

FUNCIONES RACIONALES

- Son funciones de la forma $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, siendo $P(x)$ y $Q(x)$ dos polinomios y además $Q(x) \neq 0$
- **Dominio.** Todos los números reales excepto aquellos que anulan el denominador $Dom f = \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} / Q(x) = 0\}$. Para buscar el dominio debemos resolver la ecuación asociada al denominador, las soluciones de ésta son los puntos que no pertenecen al dominio de la función.
- **Asíntotas.** Las funciones racionales pueden tener AV, AH o AO.
En cada valor de x que anula el denominador tenemos una asíntota vertical: $Q(a) = 0 \Rightarrow x = a$ es una asíntota vertical de $f(x)$
- **Puntos de cortes.** Con el eje X se hallan resolviendo la ecuación $P(x) = 0$. El punto de corte con el eje Y se halla calculando $f(0)$
- **Continuidad.** Una función racional es discontinua en aquellos valores de x en los que el denominador se anula: $Q(x) = 0$
- **Estudio del signo de la función.** Son los intervalos en los que $f(x) > 0$ ó $f(x) < 0$, resolvemos, para "los positivos", la inecuación asociada

Tipo de Función	Expresión algebraica y Clase de gráfica	Características y Observaciones	Representación gráfica y Tabla de valores	Algunos Ejemplos
Función de proporcionalidad inversa	$y = \frac{k}{x}$ $\forall k \in \mathbb{R} ; k \neq 0$ $Dom f = \mathbb{R} - \{0\}$ $Im f = \mathbb{R} - \{0\}$ Su gráfica es una curva llamada hipérbola Presenta dos ramas, simétricas respecto del origen de coordenadas	Una función de proporcionalidad inversa relaciona dos magnitudes inversamente proporcionales. - No presenta puntos de corte con ejes - k es la constante de proporcionalidad - Es una función impar: $f(-x) = k / (-x) = -f(x)$ - AV en $x = 0$. AH en $y = 0$ - Sin puntos de corte con los ejes Si $k > 0$ la función es decreciente por intervalos. Gráfica en 1º y 3º cuadrante Si $k < 0$ la función es creciente por intervalos. Gráfica en 2º y 4º cuadrante Si $ k > 1$ la gráfica se aleja del origen Si $ k < 1$ la gráfica se acerca al origen	<p>Las asíntotas son los ejes de coordenadas</p>	$y = \frac{3}{x}$ $y = -\frac{7}{x}$
Función homográfica Cociente de dos funciones lineales (homográfica \approx gráfica parecida)	$y = \frac{ax + b}{cx + d}$ $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R} ;$ $c \neq 0 \rightarrow$ (no lineal) $ad \neq bc \rightarrow$ (no cte) $y = \frac{k}{x + m} + n$ $Dom f = \mathbb{R} - \{AV\}$ $Im f = \mathbb{R} - \{AH\}$ Su gráfica es una curva llamada hipérbola	Su gráfica presenta dos ramas en el 1º y 3º cuadrante o en el 2º y 4º cuadrante simétricas respecto al punto de corte de las asíntotas (centro de la hipérbola) <u>Puntos de Corte con los ejes</u> - eje X: resolviendo $ax + b = 0$ (cero de la función: $\{-b/a\}$) - eje Y: calculando $f(0)$ AV: la recta $x = -\frac{d}{c}$ y AH: la recta $y = \frac{a}{c}$ - Crecientes o decrecientes por intervalos - Discontinuidad en $x = -d/c$ - El signo de la función se estudia resolviendo la inecuación $f(x) > 0$		$y = \frac{3x+2}{x-2}$ $y = \frac{2x+6}{-x+2}$ $y = \frac{3}{x+2} + 1$

Otras funciones racionales

- A veces sus gráficas tienen varias ramas, estudiando el signo de la función sabemos dónde representarlas (resolviendo la inecuación $f(x) > 0$).
- Encontramos asíntotas verticales en los puntos solución, o ceros, del polinomio denominador (puntos que no pertenecen al dominio de la función)
- En la tabla de valores aparece la palabra "error" donde la función no está definida (AV). En las gráficas se señalan las asíntotas verticales.

