Asíntotas

Al representar gráficamente funciones podemos encontrarnos con ramas infinitas, es decir, tramos de curva que se alejan indefinidamente hacia el infinito, positivo o negativo.

Cuando una rama infinita se aproxima a una recta (sin tocarla) a ésta se la denomina **asíntota** de la curva; y a la rama correspondiente se la conoce como **rama asintótica**.

DEFINICIÓN

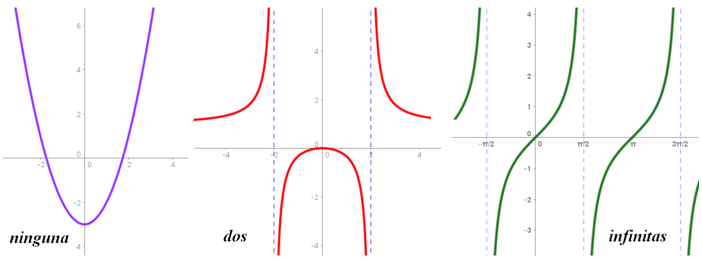
Dada una función $y = f(x)$ cuya gráfica es la curva C, decimos que la recta r es una **asíntota** de $f(x)$ si la curva se acerca indefinidamente a dicha recta sin llegar a coincidir con ella.

Tipo de asíntota	Expresión	Cálculo
Vertical	$x = c$	$\lim\limits_{x\to c} f(x) = \pm\infty$
Horizontal	$y = k$	$\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x) = k$
Oblicua	$y = mx + n$	$\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x) = \pm\infty \Rightarrow$ $\underbrace{\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}}_{m}$; $\underbrace{\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx)}_{n}$

Rama parabólica	$\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ y no hay oblicuas ($m = \infty$ ó $m = 0$ y $n = \infty$)

Asíntotas verticales

Las asíntotas verticales de una función **son rectas verticales** de la forma $x = c$. Hay funciones que no tienen asíntotas verticales, otras tienen sólo una, funciones que tienen dos e incluso funciones que tienen infinitas asíntotas verticales.



DEFINICIÓN

Si $f(x)$ tiende a infinito (o menos infinito) cuando x tiende a c por la derecha o por la izquierda, se dice que la recta $x = c$ es una **asíntota vertical** de la gráfica de f.

Cálculo:

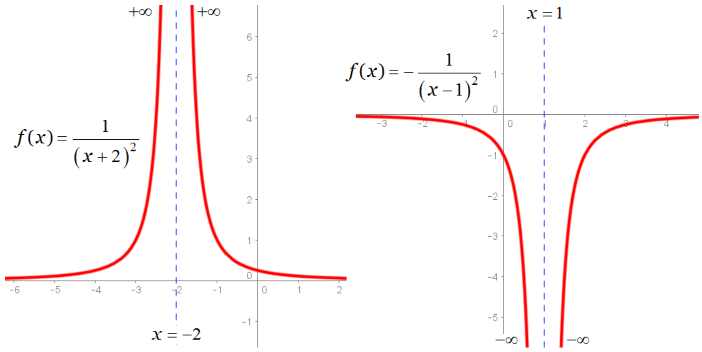
La recta $x = c$ es una asíntota vertical de la curva $f(x)$ si se cumple, al menos, una de estas afirmaciones:

- $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \pm\infty$ El límite de una función en un punto c es $\pm\infty$
- $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = \pm\infty$ El límite por la izquierda ($x < c$) de c es $\pm\infty$
- $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = \pm\infty$ El límite por la derecha ($x > c$) de c es $\pm\infty$

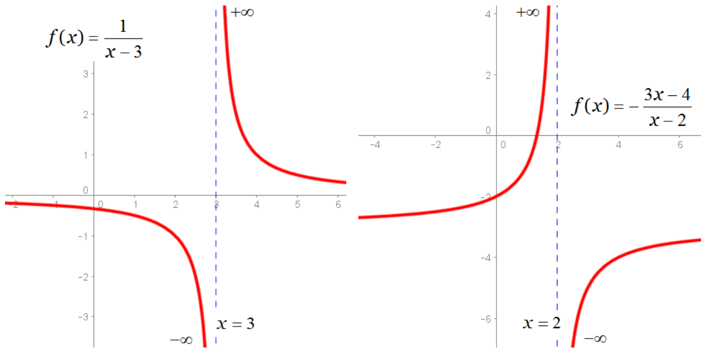
CASOS QUE PODEMOS ENCONTRARNOS, funciones que:

- No tienen asíntotas verticales: $f(x) = x^2 + 1$
- Tienen una asíntota vertical por los dos lados: $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$
- Tienen una asíntota vertical sólo por un lado: $f(x) = \log_2 x$
- Tienen infinitas asíntotas verticales: $f(x) = \operatorname{cotg} x$

Si los dos límites laterales valen $+\infty$, o los dos $-\infty$, decimos que la asíntota $x = c$ es de ramas convergentes.



