

Ecuaciones EXPONENCIALES

Una ecuación exponencial es aquella en la que la variable aparece en el exponente.

Por ejemplo: $2^x = 7$; $5^x = 125$; $\sqrt[3]{9^{4x}} = 1$; $2^{x+1} - 2^{3x} + 1 = 0$

La función exponencial f dada por $f(x) = a^x$ donde $0 < a < 1$ ó $a > 1$ es biyectiva, por tanto, se satisfacen las condiciones equivalentes siguientes para el par de números reales x_1 y x_2

1) si $x_1 \neq x_2$, entonces $a^{x_1} \neq a^{x_2}$

2) si $a^{x_1} = a^{x_2}$, entonces $x_1 = x_2$

Luego la resolución de ecuaciones exponenciales se basa en la siguiente propiedad:

Dos potencias con una misma base positiva y distinta de la unidad son iguales si, y sólo si, son iguales sus exponentes.

p.ej. Si $2^a = 2^b$ entonces $a = b$

Aprovechando esta propiedad, la ecuación $a^x = b$ donde $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$ debe resolverse así: $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$

OBSERVACIONES

- Una igualdad de dos potencias con distinta base positiva sólo se verifica para un exponente igual a cero.

Si $a^y = b^y$ entonces $y = 0$

- Una potencia de base positiva nunca toma un valor negativo

En general, para resolver una ecuación exponencial es habitual tomar logaritmos:

- Aislamos la expresión exponencial en un lado de la ecuación
- Tomamos el logaritmo de cada lado y usamos las propiedades de los logaritmos para "bajar x" del exponente
- Despejamos la variable

Por tanto, algunos tipos de ecuaciones exponenciales elementales se pueden resolver si utilizamos una de estas estrategias:

- ✓ **Reducir ambos miembros de la ecuación a una misma base:** escribimos los dos miembros de la ecuación como potencias de la misma base y se igualan los exponentes.
- ✓ **Utilizar un cambio de variable:** realizamos un cambio de variable para reducir la ecuación a otra algebraica.
- ✓ **Tomar logaritmos:** aplicamos logaritmos después de dejar un término en cada lado de la igualdad, despejamos la incógnita y utilizamos la calculadora para hallar el valor de x.
- ✓ **Sacar factor común una potencia:** realizamos cambios convenientes hasta conseguir potencias comunes.
- ✓ Aplicar suma de términos de progresión geométrica.
- ✓ Ver si las bases son números positivos inversos entre sí.

- Reduciendo ambos miembros a una misma base**

$$\begin{array}{l} 2^{x+5} = 8^{x-1} \\ 2^{x+5} = 2^{3(x-1)} \\ 2^{x+5} = 2^{3x-3} \\ x+5 = 3x-3 \\ -2x = -8 \\ \therefore x = 4 \end{array} \quad \begin{array}{l} 0.1^{x+4} = \sqrt[5]{1000} \\ \left(\frac{1}{10}\right)^{x+4} = 10^{\frac{3}{5}} \\ 10^{-x-4} = 10^{\frac{3}{5}} \\ -x-4 = \frac{3}{5} \\ \therefore x = -\frac{23}{5} \end{array} \quad \begin{array}{l} \frac{4^{x-1}}{2^{x+2}} = 128 \\ 2^{2(x-1)} = 2^7 \cdot 2^{x+2} \\ 2^{2x-2} = 2^{x+9} \\ 2x-2 = x+9 \\ \therefore x = 11 \end{array}$$

- Sacando una potencia como factor común**

$$\begin{array}{l} 5^{2x+1} - 3 \cdot 5^{2x-1} = 550 \\ 5 \cdot 5^{2x} - \frac{3}{5} \cdot 5^{2x} = 550 \\ 5^{2x} \left(5 - \frac{3}{5}\right) = 550 \\ 5^{2x} = 550 \cdot \frac{5}{22} \\ 5^{2x} = 5^3 \Leftrightarrow 2x = 3 \\ \therefore x = \frac{3}{2} \end{array} \quad \begin{array}{l} 3^{x+1} + 3^x + 3^{x-1} = 117 \\ 3 \cdot 3^x + 3^x + \frac{1}{3} \cdot 3^x = 117 \\ 3^x \left(3 + 1 + \frac{1}{3}\right) = 117 \\ 3^x = 117 \cdot \frac{3}{13} \\ 3^x = 3^3 \\ \therefore x = 3 \end{array} \quad \begin{array}{l} 4^x + 4^{x-1} + 4^{x-2} = 336 \\ 4^x \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16}\right) = 336 \\ 4^x = 336 \cdot \frac{16}{21} \\ 4^x = 4^4 \\ \therefore x = 4 \end{array}$$