<p>$y = \frac{1}{x^2 - 1}$</p>	<p>$y = \frac{1}{x^2 + 1}$</p>	<p>$y = \frac{x-1}{x^2 - 4}$</p>
$Dom f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ AV en $x = -1$ y $x = 1$	$Dom f = \mathbb{R}$ AH en $y = 0$	$Dom f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$ AV en $x = -2$ y $x = 2$

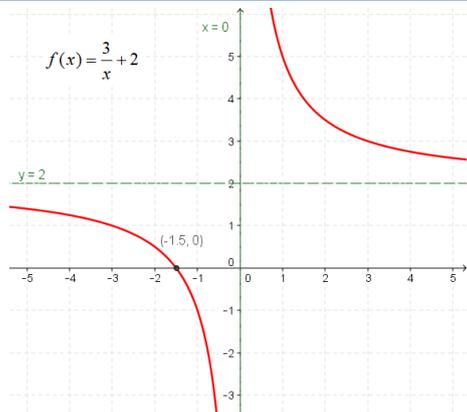
Traslación de hipérbolas

A partir de la gráfica de la función $f(x) = \frac{k}{x}$ se pueden obtener otras por traslación, dividiendo convertimos la expresión $\frac{ax+b}{cx+d}$ en esta otra $\frac{k}{x+m} + n$

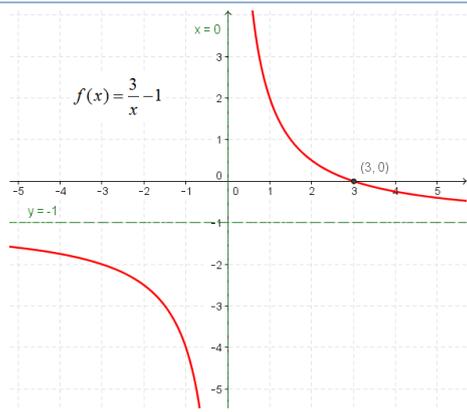
Traslación Vertical: $f(x) = \frac{k}{x} + n$

El centro de la hipérbola es $(0, n)$

Si $n > 0$, la función $f(x) = \frac{k}{x}$ se desplaza hacia arriba n unidades



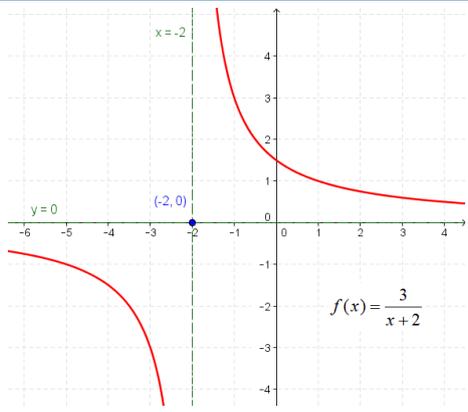
Si $n < 0$, la función $f(x) = \frac{k}{x}$ se desplaza hacia abajo n unidades



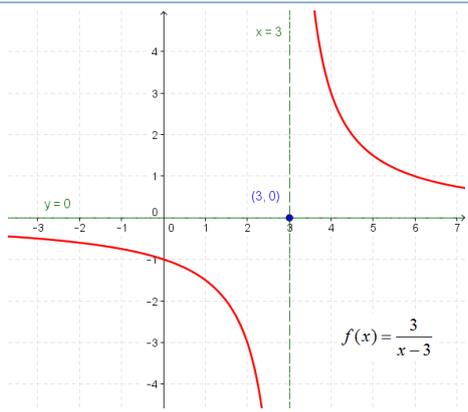
Traslación Horizontal: $f(x) = \frac{k}{x+m}$

El centro de la hipérbola es $(-m, 0)$

Si $m > 0$, la función $f(x) = \frac{k}{x}$ se desplaza hacia la izquierda m unidades