Si uno de los límites laterales valen $+\infty$, y el otro $-\infty$, decimos que la asíntota $x = c$ es de ramas divergentes.



OBSERVACIONES:

En el cálculo de asíntotas verticales nosotros tenemos que aportar los valores de c para los cuales calcular los límites.

Los valores candidatos a existencia de asíntota vertical son:

- Valores que anulan algún denominador de la función
- Extremos de intervalos del dominio que no pertenezcan al propio dominio.

En consecuencia, lo primero que debemos hacer cuando tengamos que calcular las asíntotas de una función es calcular su dominio e igualar a cero todos los denominadores que aparezcan en la misma para recopilar todos los candidatos.

Regla práctica:

La posición de la curva respecto de la asíntota se puede hallar con calculadora dándole a x valores muy próximos a c tanto por la izquierda como por la derecha y observando el signo del valor de la función.

Ejemplo 1

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 2x - 15} \quad ; \quad Dom\, f = \mathbb{R} - \{-5, 3\}$$

Calculamos límites laterales en $x \to -5$ y $x \to 3$

$$\lim_{x\to -5^-} \frac{x^3}{x^2+2x-15} = -\infty \ ; \ \lim_{x\to -5^+} \frac{x^3}{x^2+2x-15} = +\infty \ \to \ \text{AV: } x = -5$$

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{x^3}{x^2+2x-15} = -\infty \ ; \ \lim_{x\to 3^+} \frac{x^3}{x^2+2x-15} = +\infty \ \to \ \text{AV: } x = 3$$

Asíntotas horizontales

Las asíntotas horizontales de una función **son rectas horizontales** de la forma $y=k$. Una función puede tener, a lo sumo, dos asíntotas horizontales: una por la izquierda (cuando $x\to-\infty$) y otra por la derecha (cuando $x\to+\infty$).

<u>Cálculo</u>:

— Si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=a$, entonces $y=a$ es una asíntota horizontal de $f(x)$ (por la izquierda)

— Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$, entonces $y=b$ es una asíntota horizontal de $f(x)$ (por la derecha)

ASÍNTOTAS HORIZONTALES EN FUNCIONES RACIONALES

Las funciones racionales, cociente de dos polinomios $P(x)/Q(x)$, tienen asíntota horizontal siempre que el grado del numerador sea menor o igual que el grado del denominador:

1. Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=0 \Rightarrow y=0$ es asíntota horizontal, $gr(P)<gr(Q)$
2. Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=k \Rightarrow y=k$ es asíntota horizontal, $gr(P)=gr(Q)$

<u>Observación</u>:

La posición de la curva respecto de la asíntota se puede hallar con calculadora dándole a x un valor grande y observando si la diferencia es positiva o negativa.

Ejemplo 2

$$f(x)=\frac{1}{x^2+1} \rightarrow \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^2+1}=0 \rightarrow \text{AH: } y=0$$

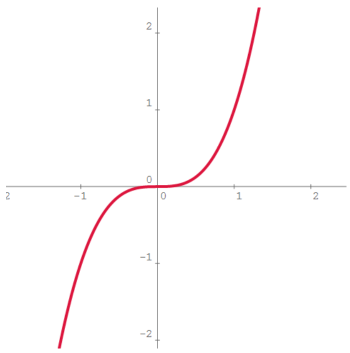
Ejemplo 3

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-2x} \rightarrow \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+1}{x^2-2x}=1 \rightarrow \text{AH: } y=1$$

<u>CASOS QUE PODEMOS ENCONTRARNOS</u>:

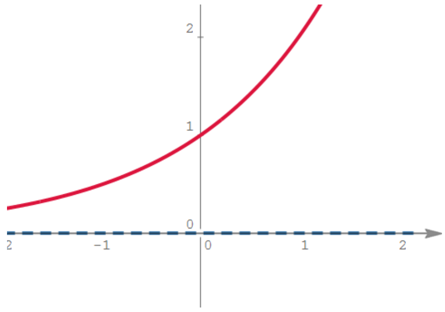
- Funciones que no tienen asíntotas horizontales

  P.ej. $f(x)=x^3$, cumple que los dos límites citados anteriormente dan como resultado $-\infty$ y $+\infty$ respectivamente.



