INSTITUTO de ENSEÑANZAS a DISTANCIA de ANDALUCÍA

PAU

Mayores de 25 años

Contenidos

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales
Resumen de las unidades 1 y 2

Importante

Pensando en la prueba...

Hasta ahora, en las pruebas realizadas no se han propuesto cuestiones relacionadas exclusivamente con números racionales.

Sin embargo, y de forma implícita sí que han aparecido problemas en los que han sido necesarios utilizar este tipo de números. Por ejemplo, en procesos en los que son necesarios el uso de herramientas de cálculo como pueden ser la regla de Laplace o racionalización.

Por otro lado, en la cabecera de la prueba se menciona: "No olvide que los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados".

Por tanto, y debido a la importancia de tener soltura al operar con este tipo de números, se puede considerar "De los naturales a los racionales" como un pilar imprescindible para realizar la prueba con éxito.

Clasificación de los números racionales

Si recuerdas en el tema 1 de la primera unidad vimos tres grandes conjuntos numéricos, los **racionales** que incluían entre ellos a los **enteros** y a su vez estos incluían los **naturales.**

Imagen de elaboración propia

- Un número natural es cualquiera de los números que se utilizan para contar un conjunto (recuerda que según quién escriba esta definición, contendrá o no el 0).

- Los números enteros son el conjunto numérico formado por los números naturales y los opuestos de estos, con el 0 siempre incluido. Además, de la clasificación en enteros positivos y en enteros negativos, podemos dividirlos en **primos** y **compuestos** en función de sus divisores.

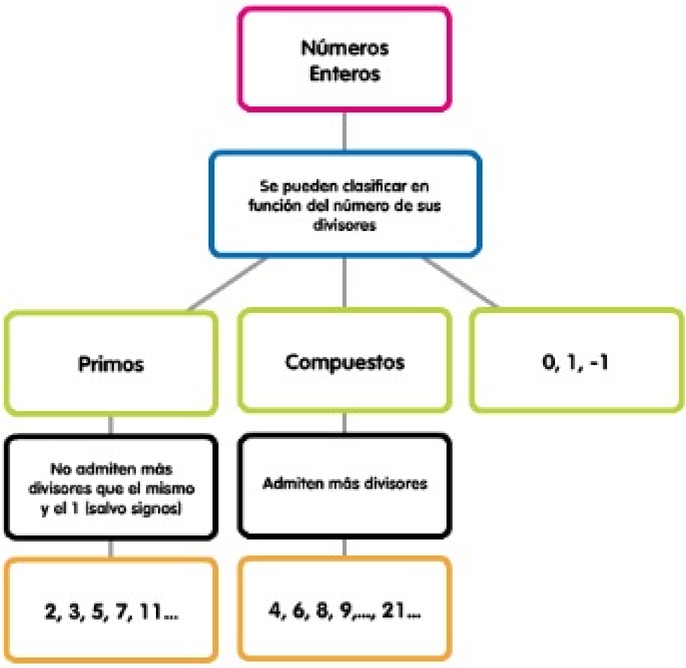


Imagen de elaboración propia. Haz clic para ampliar

- Por último, decimos que un número es **racional** si se puede expresar en forma de fracción, es decir, si es el cociente entre dos números enteros. Los números racionales admiten también otra forma de expresión, la decimal, y en función de ella podemos dividir los números racionales en: **enteros**, **exactos** (si tiene un número finito de decimales), **periódicos puros** (si tiene un número infinito de decimales que se repiten) y **periódicos mixtos** (si tiene un número infinito de decimales que se repiten a partir de una cierta posición decimal).

Históricamente la aparición de estos conjuntos numéricos está ligada a las necesidades que le iban surgiendo al hombre. Por ejemplo, el nacimiento de los racionales está íntimamente ligado a la necesidad de dividir la unidad en partes, o la aparición de los enteros a expresar numéricamente acciones como "deber".

Operaciones con números racionales

El plato fuerte de este tema es el desarrollo de destrezas de cálculo con estos conjuntos numéricos. Pero, ¿qué no debemos olvidar?

1. Las distintas operaciones con números. En el caso de la señal de advertencia, ten en cuenta que dependiendo de los elementos que intervengan en la operación, el resultado no tiene porqué pertenecer a ese conjunto numérico. Así por ejemplo, $2-3=-1$, es decir, que esta resta de números naturales da como resultado un número entero.

	Naturales	**Enteros**	**Racionales**
Suma	✔	✔	✔
Resta	⚠	✔	✔
Multiplicación	✔	✔	✔
División	⚠	⚠	✔
Valor absoluto	✔	✔	✔
Opuesto	✖	✔	✔
Potenciación	⚠	⚠	⚠

2. Tener siempre un esquema mental de cómo realizar las operaciones. Por ejemplo para sumar y restar números fraccionarios sin recurrir a la expresión decimal, tenemos que buscar fracciones equivalentes, recurriendo al mínimo común múltiplo.

3. Normalmente, las operaciones vienen combinadas, no aisladas. Por eso el proceso para resolverlas pasa por hacer estas operaciones cada vez más sencillas teniendo en cuenta: la jerarquía, la regla de

los signos, la forma de encadenar las operaciones (siempre mediante iguales), las propiedades de las operaciones, y por supuesto sometiéndolas a una comprobación:

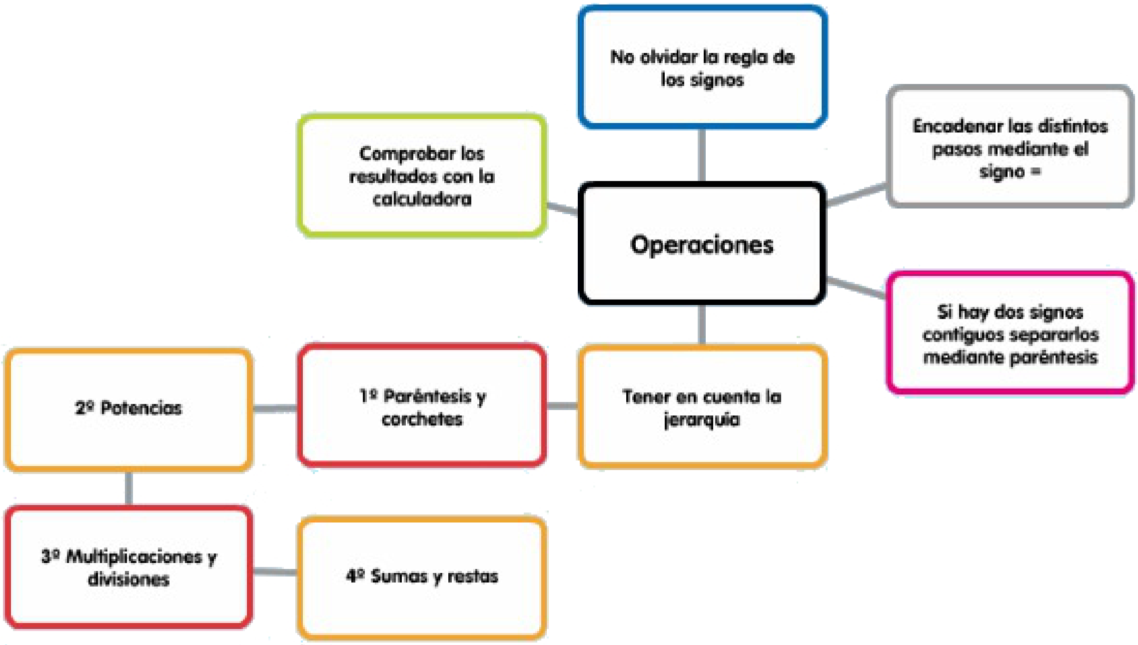


Imagen de elaboración propia

Propiedades suma, resta, multiplicación y división de números racionales por juanmemol

$$0^n = 0$$

$$a^0 = 1$$

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m}$$

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Al trabajar con racionales el exponente tiene que ser entero

Propiedades de las potencias

Ejercicio resuelto

Resuelve las siguientes operaciones:

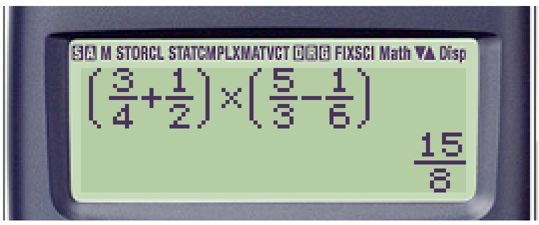
a. $\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{5}{3}-\frac{1}{6}\right)$

b. $\left(-1+\frac{3}{4}-\frac{1}{3}\right) : \left(2-\frac{1}{4}\right)$

No te olvides, simplificar los resultados y comprobarlos con la calculadora.

Mostrar retroalimentación

a. $\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{5}{3}-\frac{1}{6}\right) = \left(\frac{3}{4}+\frac{2}{4}\right) \cdot \left(\frac{10}{6}-\frac{1}{6}\right) = \frac{5}{4} \cdot \frac{9}{6} = \frac{45}{24} = \frac{15}{8}$



b. $\left(-1+\frac{3}{4}-\frac{1}{3}\right) : \left(2-\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{-12+9-4}{12}\right) : \left(\frac{8-1}{4}\right) = \frac{-7}{12} : \frac{7}{4} = -\frac{1}{3}$

Ejercicio resuelto

Curso 2013/2014

Calcule:

$$\frac{1}{2}:\left(-\frac{3}{2}\right)^2+5\cdot\left(1-\frac{4}{5}\right)$$

$$3-\frac{2}{9}:\frac{8}{3}+6\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}$$

Mostrar retroalimentación

$$\frac{1}{2}:\left(-\frac{3}{2}\right)^2+5\cdot\left(1-\frac{4}{5}\right)=\frac{1}{2}:\frac{9}{4}+5\cdot\frac{1}{5}=\frac{4}{18}+1=\frac{22}{18}=\frac{11}{9}$$

$$3-\frac{2}{9}:\frac{8}{3}+6\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}=3-\frac{6}{72}+6\cdot\frac{2}{3}=3-\frac{1}{12}+4=7-\frac{1}{12}=\frac{83}{12}$$

Importante

Pensando en la prueba...

