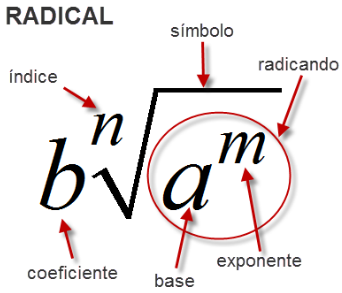
Radicales

La raíz n-ésima de un número real *a* es otro número *b* (si existe) que elevado a la potencia n-ésima da como resultado *a*.



$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

Raíces n-ésimas reales	n par	n impar
$a>0$	$\sqrt[n]{a}\ ;\ -\sqrt[n]{a}$	$\sqrt[n]{a}$
$a<0$	no hay	$-\sqrt[n]{a}$

Definición de raíz n-ésima $\sqrt[n]{a}$

Sea n un entero positivo mayor que 1 y a un número real.

1) Si $a=0$, entonces $\sqrt[n]{a}=0$
2) Si $a>0$, entonces $\sqrt[n]{a}=b$, es el número real positivo b tal que $b^n=a$
3) $\begin{cases} \text{Si } a<0 \text{ y } n \text{ es impar, entonces } \sqrt[n]{a} \text{ es el número real negativo } b \text{ tal que } b^n=a \\ \text{Si } a<0 \text{ y } n \text{ es par, entonces } \sqrt[n]{a} \text{ no es un número real.} \end{cases}$

Se necesitan números complejos para definir $\sqrt[n]{a}$ si $a<0$ y n es entero positivo par.

Si $n=2$, se escribe $\sqrt{a}$ en lugar de $\sqrt[2]{a}$ y se denomina raíz cuadrada.

Propiedades de los radicales:

1) $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$
2) $\sqrt[n]{a\cdot b} = \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$
3) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\ ;\ b\neq 0$
4) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$
5) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n\cdot m]{a}$

$$\begin{cases} \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a\ ,\ \text{si } \sqrt[n]{a} \text{ es un número real} \\ \sqrt[n]{a^n} = a\ ,\ \text{si } n \text{ es impar} \\ \sqrt[n]{a^n} = |a|\ ,\ \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n\cdot p]{a^{m\cdot p}}\ ,\quad \text{teorema fundamental}$$

Radicales homogéneos: aquellos que tienen igual índice.
Radicales semejantes: aquellos que tienen igual índice e igual radicando. Pueden diferir sólo en el coeficiente que los multiplica.

RACIONALIZAR: es convertir una fracción en cuyo denominador aparecen expresiones con radicales en otras equivalentes cuyo denominador sea racional.

$$1^{\text{o}}\ caso: \frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a}{\sqrt{b}}\cdot\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$$

$$2^{\text{o}}\ caso: \frac{a}{\sqrt[n]{b^m}} = \frac{a}{\sqrt[n]{b^m}}\cdot\frac{\sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^{n-m}}} = \frac{a\sqrt[n]{b^{n-m}}}{b}$$

$$3^{\text{o}}\ caso: \frac{a}{\sqrt{b}\pm\sqrt{c}} = \frac{a}{\sqrt{b}\pm\sqrt{c}}\cdot\frac{\sqrt{b}\mp\sqrt{c}}{\sqrt{b}\mp\sqrt{c}} = \frac{a\left(\sqrt{b}\mp\sqrt{c}\right)}{b-c}$$

$$\text{Ejemplos}: \begin{cases} \dfrac{2\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{6}}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{12}}{2} = \dfrac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \\ \dfrac{14}{3\sqrt[5]{49}} = \dfrac{14}{3\sqrt[5]{7^2}}\cdot\dfrac{\sqrt[5]{7^3}}{\sqrt[5]{7^3}} = \dfrac{14\sqrt[5]{7^3}}{21} = \dfrac{2\sqrt[5]{343}}{3} \\ \dfrac{\sqrt{5}-2}{3-2\sqrt{5}} = \dfrac{\left(\sqrt{5}-2\right)}{\left(3-2\sqrt{5}\right)}\cdot\dfrac{\left(3+2\sqrt{5}\right)}{\left(3+2\sqrt{5}\right)} = \dfrac{4-\sqrt{5}}{-11} = \dfrac{\sqrt{5}-4}{11} \end{cases}$$

Descomponer radicales dobles, con sumas y restas, en simples:

Algunos radicales de la forma $\sqrt{a\pm\sqrt{b}}$ pueden descomponerse así:

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+z}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-z}{2}}\ ;\ \text{donde } z=\sqrt{a^2-b}\ ;\ \begin{cases} \text{observar que } \sqrt{a\pm 2\sqrt{b}} = \sqrt{x}\pm\sqrt{y} \\ \text{siendo } a=x+y\ ;\ b=xy \end{cases}$$

$$\text{Ejemplo}: \sqrt{4+\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{4+3}{2}}+\sqrt{\frac{4-3}{2}} = \sqrt{\frac{7}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{14}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\quad \text{donde } z=\sqrt{4^2-7}=3$$

$$\text{Ejemplo}: \sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}} = \left(2+\sqrt{3}\right)+\left(2-\sqrt{3}\right) = 4\quad \text{donde } z=\sqrt{7^2-48}=1$$