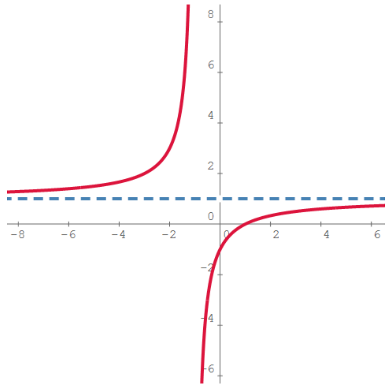
- Funciones que tienen una asíntota horizontal sólo por un lado

  P.ej. $f(x)=2^x$, en este caso el $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$, por lo que $y=0$ es una asíntota horizontal de $f(x)$ por la izquierda, y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, por lo que por la derecha no tenemos asíntota horizontal.



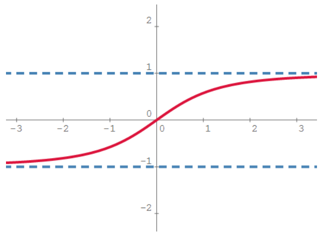
- Funciones que tienen una asíntota horizontal por los dos lados

  P.ej. $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$, en este caso $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ por lo que la recta $y=1$ es asíntota horizontal de $f(x)$ tanto por la izquierda como por la derecha.



- Funciones que tienen dos asíntotas horizontales distintas

  P.ej. $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}$, cumple que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$, por lo que $y=-1$ es asíntota horizontal de $f(x)$ por la izquierda y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$, por lo que $y=1$ es asíntota horizontal de $f(x)$ por la derecha.



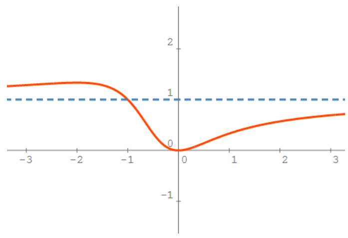
<u>OBSERVACIÓN:</u>

En algunos casos la función puede cruzar (cortar) a la asíntota horizontal, como en este ejemplo:

$$f(x)=\frac{x^2}{x^2+x+1}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^2+x+1}=1$$

$$AH\to y=1$$



Asíntotas Oblicuas

Las asíntotas oblicuas de una función **son rectas oblicuas** de la forma $y = mx + n$, con $m \neq 0$. Una función puede tener, como máximo, dos asíntotas oblicuas, una por la izquierda de su gráfica y otra por la derecha de la misma.

La recta $y = mx + n,\ m \neq 0$ es asíntota oblicua de la función $f(x)$

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[f(x) - (mx+n)\right] = 0$ ó $\lim\limits_{x\to-\infty} \left[f(x) - (mx+n)\right] = 0$

CÁLCULO práctico de la pendiente y la ordenada en el origen

$m = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, si el resultado no es 0 o no es $\pm\infty$, calculamos n

$n = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[f(x) - mx\right]$, si el resultado es un número real (no $\pm\infty$),

entonces $y = mx + n$ es una asíntota oblicua de $f(x)$ por la derecha

O bien lo mismo con el $-\infty$. Pero, como decimos, en cualquiera de los dos casos debe obtenerse $m, n \in \mathbb{R}, \mathrm{m} \neq 0$

ASÍNTOTAS OBLICUAS EN FUNCIONES RACIONALES

Las funciones racionales, cociente de dos polinomios $P(x)/Q(x)$, tienen asíntota oblicua siempre que *el grado del numerador sea una unidad mayor que el denominador*, es decir, $gr(P) - gr(Q) = 1$

Además, podemos evitar calcular límites si realizamos la división, el cociente de ésta será la asíntota oblicua.

$$\begin{array}{l|l} P(x) & Q(x) \\ \hline R(x) & mx+n \end{array} \quad \rightarrow \quad \boxed{y = mx + n} \text{ es la asíntota oblicua}$$

La posición de la curva respecto de la asíntota se averigua estudiando el signo del cociente $R(x)/Q(x)$ para valores grandes (o pequeños) de x

OBSERVACIONES:

- Una función no puede tener una asíntota horizontal y otra oblicua por el mismo lado.
- Una función puede tener, como máximo dos asíntotas entre horizontales y oblicuas.
- Si puede darse el caso de que haya una horizontal en un lado y una oblicua en otro.