Como verás al final del apartado, las actividades que han aparecido los últimos años consisten en racionalizar y simplificar expresiones con radicales. Sin embargo, el trabajo con números reales da mucho más de sí, ya que nos ayudará a resolver cuestiones que aparecerán pronto. Por ejemplo: expresar un dominio o interpretar un resultado dado en notación científica.

Además, recuerda que las formas son también importantes, ya que más de una vez tendrás que recurrir a aproximar un número para trabajar con su expresión decimal de una forma fiable.

Universidades Públicas de Andalucía

Los números reales

Se llama número real a cualquier expresión decimal, ya tenga una cantidad finita o infinita de cifras. El conjunto de los números reales se denota por $\mathbb{R}$.

Se clasifican en:

- **Racionales** (pueden expresarse como cociente de números enteros).
- **Irracionales** (no racionales).

Los números reales cumplen una relación de orden que nos lleva a poder representarlos de forma unívoca y ordenada en un objeto matemático mitad numérico, mitad geométrico llamado **recta real**. Llenan completamente la recta, de tal forma que todo punto de la recta real tiene una expresión entera o decimal (exacta, periódica o no periódica).

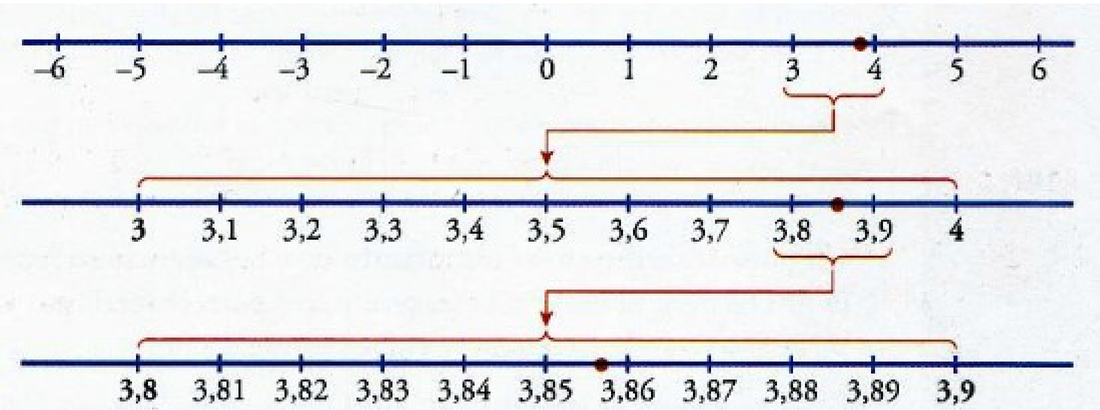


Imagen de la wiki maralboran bajo CC

Para manejar estas expresiones decimales infinitas recurrimos a aproximarlas mediante expresiones decimales finitas, para lo que disponemos de varios métodos:

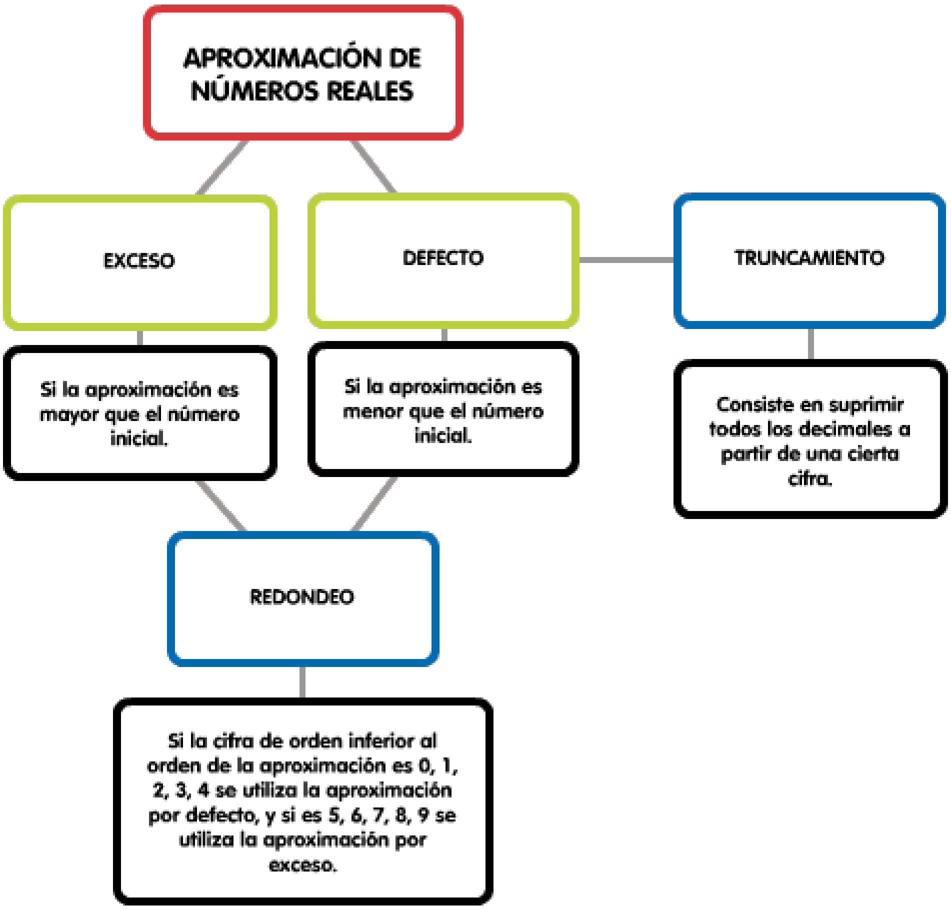


Imagen de elaboración propia

Debes tener en cuenta que el trabajo con aproximaciones siempre implica que perdamos algo de fiabilidad en el resultado, es decir, que cometamos algún error. Tenemos dos formas de cuantificarlo:

- A través del **error absoluto**, que es la diferencia entre el valor real de un número y su aproximación. Se suele tomar el valor absoluto de dicha diferencia.

- A través del **error relativo**, que es el cociente entre el error absoluto y el valor del número. El error relativo se puede expresar en tanto por uno o en tanto por ciento.

Como decíamos al principio las formas también son importantes, y a veces el utilizar una notación adecuada puede simplificarnos mucho el trabajo. Este es el caso de la **notación científica**, que en algunos casos nos dará una aproximación, y nos ayudará a comparar magnitudes por muy grandes o pequeñas que sean, y solo teniendo en cuenta la potencia de 10 que la acompaña.

Un número escrito en notación científica se compone de tres partes:

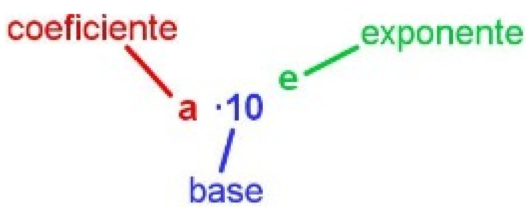


Imagen de elaboración propia

El **coeficiente** es un número decimal con una única cifra entera distinta de cero y dos o tres cifras decimales significativas.

La **base** es siempre el número 10.

Y el **exponente**, que indica el número al que se eleva la base, es un número entero.

En el siguiente enlace descubrirás cómo pasar de una notación a otra.

Raíces

Decimos que la **raíz n-ésima** de un número *a* es *b*, si *b* elevado a *n* es *a*. Es decir:

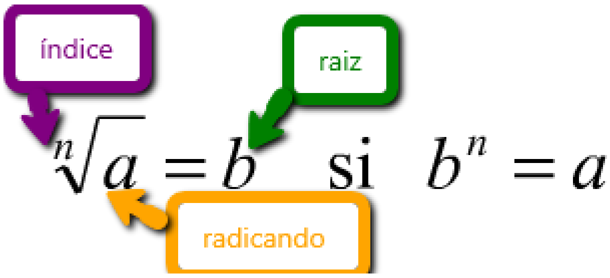


Imagen de elaboración propia

Las raíces o radicales también se pueden expresar en forma de potencia haciendo uso de exponentes fraccionarios. De esta forma, $\sqrt[n]{a^m}$ se puede expresar como $a^{\frac{m}{n}}$. Por lo tanto, para operar con raíces podemos aplicar las propiedades de las potencias.

Pinchando en la imagen de la izquierda, puedes descubrir cómo gracias a una guía de la página **3con14**:

- Operar con radicales
- Simplificar radicales
- Las peculiaridades de las raíces con índice par e impar...

Y por supuesto **racionalizar**, que es el proceso por el cual hacemos desaparecer las raíces del denominador (de esta forma, podemos operar con fracciones recurriendo al m.c.m.):

$$1^{o}\ caso: \frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a}{\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$$

$$2^{o}\ caso: \frac{a}{\sqrt[n]{b^m}} = \frac{a}{\sqrt[n]{b^m}} \cdot \frac{\sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^{n-m}}} = \frac{a\sqrt[n]{b^{n-m}}}{b}$$

$$3^{o}\ caso: \frac{a}{\sqrt{b} \pm \sqrt{c}} = \frac{a}{\sqrt{b} \pm \sqrt{c}} \cdot \frac{\sqrt{b} \mp \sqrt{c}}{\sqrt{b} \mp \sqrt{c}} = \frac{a\left(\sqrt{b} \mp \sqrt{c}\right)}{b-c}$$

Ejercicio resuelto

Curso 2009/2010

Racionalice y simplifique la fracción

$$\frac{2}{\sqrt{18}+\sqrt{8}}$$

Mostrar retroalimentación

Al ser el denominador una suma de raíces cuadradas, utilizamos el conjugado para racionalizar:

$$\frac{2}{\sqrt{18}+\sqrt{8}}=\frac{2(\sqrt{18}-\sqrt{8})}{(\sqrt{18}+\sqrt{8})(\sqrt{18}-\sqrt{8})}=\frac{2(\sqrt{18}-\sqrt{8})}{(\sqrt{18})^2-(\sqrt{8})^2}=\frac{2(\sqrt{18}-\sqrt{8})}{10}=\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{2}}{5}=\frac{\sqrt{2}}{5}$$

