INTEGRAL INDEFINIDA

Integrales racionales

Mariano Real Pérez

INTEGRACION DE FUNCIONES RACIONALES

Una función racional $Q(x)$, es de la forma $Q(x) = f(x)/g(x)$

Método directo

1) Forma potencial: $\int \frac{f'}{f^n}\, dx = \frac{1}{(1-n)\cdot f^{n-1}} + C$

2) Forma neperiana: $\int \frac{f'}{f}\, dx = L|f| + C$

3) Forma arcotangente: $\int \frac{f'}{a^2+f^2}\, dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{f}{a} + C$

4) Forma neperiano-arcotangente: $\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}\, dx = \text{neperiano} + \text{arctag}$

$M \neq 0,\ \ ax^2+bx+c$ irreducible

Método de descomposición en fracciones simples

• ***División de Polinomios***. Si $Q(x) = f(x)/g(x)$ es una función impropia (esto es, si el grado del numerador es mayor que el grado del denominador), entonces dividimos el numerador por el denominador, y obtenemos:

$$Q(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = C(x) + \frac{r(x)}{g(x)}$$

donde el grado de $r(x)$ es menor que el de $g(x)$, y donde $C(x)$ es un polinomio (que se integra fácilmente). Por tanto hemos reducido el problema de integrar $f(x)/g(x)$ al de integrar $r(x)/g(x)$.

- **Calculemos** $\displaystyle\int \frac{x^3+2}{x-1}\,dx$

Dividiendo x^3+2 por $x-1$ resulta:

$$x^3+2 = (x-1)(x^2+x+1)+3 \Rightarrow \frac{x^3+2}{x-1} = (x^2+x+1) + \frac{3}{x-1} \Rightarrow$$

$$\int \frac{x^3+2}{x-1}\,dx = \int (x^2+x+1)\,dx + \int \frac{3}{x-1}\,dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 3L|x-1| + C$$

• ***Descomponer el denominador en factores irreducibles***. Todo polinomio con coeficientes reales se puede descomponer en un producto de polinomios irreducibles lineales y cuadráticos (aunque puede ser bastante difícil de encontrar). Por tanto, factorizamos completamente el denominador $g(x)$ en factores de la forma :

$$(px+q)^m$$

y

$$(ax^2+bx+c)^n$$

donde ambos son irreducibles.

• ***Descomposición en fracciones simples***. Un teorema algebraico, asegura que toda función polinómica $Q(x)=f(x)/g(x)$ puede ser escrita como una suma de fracciones simples, determinadas a partir de los factores irreducibles de $g(x)$. El método es el siguiente:

CASO1 .- Raices Reales Simples: Las raices del polinomio del denominador son todas reales y distintas entre si

- **Calculemos** $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^3+x^2-2x}\,dx$

Las raíces de x^3+x^2-2x son $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=-2$. Por lo tanto:

$$\frac{x^2+1}{x^3+x^2-2x}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x-1}+\frac{A_3}{x+2}=\frac{(A_1+A_2+A_3)x^2+(A_1+2A_2-A_3)\,x-2A_1}{x(x-1)(x+2)}\Rightarrow$$

$$x^2+1=(A_1+A_2+A_3)x^2+(A_1+2A_2-A_3)x-2A_1\Rightarrow$$

$$\begin{cases} A_1+A_2+A_3=1 \\ A_1+2A_2-A_3=0 \\ -2A_1=1 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema: $A_1=\dfrac{-1}{2}$; $A_2=\dfrac{2}{3}$, $A_3=\dfrac{5}{6}$