Es decir, no puede haber simultáneamente asíntota horizontal y oblicua por la izquierda de la gráfica ($x \to -\infty$) o por la derecha ($x \to +\infty$).

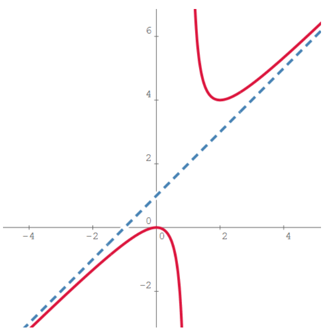
REGLA PRÁCTICA:

Comenzaremos calculando las asíntotas horizontales. Si tiene asíntota horizontal por ambos lados entonces no es necesario calcular las asíntotas oblicuas porque no tiene.

CASOS QUE PODEMOS ENCONTRARNOS:

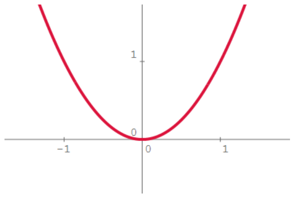
- Funciones que tienen una asíntota oblicua por los dos lados

  P.ej. $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$, con asíntota oblicua $y = x + 1$



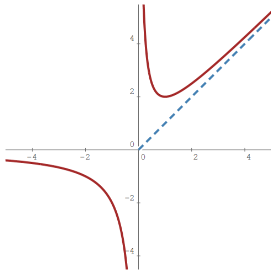
- Funciones que no tienen asíntotas oblicuas

  P.ej. $f(x) = x^2$, al calcular m tanto por la izquierda como por la derecha obtenemos $+\infty$ (tiene ramas parabólicas).



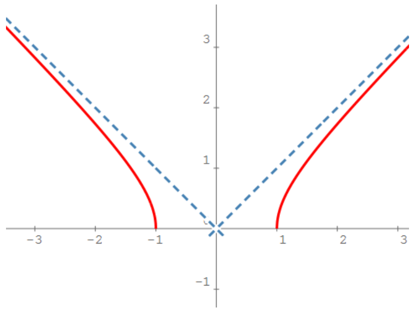
- Funciones que tienen una asíntota oblicua sólo por un lado

  P.ej. $f(x) = x^{\frac{|x|}{x}} + \dfrac{1}{x}$, caso muy poco habitual de encontrar.



- Funciones que tienen dos asíntotas oblicuas distintas

  P.ej. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$, siendo $y = x$ y $y = -x$ sus asíntotas oblicuas. Caso poco habitual de encontrar.



Ejemplo 4 (oblicuas del ejemplo 1)

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2+2x-15} \quad ; \quad m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \quad ; \quad n = \lim_{x\to\infty} \left[f(x) - mx\right]$$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x\left(x^2+2x-15\right)} = 1$$

$$n = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{x^3}{x^2+2x-15} - x\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{-2x^2+15}{x^2+2x-15} = -2 \quad \Rightarrow \quad \text{AO:} \quad y = x - 2$$

Ramas parabólicas

Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ y la curva no tiene asíntota oblicua,

entonces la curva presenta una rama parabólica.

TIPOS:

— La curva crece (o decrece) **cada vez más rápidamente**; p.ej. las funciones polinómicas y las funciones exponenciales.
Es decir, si se obtiene $m = \infty$ la función crece más deprisa que cualquier recta.

— La curva crece (o decrece) **cada vez más lentamente**; p.ej. las funciones irracionales y las funciones logarítmicas.
Es decir, si se obtiene $m = 0$ y $n = \infty$ la función crece más despacio que cualquier recta con pendiente positiva.

En funciones racionales, si el grado del numerador es igual o mayor a dos unidades respecto al grado del denominador, la curva presenta una rama parabólica hacia arriba o hacia abajo

Según que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ sea $+\infty$ o $-\infty$; $gr(P) - gr(Q) \geq 2$