Otra posibilidad para resolverlo sería darnos cuenta que en el denominador podemos hacer previamente operaciones:

$$\frac{2}{\sqrt{18}+\sqrt{8}}=\frac{2}{\sqrt{2\cdot 3^2}+\sqrt{2^3}}=\frac{2}{3\sqrt{2}+2\sqrt{2}}=\frac{2}{5\sqrt{2}}$$

Y entonces estaríamos en el CASO I para racionalizar:

$$\frac{2}{5\sqrt{2}}=\frac{2}{5\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{5(\sqrt{2})^2}=\frac{2\sqrt{2}}{5\cdot 2}=\frac{2\sqrt{2}}{10}=\frac{\sqrt{2}}{5}$$

Ejercicio resuelto

Curso 2010/2011

Racionalice las expresiones:

a. $\frac{3}{4\sqrt{3}-3}$

b. $\frac{2}{\sqrt{27}}$

Mostrar retroalimentación

a. Como tenemos en el denominador la suma de raíces cuadradas, utilizamos el conjungado para racionalizar:

$$\frac{3}{4\sqrt{3}-3}=\frac{3(4\sqrt{3}+3)}{(4\sqrt{3}-3)(4\sqrt{3}+3)}=\frac{3(4\sqrt{3}+3)}{(4\sqrt{3})^2-3^2}=\frac{3(4\sqrt{3}+3)}{48-9}=\frac{3(4\sqrt{3}+3)}{39}=\frac{4\sqrt{3}+3}{13}$$

b. Como tenemos en el denominador una única raíz cuadrada, multiplicamos tanto en el numerador como en el denominador por ella misma para racionalizar:

$$\frac{2}{\sqrt{27}}=\frac{2\sqrt{27}}{(\sqrt{27})^2}=\frac{2\sqrt{27}}{27}=\frac{2\cdot 3\sqrt{3}}{27}=\frac{2\sqrt{3}}{9}$$

Otra posibilidad para resolverlo sería extraer factores en el denominador (en este caso es posible) antes de racionalizar :

$$\frac{2}{\sqrt{27}}=\frac{2}{\sqrt{3^3}}=\frac{2}{3\sqrt{3}}=\frac{2}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3(\sqrt{3})^2}=\frac{2\sqrt{3}}{3\cdot 3}=\frac{2\sqrt{3}}{9}$$

Importante

Pensando en la prueba...

El álgebra es la rama de las matemáticas que estudia las estructuras, las relaciones y las cantidades, por lo que te podrás hacer una idea de la importancia que tiene. En la prueba este hecho no se pasa por alto, nos encontramos con ejercicios de inecuaciones, sistemas y ecuaciones explícitamente, y con otros en los que se tienen que utilizar estas herramientas, ya que es necesario calcular parámetros o constantes a partir de unas condiciones.

Universidades Públicas de Andalucía

Expresiones algebraicas

Una **expresión algebraica** es una combinación de letras, números y signos de operaciones. Las letras suelen representar cantidades desconocidas y se denominan **variables o incógnitas**. Las expresiones algebraicas nos permiten traducir al lenguaje matemático expresiones del lenguaje habitual.

Hay distintos tipos de expresiones algebraicas:

- Dependiendo del número de sumandos, tenemos: **monomios** (1 sumando) y **polinomios** (varios sumandos).
- Algunos polinomios tienen nombre propio: binomio (2 sumandos), trinomio (3 sumandos), ...
- Dos expresiones algebraicas separadas por un signo se llama **ecuación**.
- Un caso particular de ecuación es la **identidad**, en la que los dos lados de la igualdad son equivalentes.
- Dos expresiones algebraicas separadas por los signos $<, >, \leq, \geq$ forman una **inecuación**.

Identidades notables

Hay tres fórmulas que debes conocer. Facilitan las operaciones y te serán de gran ayuda a la hora de simplificar expresiones. Para saber cuáles son y de dónde salen pulsa reproducir en cada una de las escenas.

Cuadrado de una suma

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b$$

Cuadrado de una diferencia

$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b$$

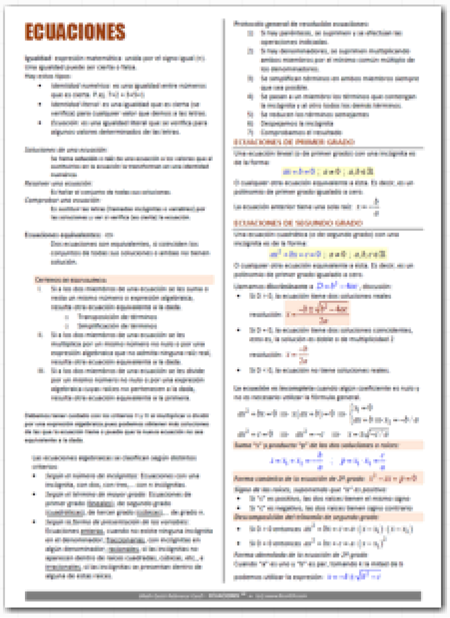
Suma por diferencia

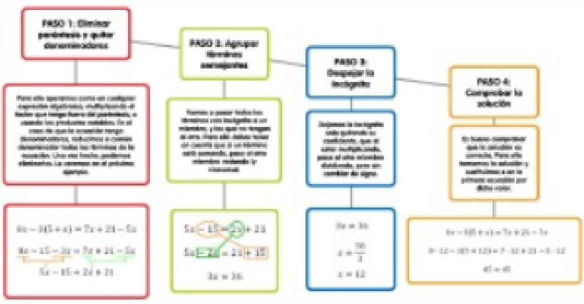
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Ecuaciones

Si pinchas en las imágenes de este apartado descubrirás un resumen de toda la teoría que vimos en el tema 3 sobre ecuaciones de primer y segundo grado. Pero... ¿qué no debemos olvidar sobre esta cuestión?

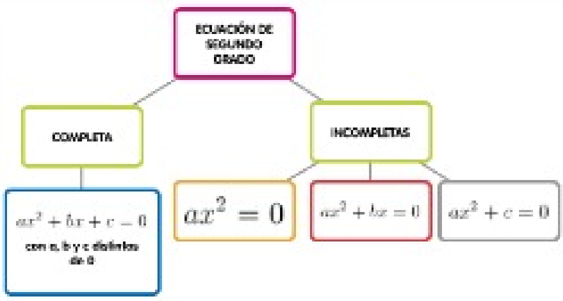
1. La terminología y nomenclatura asociada (grado, coeficiente, incógnita, solución...).
2. La técnica para resolverlos en función del tipo de ecuación a la que nos enfrentemos, de primer grado, de segundo grado completa (todos los coeficientes distintos de cero), de segundo grado incompleta...
3. El número de soluciones que vamos a obtener en función del tipo de ecuación.


ECUACIONES



Método de resolución ecuación primer grado

Haz clic para ampliar



Ecuaciones de segundo grado

Haz clic para ampliar

Inecuaciones

Para resolver una inecuación debes tener presente:

- La solución de una inecuación la forman todos los puntos que cumplen la desigualdad, siempre va a ser un conjunto de puntos, un intervalo o una semirrecta.
- Al sumar o restar la misma cantidad a los dos miembros de una inecuación la desigualdad no varía.
- Al multiplicar o dividir los dos miembros de una inecuación por un mismo número positivo, la desigualdad no varía.
- Al **multiplicar o dividir los dos miembros de una inecuación por un mismo número negativo**, el sentido de la **desigualdad cambia**.

Sistemas de ecuaciones lineales

Dos ecuaciones lineales de primer grado con dos incógnitas forman un **sistema de dos ecuaciones lineales**, la expresión general es:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Sustitución

Se despeja una de las incógnitas en una de las ecuaciones.
Se sustituye la incógnita despejada en la otra ecuación
Se halla el valor de la incógnita despejada inicialmente

Resolver
un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas es encontrar un par de valores (x,y) que verifiquen a la vez las dos ecuaciones.

Para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas se utilizan tres métodos

Sustitución
Igualación
Reducción

Igualación

Se despeja la misma incógnita en las dos ecuaciones.
Se igualan las dos expresiones y se resuelve la ecuación que queda.
Se halla el valor de la otra incógnita

Reducción

Se multiplican las dos ecuaciones por los números adecuados para que una de las incógnitas tenga coeficientes opuestos en ambas y se suman las dos ecuaciones.
Se resuelve la ecuación que queda.
Se halla el valor de la otra incógnita

Captura de pantalla del proyecto cidead del Ministerio de Educación

Un sistema de ecuaciones lineales según su número de soluciones, puede ser:

- **Compatible Determinado**, si tiene una única solución. Geométricamente, cada una de las ecuaciones representa una recta que se cortan en un único punto.
- **Compatible Indeterminado**, si tiene infinitas soluciones. Geométricamente, ambas ecuaciones son la misma recta.
- **Incompatible**, si no tiene solución. Geométricamente, las ecuaciones representan dos rectas paralelas que nunca se cortan.

Ejercicio resuelto

Universidades Públicas de Andalucía

Curso 2010/2011

Halle el conjunto de soluciones de la inecuación:

$$3(x-2) \leq \frac{4-2x}{3}$$

Mostrar retroalimentación

El primer paso al igual que si fuera una ecuación es quitar paréntesis y denominadores:

$$9(x-2)\leq 4-2x \Rightarrow 9x-18\leq 4-2x$$

A continuación, pasamos los términos que tengan x a un lado y los que no la tengan a otro:

$$9x+2x\leq 4+18 \Rightarrow 11x\leq 22$$

Por último, despejamos:

$$x\leq \frac{22}{11} \Rightarrow x\leq 2$$

Si queremos podemos dar la solución en formato gráfico también:

Ejercicio resuelto

Curso 2009/2010

Determine los coeficientes de la ecuación $3x^2-ax+b=0$ para que sus soluciones sean los valores 3 y -2.