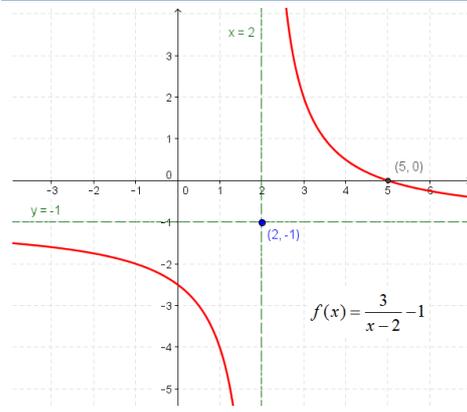
Si $m < 0$, la función $f(x) = \frac{k}{x}$ se desplaza hacia la derecha m unidades



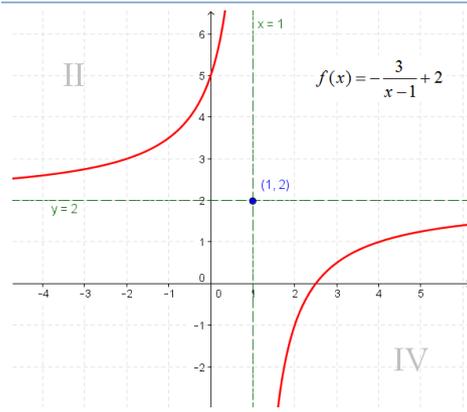
Traslación Oblicua: $f(x) = \frac{k}{x+m} + n$

El centro de la hipérbola es $(-m, n)$

Su representación gráfica es una hipérbola de centro $(-m, n)$ y de asíntotas paralelas a los ejes



Si $k < 0$, la función $f(x) = \frac{k}{x+m} + n$ ocupa el II y IV cuadrante



Observaciones:

- Para estudiar *la monotonía* (intervalos en los que la función es creciente o decreciente) buscamos los máximos y mínimos relativos que tenga la función mediante la primera y segunda derivada. Una función pasa de creciente a decreciente en un máximo y viceversa en un mínimo
- Para estudiar *la curvatura* (intervalos de concavidad y convexidad) buscamos los puntos de inflexión mediante la segunda y tercera derivada. Una curva pasa de cóncava a convexa o viceversa al pasar por el punto de inflexión

ASÍNTOTAS: Cuando la gráfica de una función se acerca cada vez más a una recta, confundiendo con ella, se dice que ésta es una **asíntota**.

- **Asíntotas verticales:** La recta $x = a$ es una asíntota vertical de la función cuando en un punto a , el valor de $f(x)$ tiende a valores cada vez más grandes $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ o a valores cada vez más pequeños $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.
- **Asíntotas horizontales:** La recta $y = b$ es una asíntota horizontal de la función si se verifica que cuando $x \rightarrow +\infty$ ó $x \rightarrow -\infty$ el valor de la función tiende a un valor finito, esto es $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$
- **Asíntotas Oblicuas:** Si el grado de $P(x)$ es una unidad mayor que el grado de $Q(x)$ existe una asíntota oblicua, la misma, tanto si $x \rightarrow +\infty$ ó $x \rightarrow -\infty$ y una forma de determinar su ecuación rápidamente es realizar la división polinómica indicada. Siendo n y m los coeficientes respectivos de mayor grado de $P(x)$ y $Q(x)$ tenemos:
 - Si $P(x)$ y $Q(x)$ tienen el mismo grado, hay una asíntota horizontal en $y = n/m$
 - Si el grado de $P(x)$ es menor que el de $Q(x)$, hay una asíntota horizontal en $y = 0$
 - Si el grado de $P(x)$ es mayor que el de $Q(x)$, no hay asíntota horizontal

• Una función racional puede tener más de una asíntota vertical, pero solo una que sea horizontal u oblicua (si tiene asíntota horizontal no tiene asíntota oblicua y viceversa).

• Si $x = a$ es una raíz simple de $Q(x) = 0$ las ramas laterales de la asíntota tienen sentidos contrarios (una hacia $+\infty$ y la otra hacia $-\infty$).

Si $x = a$ es una raíz doble ambas ramas van o hacia $+\infty$ o hacia $-\infty$