Así:

$$\int\frac{x^2+1}{x^3+x^2-2x}\,dx=\int\frac{-\frac{1}{2}}{x}\,dx+\int\frac{\frac{2}{3}}{x-1}\,dx+\int\frac{\frac{5}{6}}{x+2}\,dx=$$

$$=-\frac{1}{2}L|x|+\frac{2}{3}L|x-1|+\frac{5}{6}L|x+2|+C$$

• $\int \frac{dx}{x^2-1} = \int \frac{dx}{(x-1)(x+1)} = \int \frac{A_1}{x-1}dx + \int \frac{A_2}{x+1}dx = A_1 L|x-1| + A_2 L|x+1| + C$

Calculamos los coeficientes A_1, A_2:

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+1} = \frac{A_1(x+1) + A_2(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{(A_1+A_2)x + (A_1 - A_2)}{(x-1)(x+1)} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 0 \\ A_1 - A_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow A_1 = \frac{1}{2},\ A_2 = -\frac{1}{2}$$

Por tanto:

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2} L|x-1| - \frac{1}{2} L|x+1| + C$$

CASO 2 .- Raices Reales Múltiples: Las raices del polinomio del denominador son todas reales pero alguna de ellas o todas se repiten mas de una vez.

- **Calculemos** $\int \frac{dx}{x(x-1)^2}$

$$\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{A_1}{x} + \frac{B_1}{(x-1)} + \frac{B_2}{(x-1)^2}$$

Para calcular A_1, B_1, B_2 procedemos como en los casos anteriores:

$$\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{A_1(x-1)^2 + B_1x(x-1) + B_2x}{x(x-1)^2} = \frac{A_1(x^2+1-2x) + B_1(x^2-x) + B_2x}{x(x-1)^2} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{x^2(A_1+B_1) + x(-2A_1 - B_1 + B_2) + A_1}{x(x-1)^2} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A_1 + B_1 = 0 \\ -2A_1 - B_1 + B_2 = 0 \\ A_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow A_1 = 1,\ B_1 = -1,\ B_2 = 1$$

Por tanto:

$$\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

Entonces:

$$\int \frac{dx}{x(x-1)^2} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{(x-1)^2} =$$

$$= L|x| - L|x-1| - \frac{1}{x-1} + C$$

• Calculemos $\int \frac{x^2 + 3x - 2}{(x+1)^2(x+2)^2}\,dx$

$$\frac{x^2 + 3x - 2}{(x+1)^2(x+2)^2} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{(x+1)^2} + \frac{B_1}{x+2} + \frac{B_2}{(x+2)^2} \Rightarrow \frac{x^2 + 3x - 2}{(x+1)^2(x+2)^2} =$$

$$= \frac{A_1(x+1)(x+2)^2 + A_2(x+2)^2 + B_1(x+1)^2(x+2) + B_2(x+1)^2}{(x+1)^2(x+2)^2} \Rightarrow \frac{x^2 + 3x - 2}{(x+1)^2(x+2)^2} =$$

$$= \frac{x^3(A_1 + B_1) + x^2(5A_1 + A_2 + 4B_1 + B_2) + x(8A_1 + 4A_2 + 5B_1 + 2B_2)}{(x+1)^2(x+2)^2} +$$

$$+ \frac{(4A_1 + 4A_2 + 2B_1 + B_2)}{(x+1)^2(x+2)^2} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A_1 + B_1 = 0 \\ 5A_1 + A_2 + 4B_1 + B_2 = 1 \\ 8A_1 + 4A_2 + 5B_1 + 2B_2 = 3 \\ 4A_1 + 4A_2 + 2B_1 + B_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow A_1 = 9,\ A_2 = -4,\ B_1 = -9,\ B_2 = -4$$

Por tanto:

$$\int \frac{x^2 + 3x - 2}{(x-1)^2(x+2)^2}\,dx = \int \frac{9}{x+1}\,dx - \int \frac{4}{(x+1)^2}\,dx - \int \frac{9}{x+2}\,dx - \int \frac{4}{(x+2)^2}\,dx =$$

$$= 9L|x+1| + 4\frac{1}{x+1} - 9L|x+2| + 4\frac{1}{x+2} + C$$