Mostrar retroalimentación

Para que la ecuación tenga como soluciones 3 y -2, al sustituir x por dichos valores en la ecuación, la igualdad debe cumplirse . Es decir:

$$\begin{cases} x=3 \Rightarrow 3\cdot 3^2-a\cdot 3+b=0 & \Rightarrow 27-3a+b=0 \Rightarrow -3a+b=-27 \\ x=-2 \Rightarrow 3\cdot(-2)^2-a\cdot(-2)+b=0 & \Rightarrow 12+2a+b=0 \Rightarrow 2a+b=-12 \end{cases}$$

Por lo tanto, obtenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} -3a+b=-27 \\ 2a+b=-12 \end{cases}$$

Vamos a proceder a resolverlo por reducción, para lo que a la primera ecuación le cambiamos el signo (multiplicamos por -1) y le sumamos la segunda ecuación:

$$\begin{cases} -3a+b=-27 \\ 2a+b=-12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a-b=27 \\ 2a+b=-12 \end{cases} \Rightarrow 5a=15 \Rightarrow a=3$$

De esta forma obtenemos la incógnita a . Para obtener b, sustituimos a en una de las ecuaciones y despejamos:

$$-3\cdot 3+b=-27 \Rightarrow -9+b=-27 \Rightarrow b=-18$$

Por lo que la ecuación tendría que tener la forma: $3x^2-3x-18=0$

Para comprobar que el resultado es correcto, resolvemos la ecuación de segundro grado. Pero antes de aplicar la fórmula que conocemos, vamos a simplificar dicha ecuación ya que hemos observado que podemos dividir ambos miembros de la ecuación entre 3, con lo que nos quedaría:

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{1+5}{2} = 3 \\ x_2 = \frac{1-5}{2} = -2 \end{cases}$$

Importante

Pensando en la prueba...

Estamos ante el primer tema de análisis cuyo objetivo es el estudio de las funciones elementales. Como su propio nombre indica, elemental hace referencia a fundamental y primordial. Por tanto son los primeros pasos en el campo de las funciones y estos deben ser certeros.

En la prueba es frecuente que nos pidan representar funciones, por lo que debemos saber de qué tipo son (lineales, polinómicas, racionales...), y conocer sus propiedades y métodos concretos de representación nos facilitará mucho el camino.

Universidades Públicas de Andalucía

Definición y formas de expresión

Se define **función** real de variable real, como una relación que asocia a un número x de un **conjunto inicial** (subconjunto de los números reales), otro número y de un **conjunto final** (números reales). El número y **es único**, es decir, a x no se le puede asociar más de un número.

A las funciones se les suele llamar f , y la relación se expresa de la siguiente manera: $y = f(x)$.

La variable x , la que es objeto de estudio de la función, recibe el nombre de **variable independiente**. En tanto que la variable y , dado que sus valores dependen de x , se denomina **variable dependiente**.

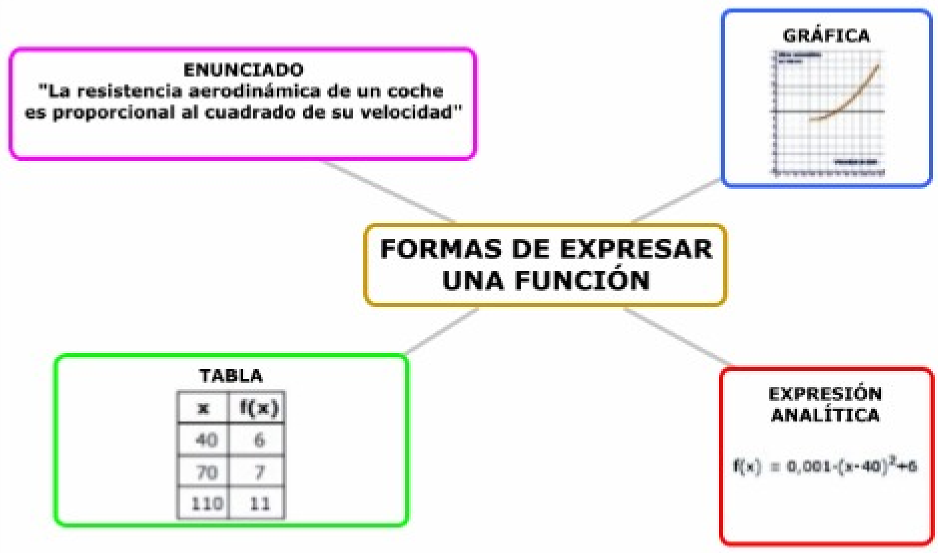


Imagen de elaboración propia

- Llamaremos **dominio** de una función f al conjunto de valores que toma la variable independiente, x . Lo denominaremos $D(f)$.
- En tanto que, llamaremos **recorrido** de f al conjunto de valores que toma la variable dependiente, y . Lo denotaremos $R(f)$.

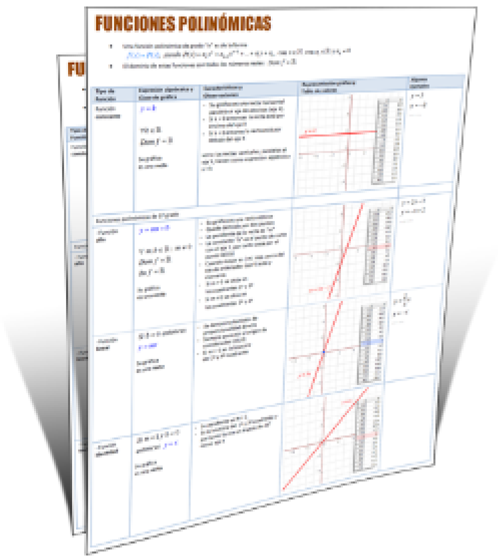
El camino más fácil de determinar el dominio de una función es conocer su gráfica o su expresión algebraica. En el caso del recorrido, la gráfica también es un buen medio, pero la fórmula no suele ser de gran ayuda en la mayoría de los casos.

Tipos de funciones

- Llamamos funciones lineales a las funciones cuya expresión algebraica es de la forma $f(x)=mx$, con m un número real. Al número m se le llama **pendiente** de la recta (gráfica de la función lineal). El dominio de una función lineal es todo $\mathbb{R}$, y excepto para el caso en que la pendiente $m=0$, el recorrido también es todo $\mathbb{R}$. Si la pendiente $m>0$, la función lineal es creciente (las gráficas de las funciones siempre se recorren de izquierda a derecha), en tanto que si $m<0$, la función es decreciente.

- A las funciones cuya expresión algebraica es del tipo $f(x)=ax^2+bx+c$, donde a , b y c son números reales y $a\neq 0$, se les denomina funciones cuadráticas y su gráfica es una parábola. Si el coeficiente $a>0$ entonces, la parábola va orientada hacia arriba, y si $a<0$ la parábola está orientada hacia abajo. El dominio de cualquier función cuadrática son todos los números reales. La gráfica es una parábola con el eje de simetría paralelo al eje de ordenadas, y para saber el recorrido es necesario conocer el vértice de dicha parábola.

  Si te fijas, la expresión analítica de ambas funciones es un polinomio, por esto ambas funciones pertenecen a un grupo más amplio llamado funciones polinómicas, de las que a continuación te ofrecemos un resumen:


FUNCIONES POLINÓMICAS

Resumen de 3con14.com bajo CC

Haz clic para ampliar

- Una función $f(x)$ se dice una **función definida a trozos** si no está definida mediante una única expresión en todo su dominio, de tal manera que dependiendo del trozo o intervalo que se considere estará definida de una forma diferente.

  El dominio de una función definida a trozos es la unión de cada uno de los intervalos en los que está dividida, si bien hay que tener en cuenta los valores en los que no esté definida la expresión correspondiente.

  Generalmente una función definida a trozos se expresa de la siguiente forma:

$$f(x)=\begin{cases} \text{expresion 1} & \text{si} \quad x \text{ esta en el intervalo 1} \\ \text{expresion 2} & \text{si} \quad x \text{ esta en el intervalo 2} \\ \quad\dots & \dots \qquad\qquad \dots \\ \text{expresion n} & \text{si} \quad x \text{ esta en el intervalo n} \end{cases}$$

- A las funciones cuya expresión algebraica es del tipo $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ donde a , b , c y d son números reales y $c\neq 0$, se les denomina funciones racionales, y su gráfica es una hipérbola. Las siluetas de todas estas funciones son muy similares. Pueden estar desplazadas, ser más o menos abiertas, crecer o decrecer, en función de los parámetros a , b , c y d . El dominio de estas funciones racionales es todo $\mathbb{R}$ menos el número donde se anula el denominador, es decir, donde $cx+d=0$.

- Si tenemos una función real $f(x)$, podemos definir la función valor absoluto de $f(x)$ como:

$$|f(x)|=\begin{cases} f(x) & \text{si} \quad f(x)\geq 0 \\ -f(x) & \text{si} \quad f(x)<0 \end{cases}$$

En el siguiente pdf puedes ver un resumen de estos últimos tipos de funciones, completado con algo de funciones irracionales. Te recomendamos que prestes especial atención a la parte de funciones racionales (proporcionalidad inversa) para repasar las asíntotas y las ramas infinitas que presentan:

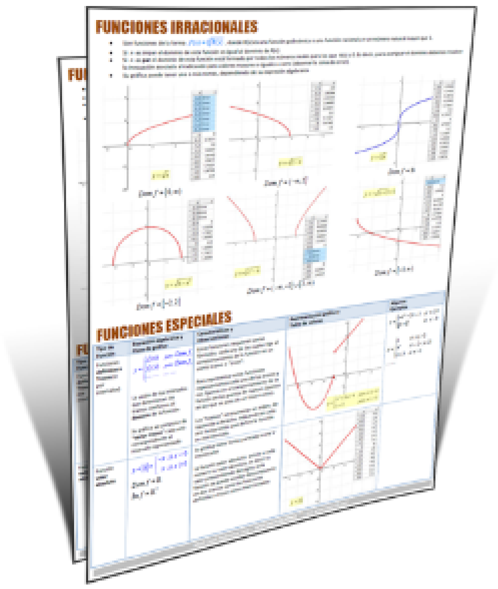


Imagen de 3con14.com bajo CC

- Funciones trigonométricas: la **función seno** es aquella que a un número real x le asocia el seno de ese número, es decir, $f(x)=sen x$. La **función coseno** la que a un número real x le asocia el coseno de ese número, es decir, $f(x)=\cos x$. Por último, la tangente la que a un número real x le asocia la tangente de ese número, es decir, $f(x)=tg x$.