Radicales cuadráticos (índice par)
- Los números reales positivos tienen dos raíces cuadradas
- El número 0 tiene una raíz cuadrada igual a 0
- Los números reales negativos no tienen raíz cuadrada

$$\sqrt{16}=\pm 4\ ,\ ya\ que \begin{cases} (+4)^2=16 \\ (-4)^2=16 \end{cases}$$

$$\sqrt{0}=0 \rightarrow 0^2=0$$

$$\sqrt{-4}=?\ \rightarrow\ No\ tiene\ raíz,$$

ya que todo número al cuadrado es positivo

Radicales cúbicos (índice impar)
- Los números reales positivos tienen una única raíz cúbica positiva
- El número 0 tiene una raíz cúbica igual a 0
- Los números reales negativos tienen una única raíz cúbica negativa

$$\sqrt[3]{8}=+2\ ,\ ya\ que\ 2^3=8$$

$$\sqrt[3]{0}=0 \rightarrow 0^3=0$$

$$\sqrt[3]{-8}=-2\ ,\ ya\ que\ (-2)^3=-8$$

SIMPLIFICAR RADICALES: dividimos índice y exponente por un mismo número, hasta conseguir un radical irreducible (es decir, cuando índice y exponente son primos entre sí). El valor de una raíz no varía si se multiplican o se dividen por un mismo número el exponente del radicando y el índice de la raíz.

$$\text{Ejemplos}: \sqrt[4]{9a^2}=\sqrt{3a}\ ;\ \sqrt[6]{49}=\sqrt[6]{7^2}=\sqrt[3]{7}\ ;\ \sqrt[6]{8(x+1)^3}=\sqrt{2x+2}$$

REDUCIR RADICALES A ÍNDICE COMÚN: es hallar otras expresiones radicales equivalentes que tengan el mismo índice (radicales homogéneos), esto se consigue de la siguiente manera:
- Se halla el m.c.m. de todos los índices (este será el nuevo índice)
- Cada radicando se eleva al cociente del m.c.m. entre cada índice antiguo.

$$\text{Ejemplo}: \sqrt[3]{2a^2}\ ;\ \sqrt[6]{3a^5}\ ;\ \sqrt{7a}\ ;\ \sqrt[4]{10a^3}$$

$$[m.c.m.=12] \Rightarrow \sqrt[12]{2^4a^8}\ ;\ \sqrt[12]{3^2a^{10}}\ ;\ \sqrt[12]{7^6a^6}\ ;\ \sqrt[12]{10^3a^9}$$

SACAR FACTORES FUERA DE UNA RAÍZ: es posible cuando el radicando es una potencia de exponente mayor que el índice de la raíz. Para realizar esto, dividimos el exponente del radicando entre el índice de la raíz, escribiendo como exponente del factor que sale el cociente de la división, y como exponente del radicando el resto de la división.

$$\text{Ejemplo}: \sqrt[4]{a^{11}} = \left[\begin{array}{r|l} 11 & 4 \\ 3 & 2 \end{array}\right] = a^2\cdot\sqrt[4]{a^3}$$

PASAR FACTORES DENTRO DE UNA RAÍZ: se realiza multiplicando el exponente del factor por el índice de la raíz y se escribe dentro del signo radical como producto.

$$a^m\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{b\cdot a^{m\cdot n}}$$

$$\text{Ejemplo}: 2x^2\cdot\sqrt[4]{x^3} = \sqrt[4]{2^4x^8x^3} = \sqrt[4]{16x^{11}}\quad ;\quad \frac{2(a+1)}{a}\sqrt{\frac{a}{a+1}} = \sqrt{\frac{4a+4}{a}}$$

MULTIPLICAR O DIVIDIR RADICALES: es necesario que tengan el mismo índice (radicales homogéneos), por tanto hay que reducirlos a índice común si no lo tienen. Se multiplican o dividen los radicandos y se deja el mismo índice.

$$\text{Ejemplo}: 4\sqrt{3}\cdot 12\sqrt{10} : 3\sqrt{5} = 16\sqrt{6}$$

$$\text{Ejemplo}: \sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[4]{4} = \sqrt[12]{2^6}\cdot\sqrt[12]{3^4}\cdot\sqrt[12]{4^3} = \sqrt[12]{2^{12}\cdot 3^4} = 2\sqrt[3]{3}$$

SUMAR O RESTAR RADICALES: es necesario que tengan el mismo índice y el mismo radicando (radicales semejantes). Es decir, sólo podemos sumar radicales idénticos. Dos radicales distintos no pueden sumarse salvo obteniendo sus expresiones decimales aproximadas. Si no tienen el mismo índice, debemos reducirlos a índice común. Si no tienen el mismo radicando aplicamos pasar/sacar factores o simplificar, hasta conseguirlo.

$$\text{Ejemplo}: 7\sqrt{3}+5\sqrt{3}-10\sqrt{3} = (7+5-10)\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

$$\text{Ejemplo}: \sqrt{\frac{1}{3}}+\sqrt{27} = \frac{1}{3}\sqrt{3}+3\sqrt{3} = \left(\frac{1}{3}+3\right)\sqrt{3} = \frac{10}{3}\sqrt{3}$$