

GRAFICAS DE FUNCIONES POLINÓMICAS



Ejercicio

- Representar la función $y = (1/4).x^4 - 2.x^2$
- Puntos importantes a tener en cuenta para representar funciones polinómicas, $y = P(x)$
 - 1.- Cortes con los ejes.
 - 2.- Máximos y mínimos relativos.
 - 3.- Ramas infinitas.
 - 4.- Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
 - 5.- Puntos de inflexión.
 - 6.- Intervalos de concavidad y convexidad.
 - 7.- Simetría.
- En menor medida:
 - 8.- Periodicidad (Por ser muy pocas las funciones que lo presentan).
 - 9.- Tabla de Valores (En su caso contendrá los datos anteriores).

- **CORTES CON LOS EJES**

- Representar la función $y = (1/4).x^4 - 2.x^2$
- 1.- Puntos de corte con los ejes.
- Con OY $\rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow P_c(0,0)$
- Con OX $\rightarrow y = 0 \rightarrow (1/4).x^4 - 2.x^2 = 0$
- Sacando factor común a x^2
- $x^2 [(1/4).x^2 - 2] = 0$
- $x^2 = 0 \rightarrow x=0 \rightarrow P_c(0, 0)$
- $(1/4).x^2 - 2 = 0 \rightarrow x^2 = 8 \rightarrow x = \pm 2\sqrt{2}$
- Luego los otros dos puntos de corte son: $P_c(-2\sqrt{2}, 0)$ y $P_c(+2\sqrt{2}, 0)$
- Nótese que dos de los tres puntos de corte con OX coinciden.

- **MÁXIMOS Y MÍNIMOS RELATIVOS**

- Representar la función $y = (1/4).x^4 - 2.x^2$
- 2.- Derivamos la función para hallar los puntos singulares:
 - $y' = x^3 - 4.x$
 - Igualamos a cero: $y' = 0 \rightarrow x^3 - 4.x = 0$
 - Resolviendo la ecuación:
 - $x.(x^2 - 4) = 0 \rightarrow x.(x - 2).(x + 2) = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow x = 2, x = -2$
 - Hallamos las ordenadas correspondientes, los valores de $f(x)$:
 - $f(0) = 0 \rightarrow P(0, 0)$ es un Máx, o Mín
 - $f(2) = (1/4).2^4 - 2.2^2 = -4 \rightarrow P(2, -4)$ es un Máx, o Mín
 - $f(-2) = (1/4).(-2)^4 - 2.(-2)^2 = -4 \rightarrow P(-2, -4)$ es un Máx, o Mín
 - Miramos si es máximo o mínimo, por la derivada segunda:
 - $y'' = 3.x^2 - 4 \rightarrow f''(0) = 0 - 4 = -4 < 0 \rightarrow P(0, 0)$ es un Máximo
 - $y'' = 3.x^2 - 4 \rightarrow f''(2) = 12 - 4 = 8 > 0 \rightarrow P(2, -4)$ es un Mínimo
 - $y'' = 3.x^2 - 4 \rightarrow f''(-2) = 12 - 4 = 8 > 0 \rightarrow P(-2, -4)$ es un Mínimo



- **RAMAS ASINTÓTICAS**

- Representar la función $y = (1/4).x^4 - 2.x^2$

- 3.- Ramas infinitas

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1/4).x^4 - 2.x^2 = 0,25.(-\infty)^4 - 2.(-\infty)^2 = +\infty$

- $x \rightarrow -\infty$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1/4).x^4 - 2.x^2 = 0,25.(\infty)^4 - 2.(\infty)^2 = +\infty$

- $x \rightarrow +\infty$

- **CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO**

- Representar la función $y = (1/4).x^4 - 2.x^2$

- 4.- Delimitamos los intervalos de crecimiento y decrecimiento:

- Su derivada era $y' = x^3 - 4.x$
- En $x = 0$ había un máximo relativo.
- En $x = 2$ había un mínimo relativo.
- En $x = -2$ había un mínimo relativo.