- Las funciones del tipo $f(x)=a^x$; donde a es un número real positivo ($a>0$) y distinto de 1, se llaman **funciones exponenciales**.

- Las funciones logarítmicas son funciones del tipo $f(x)=log_a x$, donde a es un número real positivo ($a>0$) y distinto de 1.

Composición de funciones. Función inversa

Dadas dos funciones, f y g , se llama función compuesta de f con g a la función $g \circ f$ que se construye del siguiente modo: $(g \circ f)(x)=g[f(x)]$.

La expresión $(g \circ f)(x)$ la leemos como f compuesta con g de x. Para nombrarla comenzamos por la función que se encuentra a la derecha, más cerca de la x , porque es la primera que actúa sobre esta variable.

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones que cumplen que $(g \circ f)(x)=(f \circ g)(x)=x$. Entonces decimos que f y g son inversas. A la función g la representaremos como f^{-1} y a la función composición la llamaremos identidad.

Gráficamente una función es inversa de otra función cuando sus respectivas gráficas son inversas, es decir, son simétricas respecto de la bisectriz del primer y tercer cuadrante.

Ejercicio resuelto

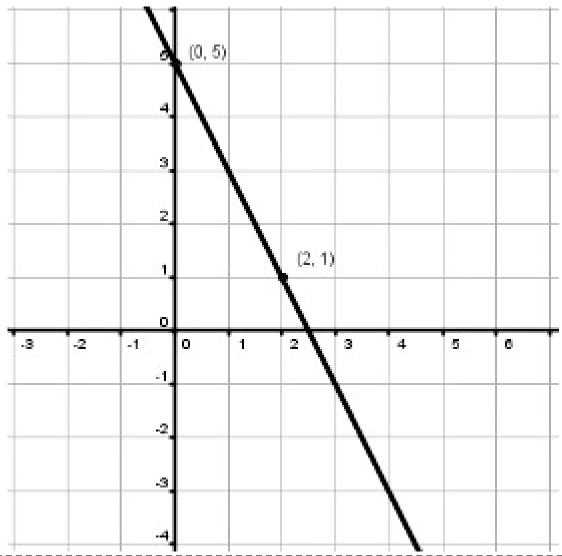
Curso 2009/2010

Representa la gráfica de la función $y=-2x+5$.

Mostrar retroalimentación

Antes de representar la función es necesario determinar de qué tipo se trata y cuáles son sus características. Es una función afín, su gráfica es una recta de pendiente $m=-2$ y ordenada en el origen 5. De este último dato deducimos que pasa por el punto (0, 5), como una recta queda determinada por dos puntos distintos, basta con hallar otro punto de la gráfica. Apliquemos y a cualquier número, por ejemplo $y(2)=-2\cdot2+5=-4+5=1$.

Representemos la gráfica de y sabiendo que es una recta que pasa por los puntos (0, 5) y (2, 1).



Ejercicio resuelto

Curso 2009/2010

Curso 2009/2010

Representa la función $y=(2-x)(x+1)-2$.

Mostrar retroalimentación

En primer lugar, tenemos que determinar qué tipo de función es la que nos piden representar. Si operamos nos queda $y=-x^2+x$.

Es una función cuadrática, su gráfica es una parábola. Hagamos el estudio previo a su representación.

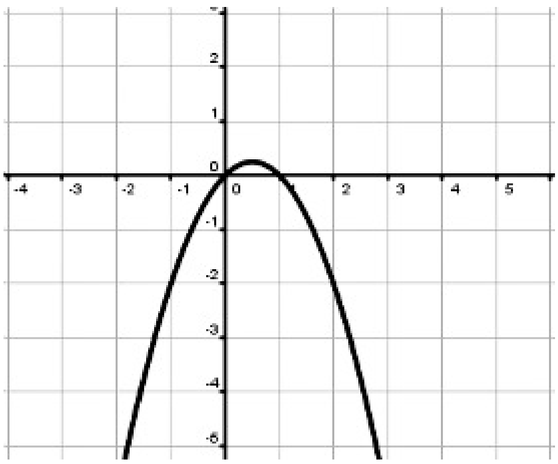
Como el coeficiente a que multiplica al término en x^2 es negativo ($a=-1$), las ramas parabólicas van hacia abajo y, por tanto, el vértice será el punto máximo de la parábola.

Corte con el eje OY : hallamos $f(0)=0$, por tanto la parábola pasa por el punto (0, 0), origen de coordenadas.

Corte con el eje OX : resolvemos la ecuación $f(x)=0$, es decir $-x^2+x=0$. Las soluciones son $x=0$ y $x=1$. Por tanto la función pasa por los puntos (0, 0) y (1, 0). El primero ya lo sabíamos.

Coordenadas del vértice: para la primera coordenada calculamos $\frac{-b}{2a}=\frac{-1}{2\cdot(-1)}=\frac{1}{2}$. Para la segunda coordenada hacemos $y(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$. Luego el vértice es $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$.

Con los datos anteriores podemos ya representar la gráfica de la función:



No olvidemos calcular el dominio y el recorrido: $D(y)=\mathbb{R}$, $R(y)=(-\infty, \frac{1}{4}]$.

Importante

Pensando en la prueba...

El estudio de la continuidad, aunque puede constituir una pregunta por sí sola, es también imprescindible para resolver ciertas cuestiones como son la representación de funciones o el estudio de la derivabilidad. Por lo que es importante no solo tener la idea intuitiva, sino también asociarla a su definición y al concepto de límite.
En cuanto a este último, aparece de forma recurrente en la prueba, sobre todo en lo que se refiere a la determinación de las asíntotas y de los límites laterales en un punto.

Universidades Públicas de Andalucía

En este segundo tema se introducen dos conceptos fundamentales para el estudio de las funciones: límite y continuidad. Ambos están íntimamente ligados, siendo imposible estudiar cada uno de ellos sin que intervenga el otro.

Límite de una función en un punto

Estudiar el límite de una función en un punto consiste en saber **cómo se comporta la función** cuando **nos acercamos** a ese punto.

Si $f(x)$ se acerca a l cuando x se aproxima al punto a, diremos que l es el **límite** de $f(x)$ en el punto a.

Lo anterior se expresa de la siguiente forma: $\lim_{x \to a} f(x) = l$.

- Si $f(x)$ se acerca a l cuando x se aproxima al punto a para valores menores que a, diremos que l es el **límite por la izquierda** de $f(x)$ en el punto a.

  Y se expresa: $\lim_{x \to a^-} f(x) = l$.

- Si $f(x)$ se acerca a m cuando x se aproxima al punto a para valores mayores que a, diremos que l es el **límite por la derecha** de $f(x)$ en el punto a.

  Se escribe: $\lim_{x \to a^+} f(x) = m$.

Si los dos límites anteriores coinciden, existe el $\lim_{x \to a} f(x)$ y es igual a ese valor común.

Límite de una función en el infinito

Hasta ahora solo nos ha preocupado el límite de una función en un punto, pero también nos podemos preguntar qué ocurre con $f(x)$ cuando x, la variable independiente, se aleja mucho del origen. Es decir, qué ocurre con $f(x)$ cuando x **tiende a infinito**. Tanto a más infinito como a menos infinito.

Si $f(x)$ se acerca a l cuando x se hace muy grande en valor absoluto, diremos que l es el límite de $f(x)$ cuando x tiende a **infinito**.

Se expresa de la siguiente manera: $\lim_{x \to \infty} f(x) = l$.

Continuidad de una función

Sabemos que, conocida la gráfica de una función, podremos afirmar que es continua o no si podemos dibujarla sin levantar el lápiz del papel.

Podemos afirmar que una función no es continua en un punto por tres motivos: que **no esté definida la función en dicho punto**, que **no exista el límite de $f(x)$ cuando x tiende al punto**, o que aún existiendo el límite y la función en el punto, **ambos valores no coincidan.** Es decir:

- Una función f se dice **continua** en un punto a, si $f(x)$ se aproxima a $f(a)$ cuando x se acerca a a.
- En caso contrario, la función se dirá **discontinua** en dicho punto.
- Una función que es continua en **todos los puntos que está definida**, se dirá **continua**.

