

ECUACIONES

Igualdad: expresión matemática unida por el signo igual (=). Una igualdad puede ser cierta o falsa.

Hay estos tipos:

- **Identidad numérica:** es una igualdad entre números que es cierta. P.ej. $7+2 = 3+5+1$
- **Identidad literal:** es una igualdad que es cierta (se verifica) para cualquier valor que demos a las letras.
- **Ecuación:** es una igualdad literal que se verifica para algunos valores determinados de las letras.

Soluciones de una ecuación:

Se llama **solución** o **raíz** de una ecuación a los valores que al sustituirlos en la ecuación la transforman en una identidad numérica.

Resolver una ecuación:

Es hallar el conjunto de todas sus soluciones.

Comprobar una ecuación:

Es sustituir las letras (llamadas incógnitas o variables) por las soluciones y ver si verifica (es cierta) la ecuación.

Ecuación algebraica: $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = 0$

Ecuaciones equivalentes: \Leftrightarrow

Dos ecuaciones son equivalentes, si coinciden los conjuntos de todas sus soluciones o ambas no tienen solución.

CRITERIOS DE EQUIVALENCIA

- Si a los dos miembros de una ecuación se les suma o resta un mismo número o expresión algebraica, resulta otra ecuación equivalente a la dada.
 - Transposición de términos
 - Simplificación de términos
- Si a los dos miembros de una ecuación se les multiplica por un mismo número no nulo o por una expresión algebraica que no admita ninguna raíz real, resulta otra ecuación equivalente a la dada.
- Si a los dos miembros de una ecuación se les divide por un mismo número no nulo o por una expresión algebraica cuyas raíces no pertenecen a la dada, resulta otra ecuación equivalente a la primera.

Debemos tener cuidado con los criterios II y III al multiplicar o dividir por una expresión algebraica pues podemos obtener más soluciones de las que la ecuación tiene o puede que la nueva ecuación no sea equivalente a la dada.

Las ecuaciones algebraicas se clasifican según distintos criterios:

- **Según el número de incógnitas:** Ecuaciones con una incógnita, con dos, con tres,... con n incógnitas.
- **Según el término de mayor grado:** Ecuaciones de primer grado (lineales), de segundo grado (cuadráticas), de tercer grado (cúbicas),... de grado n .
- **Según la forma de presentación de las variables:** Ecuaciones enteras, cuando no existe ninguna incógnita en el denominador; fraccionarias, con incógnitas en algún denominador; racionales, si las incógnitas no aparecen dentro de raíces cuadradas, cúbicas, etc., e irracionales, si las incógnitas se presentan dentro de alguna de estas raíces.

En general, una ecuación algebraica de orden n posee n raíces o soluciones, aunque algunas de ellas pueden estar repetidas e incluso tomar valores complejos. Las ecuaciones de quinto grado y de grado superior, en el caso general, no pueden ser resueltas por radicales, y normalmente se utilizan métodos numéricos para resolverlas.

Protocolo general de resolución ecuaciones:

- 1) Si hay paréntesis, se suprimen y se efectúan las operaciones indicadas.
- 2) Si hay denominadores, se suprimen multiplicando ambos miembros por el mínimo común múltiplo de los denominadores.
- 3) Se simplifican términos en ambos miembros siempre que sea posible.
- 4) Se pasan a un miembro los términos que contengan la incógnita y al otro todos los demás términos.
- 5) Se reducen los términos semejantes
- 6) Despejamos la incógnita
- 7) Comprobamos el resultado

ECUACIONES DE PRIMER GRADO

Una ecuación lineal (o de primer grado) con una incógnita es de la forma:

$$ax + b = 0 ; a \neq 0 ; a, b \in \mathbb{R}$$

O cualquier otra ecuación equivalente a ésta. Es decir, es un polinomio de primer grado igualado a cero.

La ecuación anterior tiene una sola raíz: $x = -\frac{b}{a}$

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Una ecuación cuadrática (o de segundo grado) con una incógnita es de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0 ; a \neq 0 ; a, b, c \in \mathbb{R}$$

O cualquier otra ecuación equivalente a ésta. Es decir, es un polinomio de primer grado igualado a cero.

Llamamos **discriminante** a $D = b^2 - 4ac$, discusión:

- Si $D > 0$, la ecuación tiene dos soluciones reales

resolución: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

- Si $D = 0$, la ecuación tiene dos soluciones coincidentes, esto es, la solución es doble o de multiplicidad 2

resolución: $x = \frac{-b}{2a}$

- Si $D < 0$, la ecuación no tiene soluciones reales.

La ecuación es incompleta cuando algún coeficiente es nulo y no es necesario utilizar la fórmula general.

$$ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x(ax + b) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ ax + b \Rightarrow x_2 = -b/a \end{cases}$$

$$ax^2 + c = 0 \Rightarrow ax^2 = -c \Rightarrow x = \pm \sqrt{-c/a}$$

Suma "s" y producto "p" de las dos soluciones o raíces:

$$s = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} ; p = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Forma canónica de la ecuación de 2º grado: $x^2 - sx + p = 0$

Signo de las raíces, suponiendo que "a" es positivo:

- Si "c" es positivo, las dos raíces tienen el mismo signo
- Si "c" es negativo, las dos raíces tienen signo contrario

Descomposición del trinomio de segundo grado:

- Si $D > 0$ entonces $ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$
- Si $D = 0$ entonces $ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1)^2$

Forma abreviada de la ecuación de 2º grado

Cuando "a" es uno y "b" es par, tomando k la mitad de b

podemos utilizar la expresión: $x = -k \pm \sqrt{k^2 - c}$