier matriz y multiplicándola por la matriz identidad del orden conveniente para poder hacer el producto. Verás que obtienes la matriz del principio.

Aviso Legal

El presente texto (en adelante, el "**Aviso Legal**") regula el acceso y el uso de los contenidos desde los que se enlaza. La utilización de estos contenidos atribuye la condición de usuario del mismo (en adelante, el "**Usuario**") e implica la aceptación plena y sin reservas de todas y cada una de las disposiciones incluidas en este Aviso Legal publicado en el momento de acceso al sitio web. Tal y como se explica más adelante, la autoría de estos materiales corresponde a un trabajo de la **Comunidad Autónoma Andaluza, Consejería de Educación y Deporte (en adelante Consejería de Educación y Deporte**).

Con el fin de mejorar las prestaciones de los contenidos ofrecidos, la Consejería de Educación y Deporte se reserva el derecho, en cualquier momento, de forma unilateral y sin previa notificación al usuario, a modificar, ampliar o suspender temporalmente la presentación, configuración, especificaciones técnicas y servicios del sitio web que da soporte a los contenidos educativos objeto del presente Aviso Legal. En consecuencia, se recomienda al Usuario que lea atentamente el presente Aviso Legal en el momento que acceda al referido sitio web, ya que dicho Aviso puede ser modificado en cualquier momento, de conformidad con lo expuesto anteriormente.

Régimen de Propiedad Intelectual e Industrial sobre los contenidos del sitio