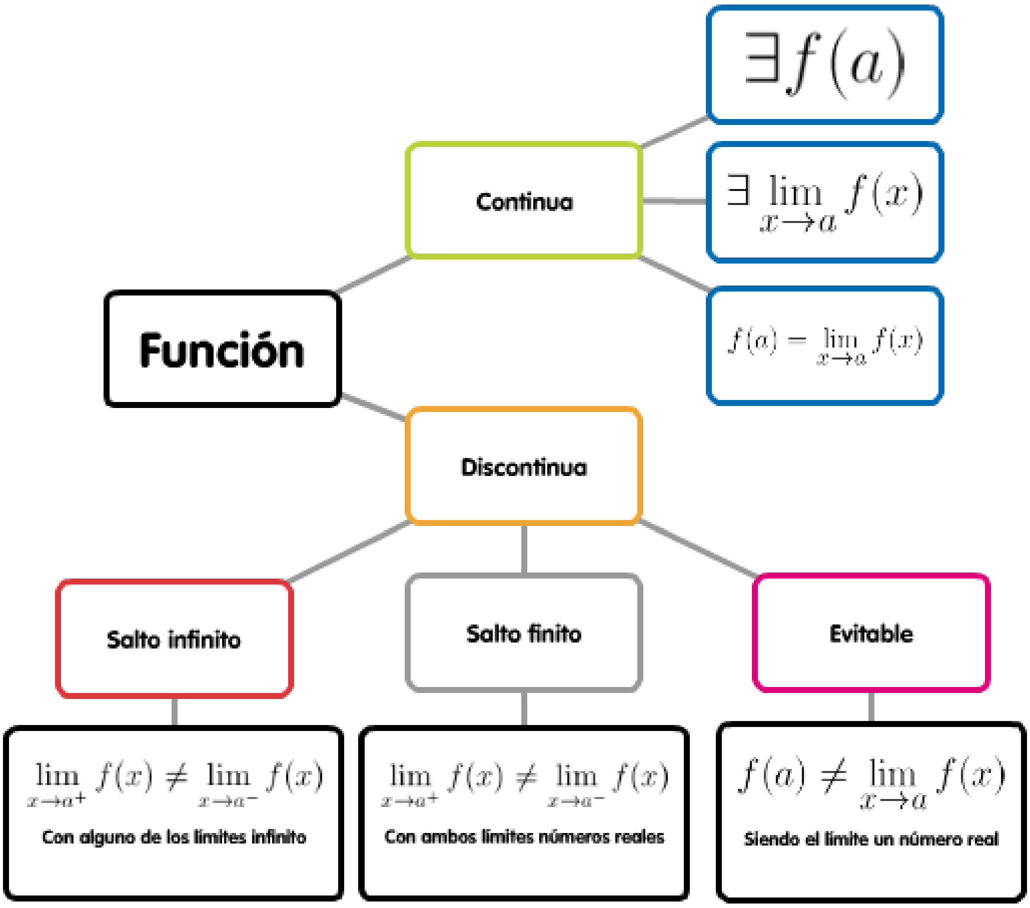


Imagen de elaboración propia. Haz clic para ampliar

Asíntotas de una función

- Una función $f(x)$ tiene una **asíntota vertical** en el punto a, de ecuación $x = a$ si alguno de los límites laterales en ese punto es **más o menos infinito**.

  En ese caso, la gráfica de la función se aproxima a la asíntota condicionada por el **signo** que tenga el infinito.

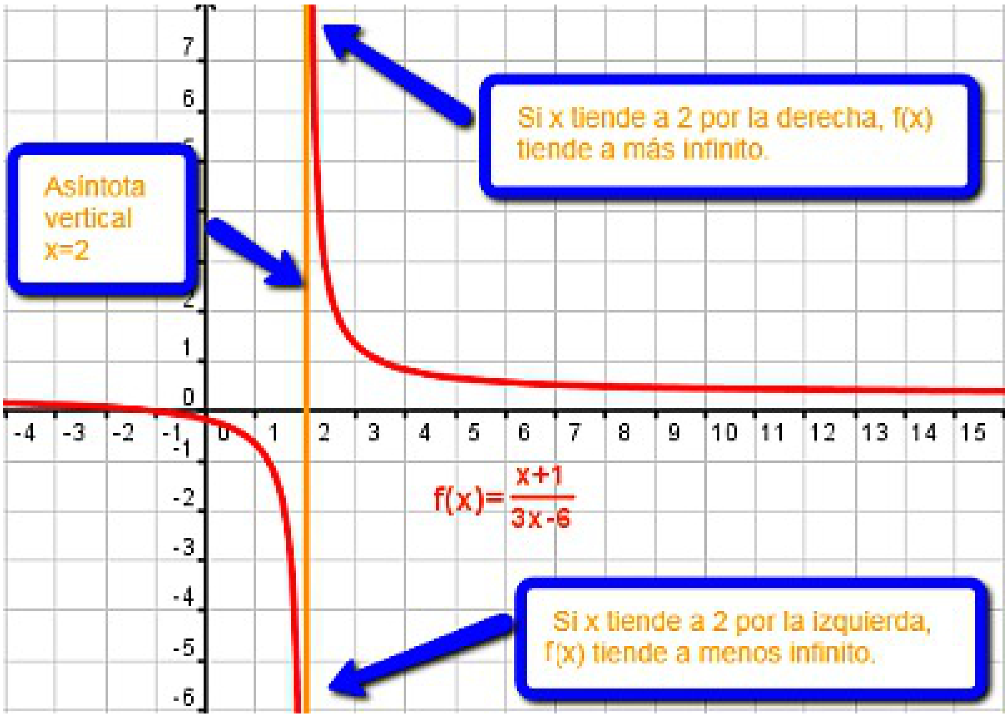


Imagen de elaboración propia

- Si x tiende a infinito solo para valores positivos, diremos x tiende a **más infinito**. Y se escribe $\lim_{x\to+\infty} f(x)=l$. Cuando esto ocurre, la función tiene una **asíntota horizontal** en la recta $y=l$, para los valores positivos de x .

En el caso de que x tienda a infinito solo para valores negativos, se dirá que x tiende a **menos infinito**. Se expresa $\lim_{x\to-\infty} f(x)=l$. Cuando esto ocurre, la función tiene una **asíntota horizontal** en la recta $y=l$, para valores negativos de x .

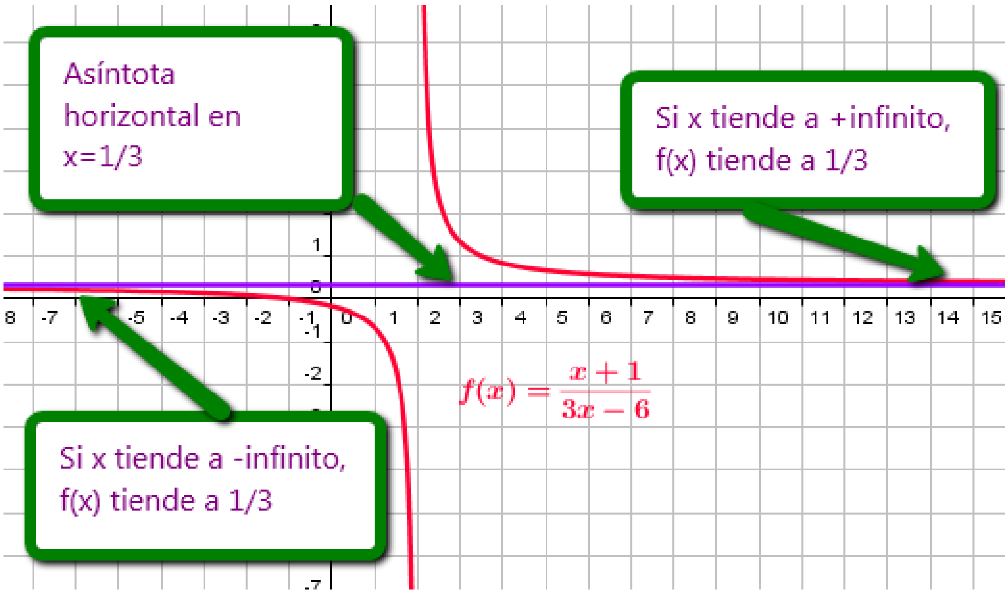


Imagen de elaboración propia

- Existen otro tipo de asíntotas, que suelen aparecer cuando la función es racional y el grado del numerador es mayor que el denominador. Se llaman asíntotas oblicuas.

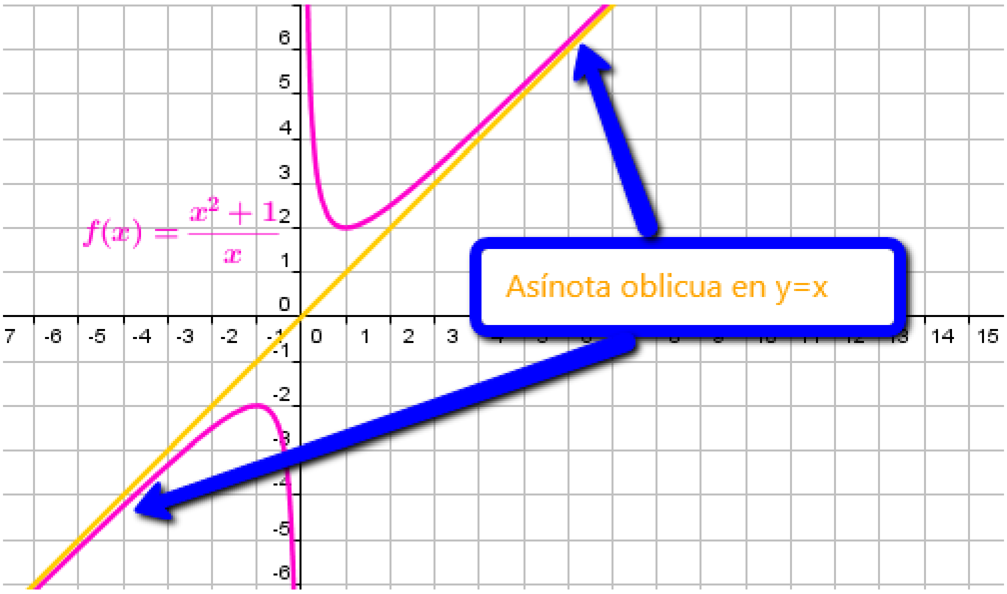


Imagen elaboración propia

Ejercicio resuelto

Universidades Públicas de Andalucía

Curso 2010/2011

Halla el valor de la constante a para que la función

$$f(x)=\begin{cases} ax^2-6 & \text{si} \quad x<3 \\ \frac{12}{x}-a & \text{si} \quad x\geq 3 \end{cases}$$

sea continua en todos los números reales.

Mostrar retroalimentación

Para que la función sea continua, debe serlo en todos sus puntos.

Antes de 3 lo es pues en ese intervalo la función está definida como una función cuadrática.

Después de 3 también lo es, ya que está definida como una función de proporcionalidad inversa que solo es discontinua en el punto en que se anula el denominador, que es 0, que no pertenece al intervalo.

Veamos en el punto 3. Esudiemos las tres condiciones que hemos citado anteriormente:

1. Existe $f(3)=\frac{12}{3}-a=4-a$
2. Existe $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$. Para ello deben existir los límites laterales y ser iguales:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3} ax^2-6=a\cdot 3^2-6=9a-6 \\ \lim f(x)=\lim \frac{12}{x}-a=\frac{12}{3}-a=4-a \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9a-6=4-a \Rightarrow 10a=10 \Rightarrow \boxed{a=1}$$

3. Para el valor $a=1$ se cumple $f(3)=\lim_{x\to 3} f(x)$

Ejercicio resuelto

Curso 2009/2010

Dada la función

$$f(x)=x-\frac{3}{x+2}$$

determina y representa sus asíntotas.