- Los intervalos a estudiar son:
- $(-\infty, -2)$, $(-2, 0)$, $(0, 2)$ y $(2, \infty)$

- Tomamos un punto cualquiera de cada intervalo:
- $f'(-3) = (-3)^3 - 4.(-3) = -27 + 12 = -15 < 0 \rightarrow$ Decreciente en $(-\infty, -2)$
- $f'(-1) = (-1)^3 - 4.(-1) = -1 + 4 = 3 > 0 \rightarrow$ Creciente en $(-2, 0)$
- $f'(1) = (1)^3 - 4.(1) = 1 - 4 = -3 < 0 \rightarrow$ Decreciente en $(0, 2)$
- $f'(3) = (3)^3 - 4.(3) = 27 - 12 = 15 > 0 \rightarrow$ Creciente en $(2, \infty)$

- **PUNTOS DE INFLEXIÓN**

- Representar la función $y = (1/4).x^4 - 2.x^2$

- 5.- Hallamos los Puntos de Inflexión, si los hay:

- Su derivada era $y' = x^3 - 4.x$

- Hallamos la segunda derivada:

- $y'' = 3.x^2 - 4$

- Igualamos a cero:

- $3.x^2 - 4 = 0 \rightarrow x^2 = 4/3 \rightarrow x = \pm\sqrt{1,3333} = \pm 1,1547$ son las abscisas de los posibles puntos de inflexión.

- Comprobamos que lo es hallando la tercera derivada:

- $y''' = 6.x \rightarrow f'''(1,1547) <> 0$ En $x = 1,1547$ hay un P.I.

- $y''' = 6.x \rightarrow f'''(-1,1547) <> 0$ En $x = -1,1547$ hay un P.I.

- Hallamos sus ordenadas:

- $f(1,1547) = (1/4).(16/9) - 2.(4/3) = 4/9 - 8/3 = -20/9 \rightarrow \text{PI}(1,1547, -20/9)$

- $f(-1,1547) = (1/4).(16/9) - 2.(4/3) = 4/9 - 8/3 = -20/9 \rightarrow \text{PI}(-1,1547, -20/9)$

- **CURVATURA**

- Representar la función $y = (1/4).x^4 - 2.x^2$

- 6.- Hallamos los intervalos de concavidad y convexidad:

- Su derivada era $y' = x^3 - 4.x$

- Hallamos la segunda derivada:

- $y'' = 3.x^2 - 4$

- Igualamos a cero:

- $3.x^2 - 4 = 0 \rightarrow x = \pm 1,1547$ son puntos de limitación.

- Los intervalos a estudiar son: $(-\infty, -1,15), (-1,15, 1,15), (1,15, +\infty)$

- Tomamos un punto cualquiera de cada intervalo:

- $f''(-2) = 3(-2)^2 - 4 = 12 - 4 = 8 > 0 \rightarrow$ Es Cóncava en $(-\infty, -1,1547)$

- $f''(0) = 3(0)^2 - 4 = 0 - 4 = -4 < 0 \rightarrow$ Es Convexa en $(-1,1547, 1,1547)$

- $f''(2) = 3(2)^2 - 4 = 12 - 4 = 8 > 0 \rightarrow$ Es Cóncava en $(1,1547, +\infty)$

- **SIMETRÍAS**

- Representar la función $y = (1/4).x^4 - 2.x^2$

- $f(x) = (1/4).x^4 - 2.x^2$

- $f(-x) = (1/4).(-x)^4 - 2.(-x)^2 = (1/4).x^4 - 2.x^2$

- Vemos que presenta simetría par, pues $f(x) = f(-x)$

- $f(x) = (1/4).x^4 - 2.x^2$

- $-f(-x) = -(1/4).x^4 + 2.x^2$

- Vemos que no presenta simetría impar, pues $f(x) \neq -f(-x)$

- **TABLA DE VALORES**

		Pc	Mín	PI	Máx	Pc
x	-∞	-3	-2	-1,15	0	0
	+∞	0	-4	-2,22	0	0

Gráfica

- Sea la función:
- $y = (1/4).x^4 - 2.x^2$
- $P_c(0,0)$, $P_c(2\sqrt{2},0)$ y $(-2\sqrt{2},0)$
- $P(0,0)$ es un Máximo relativo
- $P(2, -4)$ es un Mínimo relativo
- $P(-2, -4)$ es un Mínimo relativo
- Decreciente en $(-\infty, -2)$
- Creciente en $(-2, 0)$
- Decreciente en $(0, 2)$
- Creciente en $(2, \infty)$
- Punto de Inflexión: $PI(1,1547, -20/9)$
- Punto de Inflexión: $PI(-1,1547, -20/9)$
- Es Cóncava en $(-\infty, -1,1547)$
- Es Convexa en $(-1,1547, 1,1547)$
- Es Cóncava en $(1,1547, +\infty)$
- Presenta simetría PAR.