- Utilizando un cambio de variable**

$$\begin{array}{l} 9^x - 7 \cdot 3^x - 18 = 0 \\ 3^{2x} - 7 \cdot 3^x - 18 = 0 \\ 3^x = t > 0 \\ t^2 - 7t - 18 = 0 \\ t = \frac{7 \pm 11}{2} = \begin{cases} t_1 = 9 \\ t_2 = -2 \end{cases} \\ 3^x = 9 \Rightarrow \therefore x = 2 \\ 3^x = -2 \Rightarrow \therefore \text{NO} \end{array} \quad \begin{array}{l} 4^x - 2^x = 2 \\ 2^{2x} - 2^x = 2 \\ 2^x = t > 0 \\ t^2 - t - 2 = 0 \\ t = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} t_1 = 2 \\ t_2 = -1 \end{cases} \\ 2^x = 2 \Rightarrow \therefore x = 1 \\ 2^x = -1 \Rightarrow \therefore \text{NO} \end{array} \quad \begin{array}{l} 2^{2x+1} - 3 \cdot 2^x + 1 = 0 \\ 2 \cdot (2^x)^2 - 3 \cdot 2^x + 1 = 0 \\ 2^x = t > 0 \\ 2t^2 - 3t + 1 = 0 \\ t = \frac{3 \pm 1}{4} = \begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = 1/2 \end{cases} \\ 2^x = 1 \Rightarrow \therefore x = 0 \\ 2^x = \frac{1}{2} \Rightarrow \therefore x = -1 \end{array}$$

- Tomando logaritmos**

Ecuaciones de la forma: $a^{f(x)} = b \Leftrightarrow f(x) = \log_a b$

Donde $a > 0$, $a \neq 1$ y $b > 0$, puede resolverse por logaritmación de ambos miembros. Esto es posible puesto que ambos miembros de la ecuación son positivos.

$$\begin{array}{l} 5^{2x-1} = 7^{3-x} \\ \log 5^{2x-1} = \log 7^{3-x} \\ (2x-1) \log 5 = (3-x) \log 7 \\ 2x \log 5 - \log 5 = 3 \log 7 - x \log 7 \\ x(2 \log 5 + \log 7) = 3 \log 7 + \log 5 \\ x = \frac{3 \log 7 + \log 5}{2 \log 5 + \log 7} = \frac{\log 1715}{\log 175} \\ \therefore x \approx 1.4419 \end{array} \quad \begin{array}{l} 3^{x-1} = 2^x \\ \log 3^{x-1} = \log 2^x \\ (x-1) \log 3 = x \log 2 \\ x \log 3 - x \log 2 = \log 3 \\ x(\log 3 - \log 2) = \log 3 \\ x = \frac{\log 3}{\log 3 - \log 2} = \frac{\log 3}{\log(3/2)} \\ \therefore x \approx 2.7095 \end{array}$$

- Aplicando suma de términos de progresión geométrica**

$$\begin{array}{l} \therefore a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \rightarrow S = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1} \\ 1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^x = 1023 \\ \frac{2^x \cdot 2 - 1}{2 - 1} = 1023 \\ 2 \cdot 2^x = 1024 \\ 2^x = 512 \\ 2^x = 2^9 \\ \therefore x = 9 \end{array} \quad \begin{array}{l} 1 + 6 + 36 + 216 + \dots + 6^x = 9331 \\ \frac{6^x \cdot 6 - 1}{6 - 1} = 9331 \\ 6 \cdot 6^x - 1 = 46655 \\ 6^x = 7776 \\ 6^x = 7^5 \\ \therefore x = 5 \end{array}$$