Mostrar retroalimentación

Asíntota vertical: el único punto de discontinuidad de la función es $x=-2$, el punto donde se anula el denominador. Se cumple que:

$$\lim_{x\to -2} f(x)=\infty$$

Por tanto, la función tendrá en $x=-2$ una asíntota vertical.

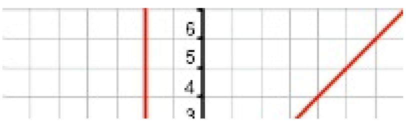
Asíntota horizontal u oblicua. Si calculamos el límite cuando x tiende a infinito, debemos fijarnos que x tiende a infinito y $\frac{3}{x+2}$ tiende a 0, por tanto el límite sería:

$$\lim_{x\to\infty} x-\frac{3}{x+2}=\infty-0=\infty$$

No hay asíntota horizontal, ya que para que la hubiera, el límite tendría que ser un número finito.

Pero como $\frac{3}{x+2}$ tiende a 0 cuando x tiende a infinito, podemos decir que $f(x)$ se parece a x en el infinito, lo que quiere decir que $y=x$ es una asíntota oblicua de la función.

Las gráficas de las asíntotas serían:



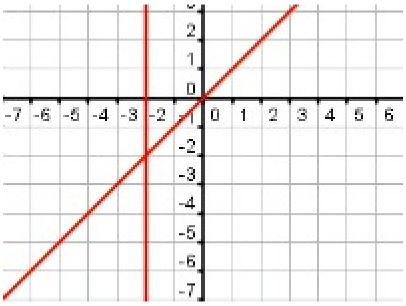


Imagen de elaboración propia

Importante

Pensando en la prueba...

El cálculo de derivadas y su aplicación a la representación de funciones, son actividades que suelen aparecer con mucha frecuencia. Si bien es cierto, que solo aparecen en problemas propios de la parte de análisis, a diferencia de lo que ocurriría, por ejemplo, con las ecuaciones y sistemas, que se pueden utilizar como herramientas para resolver otras actividades.

Universidades Públicas de Andalucía

Variación media y variación instantánea. Interpretación geométrica

Dada una función $y=f(x)$ se llama **variación media** de f en un intervalo $[a,b]$ al cociente:

$$T.V.M._f\,[a,b]=\frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Al ser la variación media un cociente de variaciones las unidades en que se expresa son también cociente de unidades.

Geométricamente, la tasa de variación media de la función f en el intervalo $[a,b]$ es la pendiente de la recta secante a la gráfica de f que pasa por los puntos $(a,f(a))$ y $(b,f(b))$.

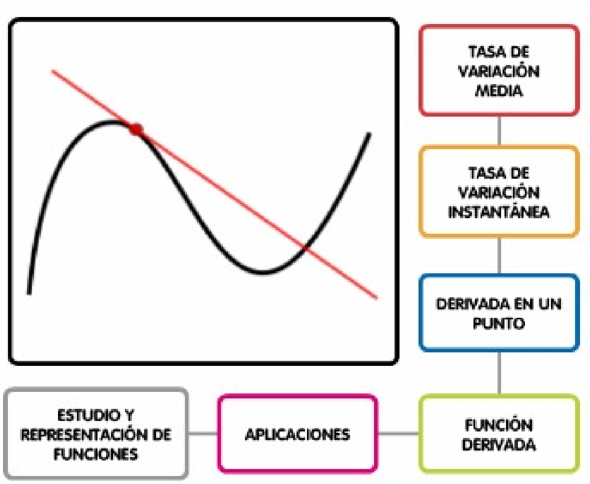


Imagen de elaboración propia

La tasa de **variación instantánea** de una función f en el punto a es:

$$T.V.I._f(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Derivada en un punto. Interpretación geométrica

Si tenemos una función $f(x)$ llamamos **derivada de la función en un punto** $x=a$ a la tasa de variación instantánea de la función f en el punto a y se denota por $f'(a)$. Así, según la definición tenemos que:

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Recuerda que para que exista este límite, deben existir los límites laterales y coincidir. Así, de la misma forma, podemos definir las **derivadas laterales** como:

- Derivada por la derecha:

$$f'(a^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

- Derivada por la izquierda:

$$f'(a^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

En el caso de que ambos límites coincidan diremos que la función f es **derivable** en el punto a.

Geométricamente, la derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en dicho punto, ya que las rectas secantes en el entorno de un punto tienden a confundirse con la recta tangente en el punto a medida que los incrementos se hacen más pequeños.

Función derivada. Reglas de derivación. Derivadas sucesivas

Dado que la derivada es un concepto local podría definirse la función derivada en aquellos puntos en que la función primera o primitiva es derivable.

Si tenemos una función $f(x)$ denominamos **función derivada de** f respecto a la variable x a una nueva función que para cada valor x nos proporciona la derivada de la función en el punto x. A la función derivada de $f(x)$ la denotaremos $f'(x)$, aunque también la puedes ver representada como $\frac{df(x)}{dx}$. De esta forma, tenemos que:

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Recuerda que con esta definición, la función derivada nos proporciona, para cada punto x, la pendiente de la recta tangente a la función en punto x.

Todos los resultados que aparecen en la siguiente tabla son fruto de aplicar la definición de derivada de una función. Te recomendamos que para no tener que recurrir una y otra vez a esta definición, te aprendas el siguiente cuadro. No te asustes, es más sencillo de lo que parece, el secreto está en la práctica.

Nombre	Expresión analítica	Derivada	Expresión abreviada
Constante	$f(x)=k$	$f'(x)=0$	$k'=0$
Identidad	$f(x)=x$	$f'(x)=1$	$x'=1$
Potencial	$f(x)=x^n$	$f'(x)=nx^{n-1}$	$(x^n)'=nx^{n-1}$
Raíz cuadrada	$f(x)=\sqrt{x}$	$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
Raíz	$f(x)=\sqrt[n]{x}$	$f'(x)=\dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$(\sqrt[n]{x})'=\dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
Exponencial	$f(x)=e^x$	$f'(x)=e^x$	$(e^x)'=e^x$
Exponencial de base a	$f(x)=a^x$	$f'(x)=\ln(a)\,a^x$	$(a^x)'=\ln(a)\,a^x$
Logarítmica	$f(x)=\ln(x)$	$f'(x)=\dfrac{1}{x}$	$\ln'(x)=\dfrac{1}{x}$
Logarítmica de base a	$f(x)=\log_a(x)$	$f'(x)=\dfrac{1}{\ln(a)\,x}$	$\ln'(x)=\dfrac{1}{\ln(a)\,x}$
Seno	$f(x)=sen(x)$	$f'(x)=cos(x)$	$sen'(x)=cos(x)$
Coseno	$f(x)=cos(x)$	$f'(x)=-sen(x)$	$\cos'(x)=-sen(x)$
Tangente	$f(x)=tg(x)$	$f'(x)=\dfrac{1}{1+tg^2(x)}$	$tg'(x)=\dfrac{1}{1+tg^2(x)}$

Imagen de elaboración propia

Además, tampoco es frecuente que nos pregunten por derivadas de funciones elementales, sino por la composición, suma, producto... de varias. Por ello, también debes tener en cuenta las siguientes reglas:

Suma	$(f+g)'=f'+g'$	La derivada de la suma de funciones es la suma de las derivadas de estas funciones
Resta	$(f-g)'=f'-g'$	La derivada de la diferencia de funciones es la diferencia de las derivadas de estas funciones
Producto	$(f\cdot g)'=f'\cdot g+g'\cdot f$	La derivada del producto de dos funciones es igual a la derivada de la primera por la segunda sin derivar más la segunda derivada por la primera sin derivar.
Cociente	$\left(\dfrac{f}{g}\right)'=\dfrac{f'\cdot g-g'\cdot f}{g^2}$	La derivada del cociente de dos funciones es igual a la derivada del numerador por el denominador sin derivar menos la derivada del denominador por el numerador sin derivar, y todo ello dividido por el denominador al cuadrado
Producto por un número	$(a\cdot f)'=a\cdot f'$	La derivada del producto de un número real por la función es igual al número real por la derivada de la función
Composición	$(g\circ f)'=[g(f(x))]'=g'(f(x))\cdot f'(x)$	Regla de la cadena

A la derivada de una función también se la denomina **derivada primera**. Si volvemos a derivar la derivada primera de una función, obtenemos la llamada **derivada segunda**; la derivada de la derivada segunda se denomina **derivada tercera**; y así sucesivamente. Estas son las llamadas **derivadas sucesivas** de una función:

$$f \xrightarrow{D} f' \xrightarrow{D} f'' \xrightarrow{D} f''' \xrightarrow{D} \ldots$$

Aplicación de la derivada a la representación de funciones

Conceptos relacionados con el estudio de f

- **Dominio**, los valores para los cuales está definida la función.

- **Simetría**. Existen dos tipos de simetría:

  - Una función es simétrica respecto al eje de ordenadas (OY), si para todo valor, x, de su dominio se cumple que: $f(-x) = f(x)$. En este caso decimos que la función es par.

  - Una función es simétrica respecto al origen de coordenadas, si para todo valor, x, de su dominio se cumple que: $f(-x) = -f(x)$. En este caso decimos que la función es impar.

- **Puntos de corte con los ejes**.

  - El punto de corte de la función con el eje vertical, eje de ordenadas o eje OY, es aquel en el que la variable se hace cero. Por lo tanto, basta anular la variable en la función para obtener la ordenada del punto de corte. Es decir, en la función $y = f(x)$ será un punto de la forma $(0, f(0))$

  - Por su parte, el corte de la gráfica de la función con el eje de abscisas, eje horizontal o eje OX, corresponderá a un valor de x que anule la función. Es decir, si se verifica que $f(a) = 0$, entonces el punto de corte con el eje horizontal será $(a, 0)$.

- **Asíntotas**. Dada una función $y = f(x)$ cuya gráfica es la curva C se dice que la recta r es una asíntota de $f(x)$ si la curva C se acerca a r indefinidamente sin llegar a coincidir con la propia r. Tenemos 3 tipos de asíntotas: verticales, horizontales y oblicuas.

Conceptos relacionados con el estudio de f'

- **Monotonía**. Es el comportamiento de una función respecto a su crecimiento o decrecimiento. Sea f una función derivable en un intervalo (a, b), entonces:

  - f es creciente en el intervalo (a, b) si $f'(x) > 0$ en todo el intervalo (a, b).

  - f es decreciente en el intervalo (a, b) si $f'(x) < 0$ en todo el intervalo (a, b).

- **Extremos**. Una función f , continua y derivable en un intervalo (a,b) , alcanza sus máximos y mínimos relativos en los puntos del intervalo (a,b) en los que $f'(x)=0$. Además, si estudiamos la segunda derivada,tendremos un

    - Máximo relativo si $f'(x)=0$ y $f''(x)<0$.
    - Mínimo relativo si $f'(x)=0$ y $f''(x)>0$.

Conceptos relacionados con el estudio de f''

- **Curvatura**. En una función dos veces derivable, podemos estudiar la curvatura de la siguiente forma:

    - Convexa(U) en los intervalos donde $f''(x)>0$.

    - Cóncava(∩) en los intervalos en los que $f''(x)<0$.

- **Puntos de inflexión** son los puntos donde cambia la curvatura. Por tanto se cumple que $f''(x)=0$. Para que efectivamente sean puntos de inflexión debe cumplirse en ellos, además, que $f'''(x)\neq 0$.

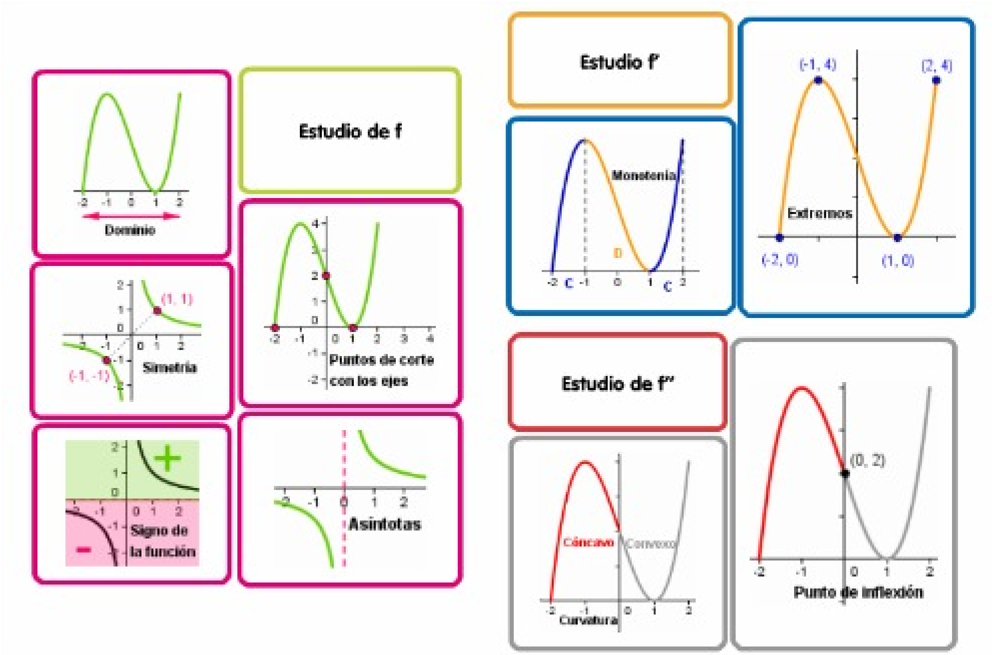


Imagen de elaboración propia. Haz clic para ampliar

Ejercicio resuelto

Curso 2009/2010

Dada la función $f(x)=x-\frac{3}{x+2}$ determine las regiones de crecimiento y decrecimiento de la función.

Mostrar retroalimentación

Para estudiar el crecimiento y decrecimiento de una función, es decir, la monotonía, vamos a dividir el trabajo en cuatro pasos:

Paso 1: Cálculo del dominio de una función

Al estudiar cualquier característica de una función, es IMPRESCINDIBLE conocer antes su dominio, ya que este puede condicionar dicho estudio.

En nuestro caso, estamos hablando de una función racional, por lo que los únicos puntos conflictivos son aquellos que anulan el denominador. Es decir, tenemos que preguntarnos para qué valores de la x , $x+2=0$. La respuesta es sencilla, para $x=-2$. Por lo que $Dom(f)=\mathbb{R}-\{-2\}$.

Paso 2: Cálculo de la derivada

Al ser la suma de dos funciones, la derivada será la suma de las derivadas.

$$f'(x)=1-\frac{0\cdot(x+2)-1\cdot 3}{(x+2)^2}=1-\frac{-3}{(x+2)^2}=1+\frac{3}{(x+2)^2}$$

Paso 3: Cálculo de los puntos críticos

Estudiamos en qué puntos de la función la derivada se anula, es decir, $f'(x)=0$

$$1+\frac{3}{(x+2)^2}=0\rightarrow\frac{3}{(x+2)^2}=-1\rightarrow 3=-(x+2)^2\rightarrow 3=-x^2-4-4x\rightarrow x^2+4x+7=0$$

Si resolvemos la ecuación utilizando la fórmula para las ecuaciones de segundo grado, descubrimos que obtenemos una raíz cuadrada cuyo radicando es negativo, por lo que la ecuación no tiene solución. Por lo que la función no presenta ni máximos ni mínimos. Lo que no significa que no pueda haber cambios en su monotonía, ya que tenemos un punto donde la función no está definida.

Paso 4: Determinación de los intervalos de monotonía

Al no tener extremos los intervalos de crecimiento y decrecimiento nos los condiciona el dominio: $(-\infty,-2)$ y $(-2,+\infty)$.

¿Qué ocurre en $(-\infty,-2)$?

Para saberlo, elijamos un punto del intervalo, por ejemplo $x=-3$ y sustituimos en la derivada.

$f'(-3)=4$, al ser la derivada positiva, la función en ese intervalo es creciente.

¿Qué ocurre en $(-2,+\infty)$?

Ahora tomamos un punto de este intervalo, por ejemplo $x=-1$ y sustituimos en la derivada.

$f'(-1)=4$, que como en el caso anterior la derivada es positiva, por lo que la función en este intervalo también es creciente.

En la siguiente representación de la función pues comprobar que los resultamos obtenidos son correctos:

solución

Ejercicio resuelto

Curso 2009/2010

Calcule la derivada de la función: $y=\sqrt{x-1}+\frac{1}{x^2+1}$

Mostrar retroalimentación

El primer paso para calcular esta derivada es recordar que la derivada de una suma es la suma de las derivadas. Por lo tanto, por un lado derivaremos la raíz y por otro el cociente.

$$y'=\left(\sqrt{x-1}\right)'+\left(\frac{1}{x^2+1}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}\cdot 1+\frac{0\cdot(x^2+1)-2x\cdot 1}{(x^2+1)^2}=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}\cdot 1+\frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

Ejercicio resuelto

Curso 2010/2011

Calcule las derivadas de las funciones: $f(x)=\frac{(2-x)^2}{3x}$ y $g(x)=(x^2-x)\cdot(x^3+2x)$.

Mostrar retroalimentación

(1) **Derivada de un cociente**

$$f(x)=\frac{(2-x)^2}{3x}\rightarrow f'(x)=\frac{2\cdot(2-x)\cdot(-1)\cdot 3x-3(2-x)^2}{(3x)^2}$$

Aunque con esto ya habríamos contestado al ejercicio, es recomendable (siempre que haya tiempo y tengamos certeza en lo que hacemos) simplificar. De esta forma, la derivada quedaría:

$$f'(x)=\frac{-12x+6x^2-3\cdot(4+x^2-4x)}{9x^2}=\frac{-12x+6x^2-12-3x^2+12x}{9x^2}=\frac{3x^2-12}{9x^2}=\frac{x^2-4}{3x^2}$$

(2) **Derivada de un producto**

$$g(x)=(x^2-x)\cdot(x^3+2x)\rightarrow g'(x)=(2x-1)\cdot(x^3+2x)+(x^2-x)\cdot(3x^2+2)$$

Al igual que en el apartado anterior podemos simplificar la derivada:

$$g'(x)=2x^4+4x^2-x^3-2x+3x^4+2x^2-3x^3-2x=5x^4-4x^3+6x^2-4x$$

Para resolver este producto de polinomios podríamos haber optado por multiplicar primero y luego derivar, pero el resultado es el mismo.

Ejercicio resuelto

Curso 2010/2011

(Continuación)

Estudie si la siguiente función es derivable en $x=3$:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-6 & \text{si } x<3 \end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} \ldots & \\ 12-x & \text{si} \quad x\geq 3\end{cases}$$

Mostrar retroalimentación

En el tema anterior vimos que en $x=3$ la función es continua, que es un requisito indispensable para que la función sea derivable.

Además de la continuidad, se tiene que cumplir que la función sea derivable en $x=3$, es decir que exista $f'(3)=\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}$. Por tanto deben existir los límites laterales y ser iguales:

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3^-}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}$$

Estudiemos cada límite por separado

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}\frac{\frac{12}{x}-1-3}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}\frac{12-4x}{x(x-3)}=\lim_{x\to 3^+}\frac{4(3-x)}{x(x-3)}=\lim_{x\to 3^+}\frac{-4}{x}=\frac{-4}{3}$$

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3^-}\frac{x^2-6-3}{x-3}=\lim_{x\to 3^-}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3^-}\frac{x+3}{1}=6$$

Como ambos límites no coinciden, la función no es derivable en $x=3$.

Si observas la gráfica de la función en el punto $x=3$, no existe una única recta tangente, síntoma de que efectivamente la función no es derivable en ese punto: